**Technische Universität Berlin** WiSe 2010/2011
**Institut für Mathematik** `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 7. Februar 2011

# Lineare Algebra II
# 14. Hausaufgabe

Abgabe: 16.02.2011 **vor** der Vorlesung

---

**1. Aufgabe** (6 Punkte)

(i) Seien $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $A = A^H$, $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$ und $g(z) := i\frac{1+z}{1-z}$. Zeigen Sie:

(a) $f$ ist auf dem Spektrum von $A$ definiert und für $U := f(A)$ gilt $U^H = U^{-1}$.

(b) $g$ ist auf dem Spektrum von $U$ definiert und $A = g(U)$.

(ii) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ normal und $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ auf dem Spektrum von $A$ definiert, so gilt $f(A) = (aA + bI)(cA + dI)^{-1}$.

**2. Aufgabe** (5 Punkte)
Definiere für $u \in \mathbb{R}^{n,1}$ die *Householder-Matrix* $H(u) := I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T$ falls $u \neq 0$ und $H(0) := I_n$. Zeigen Sie:

(i) Für $u \neq 0$ sind $H(u)$ und $\begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$ orthogonal ähnlich, d.h. es existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $Q^T H(u) Q = \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$.
Hieraus folgt, dass $H(u)$ nur die Eigenwerte 1 und $-1$ mit $a(H(u), 1) = n - 1$ und $a(H(u), -1) = 1$ hat.

(ii) Jede orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ kann als Produkt von $n$ Householder-Matrizen geschrieben werden, d.h. es existieren $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^{n,1}$ mit $S = \prod_{i=1}^{n} H(u_i)$.

**3. Aufgabe** (3 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $A$ ist *positiv definit*, d.h. $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ mit $x \neq 0$.

(ii) Alle Eigenwerte von $A$ sind positiv.

(iii) Der Trägheitsindex von $A$ ist $(n, 0, 0)$.

**4. Aufgabe** (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Eine Lösung $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ der nicht-linearen Matrix-Gleichung $X^2 = A$ wird Quadratwurzel von $A$ genannt. Zeigen Sie:

(i) Eine symmetrisch positiv definite Matrix besitzt eine symmetrisch positiv definite Quadratwurzel.

(ii) Die Matrix $J_n(0)$, $n \geq 2$, besitzt keine Quadratwurzel.

Gesamtpunktzahl: 20