Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

WiSe 2010/2011
`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Stand: 3. Februar 2011

Lineare Algebra II
13. Hausaufgabe

Abgabe: 09.02.2011 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (3 Punkte)

Berechnen Sie $\sin(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}.$$

2. Aufgabe (3 Punkte)

Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und sei $f \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt auf V gibt, so dass f normal bzgl. dieses Skalarproduktes ist.

3. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Zeigen Sie den folgenden Satz:

Satz. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist normal, d.h. es gilt $A^T A = AA^T$, genau dann, wenn es eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A = UDU^T$ gibt, wobei $D = \mathrm{diag}(R_1, \ldots, R_m)$ und für $j = 1, \ldots, m$ gilt entweder $R_j \in \mathbb{R}^{1,1}$ oder $R_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.*

Hinweise:

- Zeigen Sie, dass $R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ normal ist.
- Zeigen Sie, dass für eine reelle Matrix B mit $B^T B = 0$ bereits $B = 0$ folgt.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ normal. Zeigen Sie: Sind die Eigenwerte von $A^T A$ paarweise verschieden, so ist A symmetrisch.

4. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) A ist genau dann normal, wenn $\|Ax\|_2 = \|A^H x\|_2$ für jedes $x \in \mathbb{C}^{n,1}$ gilt.

(ii) A ist genau dann normal, wenn es eine normale Matrix B mit paarweise verschiedenen Eigenwerten gibt, die mit A kommutiert.

(iii) Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann ist A genau dann normal, wenn $A + aI$ normal ist.

(iv) Definiere den hermiteschen Teil $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^H)$ von A und den schiefhermiteschen Teil $S(A) = \frac{1}{2}(A - A^H)$ von A.
Zeigen Sie, dass $A = H(A) + S(A)$, $H(A)^H = H(A)$ und $S(A)^H = -S(A)$ gelten. Zeigen Sie weiter, dass A genau dann normal ist, wenn $H(A)$ und $S(A)$ kommutieren.

Gesamtpunktzahl: 20