Technische Universität Berlin WiSe 2010/2011
Institut für Mathematik `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS10/LinA2/`
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 22. Februar 2011

Lineare Algebra II
15. Hausaufgabe

Abgabe: keine

---

1. Aufgabe (0 Punkte)
Der Beweis des Satzes über die Singulärwertzerlegung ist kontruktiv. Geben Sie einen Algorithmus zur Berechnung der SVD einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,m}$, $n \geq m$, an.
Hinweis: Welche Objekte im Beweis müssen tatsächlich berechnet werden? Welche nicht?

2. Aufgabe (0 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n,m}$, $n \geq m$. Zeigen Sie:

(i) Ist $\mathrm{Rang}(A) = m$, so gilt $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$.

(ii) Ist $\mathrm{Rang}(A) = n = m$, so gilt $A^+ = A^{-1}$.

(iii) A^+ ist die eindeutig bestimmte Matrix X, die die folgenden vier Gleichungen erfüllt:

(a) $AXA = A$,
(b) $XAX = X$,
(c) $(AX)^H = AX$,
(d) $(XA)^H = XA$.

3. Aufgabe (0 Punkte)
Seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}.$$

Berechnen Sie die Moore-Penrose-Inverse von A und geben Sie ein $\hat{x} \in \mathbb{R}^{2,1}$ an, so dass

* $\|A\hat{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2,1}$ und
* $\|\hat{x}\|_2 \leq \|y\|_2$ für alle $y \in \mathbb{R}^{2,1}$ mit $\|Ay - b\|_2 = \|A\hat{x} - b\|_2$.

Gesamtpunktzahl: 0