Suite II - Die Arithmetische
Teil 2: Essays 100-108

FundamentalSatz $\rightarrow$. $\cup \cap \forall \subseteq \in$ Satz Zahlen.


FundamentalSatz $\rightarrow$ in $\mathbb{R}$. NullTeilerFreiheit in $\mathbb{R}$.

ParameterAxiom III. $\leq$. KleinerGleich-Relation.

Kleiner-Relation. $\leq$-Notation. Arithmetisches Axiom VII.

FundamentalSatz $\leq$. KommutativGesetz Multiplikation.

$\cdot$Satz Zahlen.

Andreas Unterreiter
25. April 2012
FS---: FundamentalSatz ---.

Ersterstellung: 01/10/05

Letzte Änderung: 25/01/12
100-1. Via **Fundamentalsatz** gilt \(-x = x\) genau dann, wenn die nicht zum ersten Mal auftretende Alternative \(x\) Zahl oder \(x = U\) gilt:

\[
100-1\text{(Satz)} \text{ (FS---: Fundamentalsatz ---)}
\]

Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:

i) \(-x = x\).

ii) "\(x\) Zahl" oder "\(x = U\)".

---

**RECH-Notation.**

**Beweis 100-1**

---

**REIM-Notation.**

\([i) \Rightarrow ii)\text{ ]} \text{ VS gleich}\]

\(-x = x\).

1: Via **95-6** gilt:

\((x\ \text{Zahl}) \vee (x \notin A)\).

**Fallunterscheidung**

```
1.1.Fall
x \text{ Zahl.}

Aus 1.1.Fall folgt: \((x\ \text{Zahl}) \vee (x = U)\).
```

```
1.2.Fall
x \notin A.

2: Aus 1.2.Fall "\(x \notin A\)"

folgt via **96-12**: \(-x = U\).

3:

\(x \equiv -(-x) \equiv -U_{96-19} = U\).

4: Aus 3"\(x = \ldots = U\)"

folgt: \((x\ \text{Zahl}) \vee (x = U)\).
```

**Ende Fallunterscheidung**

In beiden Fällen gilt: \((x\ \text{Zahl}) \vee (x = U)\).
Beweis 100-1 (ii) ⇒ i) VS gleich $(x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U})$.

**Thema 1.1**

2: Aus Thema 1.1“α ∈ ℝ” folgt via AAV:

$$\alpha - \alpha = 0.$$  

3: Aus 2 folgt:

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$  

4: Aus Thema 1.1“α ∈ ℝ” und aus 3“\(\alpha + (-\alpha) = 0\)” folgt via 98-14:

$$\alpha = -(-\alpha).$$  

Ergo Thema 1.1:

A1 “∀α : (α ∈ ℝ) ⇒ (-(-α) = α)”

**Thema 1.2**

$$\alpha = \text{nan}.$$  

2: $$-(-\alpha) \overset{\text{Thema 1.2}}{=} -(-\text{nan}) \overset{\text{AAV}}{=} -\text{nan} \overset{\text{AAV}}{=} \text{nan} \overset{\text{Thema 1.2}}{=} \alpha.$$  

3: Aus 2 folgt:

$$-(-\alpha) = \alpha.$$  

Ergo Thema 1.2:

A2 “∀α : (α = \text{nan}) ⇒ (-(-\alpha) = \alpha)”

...
Beweis 100.1 [ii] ⇒ i) VS gleich  

\[ (x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}). \]

\[ \alpha = +\infty. \]
\[ -(-\alpha) \]
\[ -(-(+\infty)) \]
\[ \text{AAVI} \]
\[ -(-\infty) \]
\[ \text{AAVI} \]
\[ +\infty \]
\[ \text{Them}a1.3 \]
\[ \alpha. \]

3: Aus 2 folgt:
\[ -(-\alpha) = \alpha. \]

Ergo Thema1.3:  

A3 "\( \forall \alpha : (\alpha = +\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha) \)"

\[ \alpha = -\infty. \]
\[ -(-\alpha) \]
\[ -(-(-\infty)) \]
\[ \text{AAVI} \]
\[ -(+\infty) \]
\[ \text{AAVI} \]
\[ -\infty \]
\[ \text{Them}a1.4 \]
\[ \alpha. \]

3: Aus 2 folgt:
\[ -(-\alpha) = \alpha. \]

Ergo Thema1.4:  

A4 "\( \forall \alpha : (\alpha = -\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha) \)"

...
**Beweis 100-1** \(\text{ii) } \Rightarrow \text{i) VS gleich} \quad (x \text{ Zahl}) \lor (x = U).\)

... 

<table>
<thead>
<tr>
<th>Thema1.5</th>
<th>(\beta \in T.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus Thema1.5“(\beta \in T)“ folgt via 95-16:</td>
<td>((\beta \in \mathbb{R}) \lor (\beta = \text{nan}) \lor (\beta = +\infty) \lor (\beta = -\infty).)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1.Fall</th>
<th>(\beta \in \mathbb{R}.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 2.1.Fall“(\beta \in \mathbb{R})” und aus A1 gleich “(\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha))” folgt:</td>
<td>(-(-\beta) = \beta.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.2.Fall</th>
<th>(\beta = \text{nan}.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 2.2.Fall“(\beta = \text{nan})” und aus A2 gleich “(\forall \alpha : (\alpha = \text{nan}) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha))” folgt:</td>
<td>(-(-\beta) = \beta.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.3.Fall</th>
<th>(\beta = +\infty.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 2.3.Fall“(\beta = +\infty)” und aus A3 gleich “(\forall \alpha : (\alpha = +\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha))” folgt:</td>
<td>(-(-\beta) = \beta.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Beweis 100-1 [ii) ⇒ i] VS gleich

\( (x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}) \).

\[\begin{array}{|c|}
\hline
\text{Them 1.5} \\
\hline
\beta \in \mathbb{T}.
\end{array}\]

\[\begin{array}{|c|}
\hline
\text{Fallunterscheidung} \\
\hline
\end{array}\]

\[\begin{array}{|c|}
\hline
2.4.\text{Fall} \\
\hline
\beta = -\infty.
\end{array}\]

Aus 2.4. Fall “\( \beta = -\infty \)” und aus A4 gleich “\( \forall \alpha : (\alpha = -\infty) \Rightarrow (-(-\alpha) = \alpha) \)” folgt:

\[-(-\beta) = \beta.
\]

\[\begin{array}{|c|}
\hline
\text{Ende Fallunterscheidung} \\
\hline
\end{array}\]

In allen Fällen gilt: \( -(-\beta) = \beta \).

Ergo Them 1.5:

\[\begin{array}{|c|}
\hline
\text{A5} \\
\hline
\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (-(-\beta) = \beta)
\end{array}\]

...
Beweis 100-1 \( \begin{align*} (x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}). \end{align*} \)

... 

1.6: Nach VS gilt:

\[
(x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}).
\]

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fallunterscheidung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td><strong>1.6.1.Fall</strong></td>
</tr>
<tr>
<td>( x \text{ Zahl.} )</td>
</tr>
<tr>
<td>2.1: Aus 1.6.1.Fall ( &quot;x \text{ Zahl}&quot; ) folgt via 96-11:</td>
</tr>
<tr>
<td>( -x \text{ Zahl.} )</td>
</tr>
<tr>
<td>2.2: Aus 1.6.1.Fall ( &quot;x \text{ Zahl}&quot; ) folgt via 96-24:</td>
</tr>
<tr>
<td>( x = (\text{Re}x) + i \cdot \text{Im}x. )</td>
</tr>
<tr>
<td>2.3: Aus 1.6.1.Fall ( &quot;x \text{ Zahl}&quot; ) folgt via 96-9:</td>
</tr>
<tr>
<td>( (\text{Re}x \in \mathbb{T}) \land (\text{Im}x \in \mathbb{T}). )</td>
</tr>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1( &quot;-x \text{ Zahl}&quot; ) folgt via 96-11:</td>
</tr>
<tr>
<td>( -(x) \text{ Zahl.} )</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.3( &quot;\text{Re}x \in \mathbb{T}...&quot; ) und aus A5 gleich ( \forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (-(-\beta) = \beta) ) folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>( -(-\text{Re}x) = \text{Re}x. )</td>
</tr>
<tr>
<td>3.3: Aus 2.3( &quot;...\text{Im}x \in \mathbb{T}&quot; ) und aus A5 gleich ( \forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (-(-\beta) = \beta) ) folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>( -(-\text{Im}x) = \text{Im}x. )</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 3.1( &quot;-(-x) \text{ Zahl}&quot; ) folgt via 96-24:</td>
</tr>
<tr>
<td>( -(x) = \text{Re}(-(-x)) + i \cdot \text{Im}(-(-x)). )</td>
</tr>
</tbody>
</table>

...
Beweis 100-1 \(\text{\[ii\] \Rightarrow \[i\]}\) \(\text{VS gleich} \quad (x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}).\)

\[\text{Fallunterscheidung}\]

\begin{align*}
1.6.1.\text{Fall} & \quad x \text{ Zahl.} \\
5: & \quad -(x) \\
\quad \phantom{5:} & \quad \begin{align*}
\overset{4}{=} & \quad \text{Re}(-(x)) + i \cdot \text{Im}(-(x)) \\
\overset{96-27}{=} & \quad (-\text{Re}(x)) + i \cdot (\text{Im}(x)) \\
\overset{96-27}{=} & \quad (-\text{Re}(x)) + i \cdot (-\text{Im}(x)) \\
\overset{96-27}{=} & \quad (-\text{Re}(x)) + i \cdot (-\text{Im}(x)) \\
\overset{\overset{3 \cdot 2}{=} \text{(Re)} + i \cdot (-\text{Im}(x))}{=} & \quad \overset{\overset{3 \cdot 3}{=} \text{(Re)} + i \cdot \text{(Im}(x))}{=} \overset{2 \cdot 2}{=} x.
\end{align*}
6: \quad \text{Aus 5 folgt:} \\
\quad \phantom{6:} & \quad -(x) = x.
\end{align*}

\begin{align*}
1.6.2.\text{Fall} & \quad x = \mathcal{U}. \\
2: & \quad -(x) \overset{\text{1.6.2.Fall}}{=} -(\mathcal{U}) \overset{96-19}{=} -\mathcal{U} \overset{96-19}{=} \mathcal{U} \overset{\text{1.6.2.Fall}}{=} x. \\
3: \quad \text{Aus 2 folgt:} \\
\quad \phantom{3:} & \quad -(x) = x.
\end{align*}

\[\text{Ende Fallunterscheidung}\] In beiden Fällen gilt: \(-(-x) = x.\)
100-2. Da 0, 1, nan, +∞, −∞, i Zahlen sind, folgen aus FS ohne allzu viel Mühe die vorliegenden Gleichungen:

### 100-2(Satz)

a) \( -0 = 0 \).
b) \( -1 = 1 \).
c) \( -nan = nan \).
d) \( -(+\infty) = +\infty \).
e) \( -(-\infty) = -\infty \).
f) \( -i = i \).
Beweis 100-2

a) Aus $95-5$“0 Zahl”
folgt via $FS$ $\Rightarrow$: 
$\neg (0) = 0$.

b) Aus $95-5$“1 Zahl”
folgt via $FS$ $\Rightarrow$: 
$\neg (1) = 1$.

c) Aus $95-5$“nan Zahl”
folgt via $FS$ $\Rightarrow$: 
$\neg (\text{nan}) = \text{nan}$.

d) Aus $95-5$“$+\infty$ Zahl”
folgt via $FS$ $\Rightarrow$: 
$\neg (+\infty) = +\infty$.

e) Aus $95-5$“$-\infty$ Zahl”
folgt via $FS$ $\Rightarrow$: 
$\neg (-\infty) = -\infty$.

f) Aus $95-5$“i Zahl”
folgt via $FS$ $\Rightarrow$: 
$\neg (i) = i$.  \qed
100-3. Via FS --- lässt der doppelte Vorzeichenwechsel Terme, die stets entweder gleich einer Zahl oder gleich \( \mathcal{U} \) sind, unverändert. Dies ist Grund genug, die Liste der Terme, bei denen diese Alternative der Fall ist, zu erweitern:

100-3(Satz)

a) “\( \text{Re} \times \text{Zahl} \)” oder “\( \text{Re} = \mathcal{U} \)”.
b) “\( \text{Im} \times \text{Zahl} \)” oder “\( \text{Im} = \mathcal{U} \)”.
c) “\( -x \times \text{Zahl} \)” oder “\( -x = \mathcal{U} \)”.
d) “\( \text{rez}(x) \times \text{Zahl} \)” oder “\( \text{rez}(x) = \mathcal{U} \)”.
e) “\( x + y \times \text{Zahl} \)” oder “\( x + y = \mathcal{U} \)”.
f) “\( x \cdot y \times \text{Zahl} \)” oder “\( x \cdot y = \mathcal{U} \)”.
g) “\( x : y \times \text{Zahl} \)” oder “\( x : y = \mathcal{U} \)”.

REIM. RECH. Notation.

Beweis 100-3 a)

1: Via 95-6 gilt: \((\text{Re} \times \text{Zahl}) \lor (\text{Re} \not\in \mathbb{A})\).

Fallunterscheidung

1.1.Fall

Aus 1.1.Fall folgt: \((\text{Re} \times \text{Zahl}) \lor (\text{Re} = \mathcal{U})\).

1.2.Fall

2: Aus 1.2. Fall “\( \text{Re} \not\in \mathbb{A} \)” folgt via 96-10: \( \text{Re} = \mathcal{U} \).

3: Aus 2 folgt: \((\text{Re} \times \text{Zahl}) \lor (\text{Re} = \mathcal{U})\).

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: \((\text{Re} \times \text{Zahl}) \lor (\text{Re} = \mathcal{U})\).
Beweis 100-3 b)

1: Via 95-6 gilt: \((\text{l}m x \text{ Zahl}) \lor (\text{l}m x \notin \text{ A})\).

\begin{center}
\textbf{Fallunterscheidung}
\end{center}

\begin{center}
1.1. Fall
\end{center}

Aus 1.1. Fall
folgt:
\((\text{l}m x \text{ Zahl}) \lor (\text{l}m x = \text{ U})\).

\begin{center}
1.2. Fall
\end{center}

\begin{center}
2: Aus 1.2. Fall "\text{l}m x \notin \text{ A}"
\end{center}

folgt via 96-10:
\((\text{l}m x = \text{ U})\).

\begin{center}
3: Aus 2
\end{center}

folgt:
\((\text{l}m x \text{ Zahl}) \lor (\text{l}m x = \text{ U})\).

\begin{center}
Ende Fallunterscheidung
\end{center}

In beiden Fällen gilt:
\((\text{l}m x \text{ Zahl}) \lor (\text{l}m x = \text{ U})\).

c)

1: Via 95-6 gilt:
\((-x \text{ Zahl}) \lor (-x \notin \text{ A})\).

\begin{center}
\textbf{Fallunterscheidung}
\end{center}

\begin{center}
1.1. Fall
\end{center}

Aus 1.1. Fall
folgt:
\((-x \text{ Zahl}) \lor (-x = \text{ U})\).

\begin{center}
1.2. Fall
\end{center}

\begin{center}
2: Aus 1.2. Fall "\text{l}m x \notin \text{ A}"
\end{center}

folgt via 96-12:
\((-x = \text{ U})\).

\begin{center}
3: Aus 2
\end{center}

folgt:
\((-x \text{ Zahl}) \lor (-x = \text{ U})\).

\begin{center}
Ende Fallunterscheidung
\end{center}

In beiden Fällen gilt:
\((-x \text{ Zahl}) \lor (-x = \text{ U})\).
Beweis 100-3 d)

1: Via 95-6 gilt: $(\text{rez}(x) \text{ Zahl}) \lor (\text{rez}(x) \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall

rez(x) Zahl.

Aus 1.1.Fall folgt: $(\text{rez}(x) \text{ Zahl}) \lor (\text{rez}(x) = \mathbb{U})$.

1.2.Fall

rez(x) \notin \mathbb{A}.

2: Aus 1.2.Fall "$rez(x) \notin \mathbb{A}$" folgt via 96-12: \( \text{rez}(x) = \mathbb{U} \).

3: Aus 2 folgt: $(\text{rez}(x) \text{ Zahl}) \lor (\text{rez}(x) = \mathbb{U})$.

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: $(\text{rez}(x) \text{ Zahl}) \lor (\text{rez}(x) = \mathbb{U})$.

e)

1: Via 95-6 gilt: $(x + y \text{ Zahl}) \lor (x + y \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall

x + y Zahl.

Aus 1.1.Fall folgt: $(x + y \text{ Zahl}) \lor (x + y = \mathbb{U})$.

1.2.Fall

x + y \notin \mathbb{A}.

2: Aus 1.2.Fall "$x + y \notin \mathbb{A}$" folgt via 96-14: \( x + y = \mathbb{U} \).

3: Aus 2 folgt: $(x + y \text{ Zahl}) \lor (x + y = \mathbb{U})$.

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: $(x + y \text{ Zahl}) \lor (x + y = \mathbb{U})$. 
Beweis 100-3 f)

1: Via 95-6 gilt: \((x \cdot y \text{ Zahl}) \lor (x \cdot y \notin A)\).

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1.Fall</th>
<th>(x \cdot y \text{ Zahl.})</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 1.1.Fall folgt:</td>
<td>((x \cdot y \text{ Zahl}) \lor (x \cdot y = U).)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2.Fall</th>
<th>(x \cdot y \notin A.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.2.Fall (x \cdot y \notin A) folgt via 96-16:</td>
<td>(x \cdot y = U.)</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 folgt:</td>
<td>((x \cdot y \text{ Zahl}) \lor (x \cdot y = U).)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:
\((x \cdot y \text{ Zahl}) \lor (x \cdot y = U).\)

g)

1: Via 95-6 gilt: \((x : y \text{ Zahl}) \lor (x : y \notin A)\).

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1.Fall</th>
<th>(x : y \text{ Zahl.})</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 1.1.Fall folgt:</td>
<td>((x : y \text{ Zahl}) \lor (x : y = U).)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2.Fall</th>
<th>(x : y \notin A.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.2.Fall (x : y \notin A) folgt via 96-18:</td>
<td>(x : y = U.)</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 folgt:</td>
<td>((x : y \text{ Zahl}) \lor (x : y = U).)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:
\((x : y \text{ Zahl}) \lor (x : y = U).\)
100-4. Die hier angeführte Gleichungen folgen via 100-3 - bei ab2 via 96-22 - aus FS—:

<table>
<thead>
<tr>
<th>100-4(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) $-(-\text{Re} x) = \text{Re} x.$</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $-(-\text{Im} x) = \text{Im} x.$</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $-(-(-x)) = -x.$</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $-(-\text{rez}(x)) = \text{rez}(x).$</td>
</tr>
<tr>
<td>e) $-(-\text{ab}2(x)) = \text{ab}2(x).$</td>
</tr>
<tr>
<td>f) $-(-(x + y)) = x + y.$</td>
</tr>
<tr>
<td>g) $-(-(x \cdot y)) = x \cdot y.$</td>
</tr>
<tr>
<td>h) $-(-(x : y)) = x : y.$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**REIM.RECH-Notation.**
Beweis 100-4 a)
Aus 100-3 “(\(\text{Re} x\) Zahl) \(\lor\) (\(\text{Re} x = \mathcal{U}\))”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-\text{Re} x) = \text{Re} x\).

b)
Aus 100-3 “(\(\text{Im} x\) Zahl) \(\lor\) (\(\text{Im} x = \mathcal{U}\))”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-\text{Im} x) = \text{Im} x\).

c)
Aus 100-3 “\((-x\) Zahl) \(\lor\) \((-x = \mathcal{U})\)”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-(-x)) = -x\).

d)
Aus 100-3 “(\(\text{rez}(x)\) Zahl) \(\lor\) (\(\text{rez}(x) = \mathcal{U}\))”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-\text{rez}(x)) = \text{rez}(x)\).

e)
Aus 96-22 “(\(\text{ab}2(x)\) Zahl) \(\lor\) (\(\text{ab}2(x) = \mathcal{U}\))”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-\text{ab}2(x)) = \text{ab}2(x)\).

f)
Aus 100-3 “(\(x + y\) Zahl) \(\lor\) (\(x + y = \mathcal{U}\))”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-(x + y)) = x + y\).

g)
Aus 100-3 “(\(x \cdot y\) Zahl) \(\lor\) (\(x \cdot y = \mathcal{U}\))”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-x \cdot y) = x \cdot y\).

h)
Aus 100-3 “(\(x : y\) Zahl) \(\lor\) (\(x : y = \mathcal{U}\))”
folgt via \(\text{FS} \rightarrow\):
\(-(-x : y) = x : y\).

\(\blacksquare\)
100-5. Die nunmehrige Aussage ist ein *Hilfs*-Satz für den Beweis von 100-6:

**100-5(Satz)**

a) *Aus* "\(a \in S\) folgt "\(-a \in S\)."

b) *Aus* "\(a \in T\) folgt "\(-a \in T\)."

---

**Beweis 100-5 a) VS gleich**

\[ a \in S. \]

1: Aus **VS gleich** "\(a \in S\)"

folgt via 95-15:

\[(a \in \mathbb{R}) \lor (a = +\infty) \lor (a = -\infty).\]

**Fallunterscheidung**

1.1.**Fall**

\[ a \in \mathbb{R}. \]

Aus 1.1.**Fall** "\(a \in \mathbb{R}\)"

folgt via **AAV**:

\[ -a \in \mathbb{R}. \]

1.2.**Fall**

\[ a = +\infty. \]

2:

\[-a \overset{1.2.\text{Fall}}{=} -(+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty.\]

3: Aus 2"\(-a = \ldots = -\infty\)"

und

aus 95-11"\(-\infty \in S\)"

folgt:

\[-a \in S. \]

1.3.**Fall**

\[ a = -\infty. \]

2:

\[-a \overset{1.3.\text{Fall}}{=} -(\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} +\infty.\]

3: Aus 2"\(-a = \ldots = +\infty\)"

und

aus 95-11"\(+\infty \in S\)"

folgt:

\[-a \in S. \]

**Ende Fallunterscheidung**

In allen Fällen gilt:

\[-a \in S. \]
Beweis 100-5 \( b) \) VS gleich

1: \( a \in \mathbb{T} \)

folgt via 95-16:

\((a \in S) \lor (a = \text{nan})\).

**Fallunterscheidung**

1.1. Fall \( a \in S \)

2: Aus 1.1. Fall “\( a \in S \)”

folgt via des bereits bewiesenen a):

\(-a \in S\).

3: Aus 2 “\(-a \in S\)”

folgt via 95-16:

\(-a \in \mathbb{T} \).

1.2. Fall \( a = \text{nan} \)

2: \(-a \overset{1.2. \text{Fall}}{=} -\text{nan} \overset{\text{AAVI}}{=} \text{nan} \).

3: Aus 2 “\(-a = \ldots = \text{nan}\)” und

aus 95-12 “\(\text{nan} \in \mathbb{T}\)”

folgt:

\(-a \in \mathbb{T} \).

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:

\(-a \in \mathbb{T} \).

\( \square \)
100-6. Es gilt $p \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $-p \in \mathbb{R}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-(-p) \in \mathbb{R}$. Analoges gilt für $p \in S$, $p \in T$, $p$ Zahl. Korrespondierende Aussagen für $p \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{B}$ werden später bewiesen:

<table>
<thead>
<tr>
<th>100-6(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) $(p \in \mathbb{R}) \iff (-p \in \mathbb{R}) \iff (-(-p) \in \mathbb{R})$.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $(p \in S) \iff (-p \in S) \iff (-(-p) \in S)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $(p \in T) \iff (-p \in T) \iff (-(-p) \in T)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $(p$ Zahl$) \iff (-p$ Zahl$) \iff (-(-p)$ Zahl$)$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

RECH-Notation.
Beweis 100-6 a) \[
\begin{align*}
\text{(i) } & \Rightarrow \text{(ii)} \\
\text{VS gleich} & \quad p \in \mathbb{R}.
\end{align*}
\]

Aus VS gleich “\( p \in \mathbb{R} \)” folgt via AAV:
\[
\begin{align*}
\text{(ii) } & \Rightarrow \text{(iii)} \\
\text{VS gleich} & \quad -p \in \mathbb{R}.
\end{align*}
\]

Aus VS gleich “\(-p \in \mathbb{R}\)” folgt via AAV:
\[
\begin{align*}
\text{(iii) } & \Rightarrow \text{(i)} \\
\text{VS gleich} & \quad -(p) \in \mathbb{R}.
\end{align*}
\]

1: Aus VS gleich “\(-p \in \mathbb{R}\)” folgt via 99-1:
\[
\begin{align*}
\text{(-p) Zahl.}
\end{align*}
\]

2: Aus 1 “\(-p\) Zahl” folgt via 96-11:
\[
\begin{align*}
-p \text{ Zahl.}
\end{align*}
\]

3: Aus 2 “\(-p\) Zahl” folgt via 96-11:
\[
\begin{align*}
p \text{ Zahl.}
\end{align*}
\]

4: Aus 3 “\(p\) Zahl” folgt via FS---:
\[
\begin{align*}
-(p) = p.
\end{align*}
\]

5: Aus VS gleich “\(-p \in \mathbb{R}\)” und aus 4 “\(-p = p\)” folgt:
\[
\begin{align*}
p \in \mathbb{R}.
\end{align*}
\]
Beweis 100-6 b) \[ i) \Rightarrow ii) \] VS gleich

Aus VS gleich “\( p \in S \)” folgt via 100-5:

\[ -p \in S. \]

b) \[ ii) \Rightarrow iii) \] VS gleich

Aus VS gleich “\(-p \in S\)” folgt via 100-5:

\[ -(-p) \in S. \]

b) \[ iii) \Rightarrow i) \] VS gleich

1: Aus VS gleich “\(-(-p) \in S\)” folgt via 99-1:

\[ -(-p) \text{ Zahl}. \]

2: Aus 1“\(-(-p) \text{ Zahl}\)” folgt via 96-11:

\[ -p \text{ Zahl}. \]

3: Aus 2“\(-p \text{ Zahl}\)” folgt via 96-11:

\[ p \text{ Zahl}. \]

4: Aus 3“\( p \text{ Zahl}\)” folgt via FS—−:

\[ -(-p) = p. \]

5: Aus VS gleich “\(-(-p) \in S\)” und aus 4“\(-(-p) = p\)” folgt:

\[ p \in S. \]
Beweis 100-6 c)  \[ \begin{array}{c}
  \text{i) } \Rightarrow \text{ ii)} \end{array} \]  VS gleich  \( p \in \mathbb{T} \).

Aus VS gleich "\( p \in \mathbb{T} \)"
folgt via 100-5:  \( -p \in \mathbb{T} \).

c)  \[ \begin{array}{c}
  \text{ii) } \Rightarrow \text{ iii)} \end{array} \]  VS gleich  \( -p \in \mathbb{T} \).

Aus VS gleich "\( -p \in \mathbb{T} \)"
folgt via 100-5:  \( -(-p) \in \mathbb{T} \).

c)  \[ \begin{array}{c}
  \text{iii) } \Rightarrow \text{ i)} \end{array} \]  VS gleich  \( -(-p) \in \mathbb{T} \).

1: Aus VS gleich "\( -(p) \in \mathbb{T} \)"
folgt via 99-1:  \( -(p) \) Zahl.

2: Aus 1"\( -(p) \) Zahl"
folgt via 96-11:  \( -p \) Zahl.

3: Aus 2"\( -p \) Zahl"
folgt via 96-11:  \( p \) Zahl.

4: Aus 3"\( p \) Zahl"
folgt via FS--:
folgt:

5: Aus VS gleich "\( -(-p) \in \mathbb{T} \)" und
aus 4"\( -(-p) = p \)"
folgt:

\[ p \in \mathbb{T} \].

d)  \[ \begin{array}{c}
  \text{i) } \Rightarrow \text{ ii)} \end{array} \]  VS gleich  \( p \) Zahl.

Aus VS gleich "\( p \) Zahl"
folgt via 96-11:  \( -p \) Zahl.

d)  \[ \begin{array}{c}
  \text{ii) } \Rightarrow \text{ iii)} \end{array} \]  VS gleich  \( -p \) Zahl.

Aus VS gleich "\( -p \) Zahl"
folgt via 96-11:  \( -(-p) \) Zahl.

d)  \[ \begin{array}{c}
  \text{iii) } \Rightarrow \text{ i)} \end{array} \]  VS gleich  \( -(-p) \) Zahl.

1: Aus VS gleich "\( -(p) \) Zahl"
folgt via 96-11:  \( -p \) Zahl.

2: Aus 1"\( -p \) Zahl"
folgt via 96-11:  \( p \) Zahl.

\[ \square \]
100-7. Da 1 eine reelle Zahl ist, ist auch $-1$ via 100-6 eine reelle Zahl:

\[
\underline{100-7\text{(Satz)}} \quad -1 \in \mathbb{R}.
\]

RECH-Notation.

\textbf{Beweis 100-7}

Aus AAI “1 ∈ \mathbb{R}” folgt via 100-6: $-1 \in \mathbb{R}$. □
ARITHMETIK #100

100-8. Durch Kombination von FSA0 und FS--- wird das nunmehrige Kriterium erhalten:

100-8(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent:

i) \( 0 - (-x) = x \).

ii) \(-(-x) + 0 = x \).

iii) “\( x \) Zahl” oder “\( x = U \)”.

RECH-Notation.

Beweis 100-8 [i) \( \Rightarrow \) ii)] VS gleich

\[ 0 - (-x) = x. \]

1: Aus VS folgt:

\[ 0 + (-(-x)) = x. \]

2: Via FSA gilt:

\[ (-(-x)) + 0 = 0 + (-(-x)). \]

3: Aus 2“\( (-(-x)) + 0 = 0 + (-(-x)) \)” und

aus 1“\( 0 + (-(-x)) = x \)”

folgt:

\[ (-(-x)) + 0 = x. \]

4: Aus 3

folgt:

\[ -(-x) + 0 = x. \]
Beweis 100-8 \( (\text{ii}) \Rightarrow (\text{iii}) \) VS gleich

\(-(-x) + 0 = x.\)

1: Via 95-6 gilt:

\((x \text{ Zahl}) \lor (x \notin \mathbb{A}).\)

**Fallunterscheidung**

**1.1.Fall**

\(x \text{ Zahl.}\)

Aus 1.1.Fall folgt:

\((x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}).\)

**1.2.Fall**

\(x \notin \mathbb{A}.\)

2: Aus 1.2.Fall \(x \notin \mathbb{A}\)

folgt via 96-12:

\(-x = \mathcal{U}.\)

3:

\(x \equiv (-x) + 0 \equiv -\mathcal{U} + 0 \equiv 0 \mathcal{U} + 0 \equiv 0 \mathcal{U}.\)

4: Aus 3 \(x = \ldots = \mathcal{U}\)

folgt:

\((x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}).\)

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: \((x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}).\)

\(\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}\) VS gleich

\((x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U}).\)

1.1: Aus VS gleich \((x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U})\)

folgt via FSA0:

\(0 + x = x.\)

1.2: Aus VS gleich \((x \text{ Zahl}) \lor (x = \mathcal{U})\)

folgt via FS−−:

\(-(-x) = x.\)

2: Aus 1.1 \(0 + x = x\) und aus 1.2 \(-(-x) = x\)

folgt:

\(0 + (-(-x)) = x.\)

3: Aus 2 folgt:

\(0 - (-x) = x.\)

\(\square\)
100-9. Nun geht es um die Gleichungen $x = y$, $-x = -y$, $-(-x) = -(-y)$:

100-9(Satz)

a) Aus "$x = y$" folgt "$-x = -y$".

b) Aus "$x = y$" folgt "$-(-x) = -(-y)$".

c) Aus "$-x = -y$" folgt "$-(-x) = -(-y)$".

d) Aus "$-x = -y$" und "$x$ Zahl" folgt "$x = y$" und "$y$ Zahl".

e) Aus "$-x = -y$" und "$y$ Zahl" folgt "$x = y$" und "$x$ Zahl".

f) Aus "$-(-x) = -(-y)$" folgt "$-x = -y$".

g) Aus "$-(-x) = -(-y)$" und "$x$ Zahl" folgt "$x = y$" und "$y$ Zahl".

h) Aus "$-(-x) = -(-y)$" und "$y$ Zahl" folgt "$x = y$" und "$x$ Zahl".

RECH-Notation.

Beweis 100-9

ab) VS gleich $x = y$.

1. a) Aus "$-x = -x$" und aus VS gleich "$x = y$"
folgt: $-x = -y$.

2. b) Aus "$-(-x) = -(-x)$" und aus 1. a) "$-x = -y$"
folgt: $-(-x) = -(-y)$.

c) VS gleich $-x = -y$.

Aus VS gleich "$-x = -y$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $-(-x) = -(-y)$.
Beweis 100-9 d) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “\( -x = -y \ldots \)”
folgt via des bereits bewiesenen c):
\[ (-x) = -(y). \]

1.2: Aus VS gleich “\( \ldots x \text{ Zahl} \)”
folgt via 96-11:
\[ -x \text{ Zahl}. \]

1.3: Aus VS gleich “\( \ldots x \text{ Zahl} \)”
folgt via FS--:
\[ (-x) = x. \]

2.1: Aus 1.2“\( -x \text{ Zahl} \)” und
aus VS gleich “\( -x = -y \ldots \)”
folgt:
\[ -y \text{ Zahl}. \]

2.2: Aus 1.1“\( -(x) = -(y) \)” und
aus 1.3“\( -(x) = x \)”
folgt:
\[ x = -(y). \]

3: Aus 2.1“\( -y \text{ Zahl} \)”
folgt via 96-11:
\[ y \text{ Zahl}. \]

4: Aus 3“\( y \text{ Zahl} \)”
folgt via FS--:
\[ (-y) = y. \]

5: Aus 2.2“\( x = -(y) \)” und
aus 4“\( -(y) = y \)”
folgt:
\[ x = y. \]

6: Aus 5“\( x = y \)” und
aus 3“\( y \text{ Zahl} \)”
folgt:
\[ (x = y) \land (y \text{ Zahl}). \]

e) VS gleich

1: Aus VS gleich “\( -x = -y \ldots \)”
folgt:
\[ -y = -x. \]

2: Aus 1“\( -y = -x \)” und
aus VS gleich “\( \ldots y \text{ Zahl} \)”
folgt via des bereits bewiesenen d):
\[ (y = x) \land (x \text{ Zahl}). \]

3: Aus 2“\( y = x \ldots \)”
folgt:
\[ x = y. \]

4: Aus 3“\( x = y \)” und
aus 2“\( \ldots x \text{ Zahl} \)”
folgt:
\[ (x = y) \land (x \text{ Zahl}). \]
**Beweis 100-9** f) VS gleich

1: Aus VS gleich “$-(x) = -(y)$”
   folgt via des bereits bewiesenen a):
   
   $-(-x) = -(y)$.

2: $x^{100-4} - (-x) = 1 - (-y)$.

3: Aus 2
   folgt:
   $-x = -y$.

g) VS gleich

1: Aus VS gleich “$-(x) = -(y)$”
   folgt via des bereits bewiesenen f):
   
   $-x = -y$.

2: Aus 1“$-x = -y$” und
   aus VS gleich “$x$ Zahl”
   folgt via des bereits bewiesenen d):
   
   $(x = y) \land (x$ Zahl).

h) VS gleich

1: Aus VS gleich “$-(x) = -(y)$”
   folgt via des bereits bewiesenen f):
   
   $-x = -y$.

2: Aus 1“$-x = -y$” und
   aus VS gleich “$y$ Zahl”
   folgt via des bereits bewiesenen e):
   
   $(x = y) \land (x$ Zahl).
100-10. Nun geht es um die Ungleichungen $x \neq y$, $-x \neq -y$, $-(-x) \neq -(-y)$:

100-10(Satz)

a) Aus "$x \neq y$" und "$x$ Zahl" folgt "$-x \neq -y$".
b) Aus "$x \neq y$" und "$y$ Zahl" folgt "$-x \neq -y$".
c) Aus "$x \neq y$" und "$x$ Zahl" folgt "$-(-x) \neq -(-y)$".
d) Aus "$x \neq y$" und "$y$ Zahl" folgt "$-(-x) \neq -(-y)$".
e) Aus "$-x \neq -y$" folgt "$x \neq y$".
f) Aus "$-x \neq -y$" folgt "$-(-x) \neq -(-y)$".
g) Aus "$-(-x) \neq -(-y)$" folgt "$x \neq y$".
h) Aus "$-(-x) \neq -(-y)$" folgt "$-x \neq -y$".

---

RECH-Notation

Beweis 100-10 a)

1: Via 100-9 gilt: 

$$((-x = -y) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = y).$$

2: Aus 1 folgt: 

$$((-x = -y) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-x = -y)).$$

3: Aus 2 folgt: 

$$((x \neq y) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq -y).$$

b)

1: Via 100-9 gilt: 

$$((-x = -y) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = y).$$

2: Aus 1 folgt: 

$$((-x = -y) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (\neg(-x = -y)).$$

3: Aus 2 folgt: 

$$((x \neq y) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq -y).$$
Beweis 100-10 c)  
1: Via 100-9 gilt: 
   \[\left(\neg(-x) = -(\neg y)\right) \land (x \text{ Zahl}) \Rightarrow (x = y).\]

2: Aus 1 folgt: 
   \[\left(\neg(x = y)\right) \land (x \text{ Zahl}) \Rightarrow \neg\left(\neg(-x) = -(\neg y)\right).\]

3: Aus 2 folgt: 
   \[\left(x \neq y\right) \land (x \text{ Zahl}) \Rightarrow \neg\left(\neg(-x) \neq -(\neg y)\right).\]

d)  
1: Via 100-9 gilt: 
   \[\left(\neg(-x) = -(\neg y)\right) \land (y \text{ Zahl}) \Rightarrow (x = y).\]

2: Aus 1 folgt: 
   \[\left(\neg(x = y)\right) \land (y \text{ Zahl}) \Rightarrow \neg\left(\neg(-x) = -(\neg y)\right).\]

3: Aus 2 folgt: 
   \[\left(x \neq y\right) \land (y \text{ Zahl}) \Rightarrow \neg\left(\neg(-x) \neq -(\neg y)\right).\]

e)  
1: Via 100-9 gilt: 
   \[(x = y) \Rightarrow (-x = -y).\]

2: Aus 1 folgt: 
   \[\neg\left(-x = -y\right) \Rightarrow \neg(x = y).\]

3: Aus 2 folgt: 
   \[\neg(-x \neq -y) \Rightarrow (x \neq y).\]

f)  
1: Via 100-9 gilt: 
   \[\left(-(-x) = -(\neg y)\right) \Rightarrow (-x = -y).\]

2: Aus 1 folgt: 
   \[\neg\left(-(-x) = -(\neg y)\right) \Rightarrow \neg(-(-x) = -(-y)).\]

3: Aus 2 folgt: 
   \[\neg(-x \neq -y) \Rightarrow (-(-x) \neq -(\neg y)).\]
Beweis 100-10 g)

1: Via 100-9 gilt:

\[(x = y) \Rightarrow (-(x) = -(y)).\]

2: Aus 1 folgt:

\[(-(-(x) = -(y))) \Rightarrow (-(x) = y).\]

3: Aus 2 folgt:

\[(-(x) \neq -(y)) \Rightarrow (x \neq y).\]

h)

1: Via 100-9 gilt:

\[(-x = -y) \Rightarrow (-(x) = -(y)).\]

2: Aus 1 folgt:

\[(-(-(x) = -(y))) \Rightarrow (-(x) = y).\]

3: Aus 2 folgt:

\[(-(x) \neq -(y)) \Rightarrow (x \neq y).\]

\[\square\]
100-11. Nun geht es um die Gleichungen \( x = -y, -x = y, x = -(-y), -x = -(-y) \):

\textbf{100-11 (Satz)}

a) Aus "\( x = -y \)" folgt "\(-x = -(-y)\)".

b) Aus "\( x = -y \) und "\( x \) Zahl" folgt "\(-x = y \)" und "\( y \) Zahl".

c) Aus "\( x = -y \) und "\( y \) Zahl" folgt "\(-x = y \)" und "\( x \) Zahl".

d) Aus "\(-x = y \)" folgt "\(-(-x) = -y \)".

e) Aus "\(-x = y \)" und "\( x \) Zahl" folgt "\( x = -y \)" und "\( y \) Zahl".

f) Aus "\(-x = y \)" und "\( y \) Zahl" folgt "\( x = -y \)" und "\( x \) Zahl".

g) Aus "\( x = -(-y) \)" und "\( x \) Zahl" folgt "\( x = y \)" und "\( y \) Zahl".

h) Aus "\( x = -(-y) \)" und "\( y \) Zahl" folgt "\( x = y \)" und "\( x \) Zahl".

i) Aus "\( x = -(-y) \)" folgt "\(-x = -y \)".

j) Aus "\(-x = -(-y) \)" und "\( x \) Zahl" folgt "\( x = -y \)" und "\( y \) Zahl".

k) Aus "\(-x = -(-y) \)" und "\( y \) Zahl" folgt "\( x = -y \)" und "\( x \) Zahl".

l) Aus "\(-x = -(-y) \)" folgt "\( -(-x) = -y \)".

\textbf{Beweis 100-11 a) VS gleich}

Aus VS gleich "\( x = -y \)"

folgt:

\( x = -y \).

\( -x = -(-y) \).
Beweis 100-11 b) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “\( x = -y \ldots \)”
folgt via des bereits bewiesenen a):
\(-x = -(-y)\).

1.2: Aus VS gleich “\( x = -y \ldots \)” und
aus VS gleich “\( \ldots x \) Zahl”
folgt:
\(-y \) Zahl.

2: Aus 1.2 “\(-y \) Zahl”
folgt via 96-11:
\( y \) Zahl.

3: Aus 2 “\( y \) Zahl”
folgt via FS--:
\(-(-y) = y\).

4: Aus 1.1 “\(-x = -(-y)\)” und
aus 3 “\(-(-y) = y\)”
folgt:
\(-x = y\).

5: Aus 4 “\(-x = y\)” und
aus 2 “\( y \) Zahl”
folgt:
\((-x = y) \land (x \) Zahl\).

c) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “\( x = -y \ldots \)”
folgt via des bereits bewiesenen a):
\(-x = -(-y)\).

1.2: Aus VS gleich “\( \ldots y \) Zahl”
folgt via FS--:
\(-(-y) = y\).

1.3: Aus VS gleich “\( \ldots y \) Zahl”
folgt via 96-11:
\(-y \) Zahl.

2.1: Aus 1.1 “\(-x = -(-y)\)” und
aus 1.2 “\(-(-y) = y\)”
folgt:
\(-x = y\).

2.2: Aus VS gleich “\( x = -y \ldots \)” und
aus 1.3 “\(-y \) Zahl”
folgt:
\( x \) Zahl.

3: Aus 2.1 “\(-x = y\)” und
aus 2.2 “\( x \) Zahl”
folgt:
\((-x = y) \land (x \) Zahl\).
Beweis 100-11 d) VS gleich

Aus VS gleich “$-x = y$”
folgt: 

$-(x) = -y$.

e) VS gleich 

$(x = y) \land (y \text{ Zahl})$.

1: Aus VS gleich “$-x = y$”
folgt: 

$y = -x$.

2: Aus 1“$y = -x$” und
aus VS gleich “$\ldots x \text{ Zahl}$”
folgt via des bereits bewiesenen c): 

$(x = y) \land (y \text{ Zahl})$.

3: Aus 2“$-y = x$”
folgt: 

$x = -y$.

4: Aus 3“$x = -y$” und
aus 2“$\ldots y \text{ Zahl}$”
folgt: 

$(x = y) \land (y \text{ Zahl})$.

f) VS gleich

$(x = y) \land (y \text{ Zahl})$.

1: Aus VS gleich “$-x = y$”
folgt: 

$y = -x$.

2: Aus 1“$y = -x$” und
aus VS gleich “$\ldots y \text{ Zahl}$”
folgt via des bereits bewiesenen b): 

$(x = y) \land (x \text{ Zahl})$.

3: Aus 2“$-y = x$”
folgt: 

$x = -y$.

4: Aus 3“$x = -y$” und
aus 2“$x \ldots \text{ Zahl}$”
folgt: 

$(x = y) \land (x \text{ Zahl})$. 
**Beweis 100-1** g) VS gleich

1: Aus VS gleich “$x = (-y)$" und aus VS gleich “$x$ Zahl” folgt: $(-y)$ Zahl.

2: Aus 1 “$(-y)$ Zahl”
folgt via 100-6: $y$ Zahl.

3: Aus 2 “$y$ Zahl”
folgt via FS−−: $(-y) = y$.

4: Aus VS gleich “$x = (-y)$” und aus 3 “$(-y) = y$”
folgt: $x = y$.

5: Aus 4 “$x = y$” und aus 2 “$y$ Zahl”
folgt: $(x = y) \land (y$ Zahl).

**h) VS gleich**

1: Aus VS gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt via FS−−: $(-y) = y$.

2: Aus VS gleich “$x = (-y)$” und aus 1 “$(-y) = y$”
folgt: $x = y$.

3: Aus 2 “$x = y$” und aus VS gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt: $x$ Zahl.

4: Aus 2 “$x = y$” und aus 3 “$x$ Zahl”
folgt: $(x = y) \land (x$ Zahl).

**i) VS gleich**

1: Aus VS gleich “$x = (-y)$”
folgt via 100-9: $-x = -(-y))$.

2: Via 100-4 gilt:

3: Aus 1 “$-x = -(-y)$” und aus 2 “$-(-y) = -y$”
folgt: 

$x = -y$. 
Beweis 100-11 j) VS gleich 

\[ (-x = -(-y)) \land (x \text{ Zahl}). \]

1: Aus VS gleich “…x Zahl” 
folgt via 96-11: 

\[ -x \text{ Zahl}. \]

2: Aus VS gleich “\(-x = -(y)\ldots\)” und 
aus 1“\(-x \text{ Zahl}\)” 
folgt via des bereits bewiesenen g): 

\[ (-x = y) \land (y \text{ Zahl}). \]

3: Aus 2“\(-x = y\ldots\)” und 
aus 2“…y Zahl” 
folgt via des bereits bewiesenen f): 

\[ x = -y. \]

4: Aus 3“\(x = -y\)” und 
aus 2“…y Zahl” 
folgt: 

\[ (x = -y) \land (y \text{ Zahl}). \]

k) VS gleich 

\[ (-x = -(y)) \land (y \text{ Zahl}). \]

1: Aus VS gleich “…y Zahl” 
folgt via FS—−: 

\[ -(y) = y. \]

2: Aus VS gleich “\(-x = -(y)\ldots\)” und 
aus 1“\(-(y) = y\)” 
folgt: 

\[ -x = y. \]

3: Aus 2“\(-x = y\ldots\)” und 
aus VS gleich “…y Zahl” 
folgt via des bereits bewiesenen f): 

\[ (x = -y) \land (x \text{ Zahl}). \]

1) VS gleich 

\[ -x = -(y). \]

1: Aus VS gleich “\(-x = -(y)\)” 
folgt via 100-9: 

\[ -(-x) = -(-(y)). \]

2: Via 100-4 gilt: 

\[ -(-(y)) = -y. \]

3: Aus 1“\(-(-x) = -(y)\)” und 
aus 2“\(-(-y) = -y\)” 
folgt: 

\[ -(-x) = -y. \]

\[ \square \]
100-12. Nun geht es um die Ungleichungen $x \neq -y$, $-x \neq y$, $x \neq -(-y)$, $-x \neq -(-y)$:

### 100-12(Satz)

a) Aus “$x \neq -y$“ und “$x$ Zahl“ folgt “$-x \neq y$”.

b) Aus “$x \neq -y$“ und “$y$ Zahl“ folgt “$-x \neq y$”.

c) Aus “$-x \neq y$“ und “$x$ Zahl“ folgt “$x \neq -y$”.

d) Aus “$-x \neq y$“ und “$y$ Zahl“ folgt “$x \neq -y$”.

e) Aus “$x \neq -(-y)$“ und “$x$ Zahl“ folgt “$x \neq y$”.

f) Aus “$x \neq -(-y)$“ und “$y$ Zahl“ folgt “$x \neq y$”.

g) Aus “$-x \neq -(-y)$“ folgt “$x \neq -y$”.

RECH-Notation.
Beweis 100-12 a)

1: Via 100-11 gilt: 

\[ ((-x = y) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = -y). \]

2: Aus 1 
folgt: 

\[ ((-x = -y)) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-(x = y)). \]

3: Aus 2 
folgt: 

\[ ((x \neq -y) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq y). \]

b)

1: Via 100-11 gilt: 

\[ ((-x = y) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (x = -y). \]

2: Aus 1 
folgt: 

\[ ((-x = -y)) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-(x = y)). \]

3: Aus 2 
folgt: 

\[ ((x \neq -y) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x \neq y). \]

c)

1: Via 100-11 gilt: 

\[ ((x = -y) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x = y). \]

2: Aus 1 
folgt: 

\[ ((-(-x = y)) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (-(x = -y)). \]

3: Aus 2 
folgt: 

\[ ((-x \neq y) \land (x \text{ Zahl})) \Rightarrow (x \neq -y). \]

d)

1: Via 100-11 gilt: 

\[ ((x = -y) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-x = y). \]

2: Aus 1 
folgt: 

\[ ((-(-x = y)) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (-(x = -y)). \]

3: Aus 2 
folgt: 

\[ ((-x \neq y) \land (y \text{ Zahl})) \Rightarrow (x \neq -y). \]
Beweis 100-12 e) VS gleich

(x ≠ −(−y)) ∧ (x Zahl).

1: Es gilt:

(x = y) ∨ (x ≠ y).

Fallunterscheidung

1.1. Fall

x = y.

2: Aus VS gleich “...x Zahl” und
aus 1.1. Fall “x = y”
folgt:
y Zahl.

3: Aus 2 “y Zahl”
folgt via FS−−:
(−(−y)) = y.

4: Aus VS gleich “x ≠ −(−y)...” und
aus 3 “(−(−y)) = y”
folgt:
x ≠ y.

5: Es gilt 4 “x ≠ y”.
Es gilt 1.1. Fall “x = y”.
Ex falso quodlibet folgt:
x ≠ y.

1.2. Fall

x ≠ y.

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:
x ≠ y.

f) VS gleich

(x ≠ −(−y)) ∧ (y Zahl).

1: Aus VS gleich “...y Zahl”
folgt via FS−−:
(−(−y)) = y.

2: Aus VS gleich “x ≠ −(−y)...” und
aus 1 “(−(−y)) = y”
folgt:
x ≠ y.

g)

1: Via 100-11 gilt:

(x = −y) ⇒ (−x = −(−y)).

2: Aus 1
folgt:

(−(−x = −(−y))) ⇒ (−(x = −y)).

3: Aus 2
folgt:

(−x ≠ −(−y)) ⇒ (x ≠ −y).

□
100-13. Da 0, 1, _nan_, +∞, −∞, i Zahlen sind ergeben sich die nunmehrigen Kriterien ohne allzu viel Mühe aus Bisherigem:

100-13(Satz)

a) “_x_ = 0” genau dann, wenn “−_x_ = 0”.
b) “0 ≠ _x_” genau dann, wenn “0 ≠ −_x_”.
c) “_x_ = 1” genau dann, wenn “−_x_ = −1”.
d) “_x_ ≠ 1” genau dann, wenn “−_x_ ≠ −1”.
e) “_x_ = −1” genau dann, wenn “−_x_ = 1”.
f) “_x_ ≠ −1” genau dann, wenn “−_x_ ≠ 1”.
g) “_x_ = _nan_” genau dann, wenn “−_x_ = _nan_”.
h) “_x_ ≠ _nan_” genau dann, wenn “−_x_ ≠ _nan_”.
i) “_x_ = +∞” genau dann, wenn “−_x_ = −∞”.
j) “_x_ ≠ +∞” genau dann, wenn “−_x_ ≠ −∞”.
k) “_x_ = −∞” genau dann, wenn “−_x_ = +∞”.
l) “_x_ ≠ −∞” genau dann, wenn “−_x_ ≠ +∞”.
m) “_x_ = i” genau dann, wenn “−_x_ = −i”.
n) “_x_ ≠ i” genau dann, wenn “−_x_ ≠ −i”.
o) “_x_ = −i” genau dann, wenn “−_x_ = i”.
p) “_x_ ≠ −i” genau dann, wenn “−_x_ ≠ i”.

**RECH-Notation.**
Beweis 100-13 a) $$\iff$$ VS gleich

\[
\begin{align*}
1: & \quad x = 0. \\
2: & \quad -x = -0. \\
\end{align*}
\]

b) 

\[
\begin{align*}
1: & \quad (x = 0) \iff (-x = 0). \\
2: & \quad (x \neq 0) \iff (-x \neq 0). \\
3: & \quad (0 \neq x) \iff (0 \neq -x). \\
\end{align*}
\]

c) $$\iff$$ VS gleich

Aus VS gleich “$$x = 1$$” folgt via 100-9:

\[
-x = -1.
\]

d) 

\[
\begin{align*}
1: & \quad (x = 1) \iff (-x = -1). \\
2: & \quad (\neg (x = 1)) \iff (\neg (-x = -1)). \\
3: & \quad (x \neq 1) \iff (-x \neq -1).
\end{align*}
\]
Beweis 100-13 e) \(\iff\) VS gleich

Aus VS gleich "\(x = -1\)" und
aus 95-5 "1 Zahl"
folgt via 100-11:

\(\iff\)

Aus VS gleich "\(-x = 1\)" und
aus 95-5 "1 Zahl"
folgt via 100-11:

\(\iff\)

\(x = -1\).

f)

1: Via des bereits bewiesenen e) gilt:

\[(x = -1) \iff (-x = 1)\].

2: Aus 1

folgt:

\[\neg(x = -1) \iff \neg(-x = 1)\].

3: Aus 2

folgt:

\[(x \neq -1) \iff (-x \neq 1)\].

\(\iff\)

Aus VS gleich "\(x = \text{nan}\)"
folgt via 100-9:

\(-x = -\text{nan}\).

2: Aus 1 "\(-x = -\text{nan}\)" und
aus AAVI "\(-\text{nan} = \text{nan}\"
folgt:

\(-x = \text{nan}\).

\(\iff\)

Aus VS gleich "\(-x = \text{nan}\)" und
aus 95-5 "\(\text{nan} Zahl\"
folgt via 100-9:

\(x = -\text{nan}\).

2: Aus 1 "\(x = -\text{nan}\)" und
aus AAVI "\(-\text{nan} = \text{nan}\"
folgt:

\(x = \text{nan}\).

h)

1: Via des bereits bewiesenen g) gilt:

\[(x = \text{nan}) \iff (-x = \text{nan})\].

2: Aus 1

folgt:

\[\neg(x = \text{nan}) \iff \neg(-x = \text{nan})\].

3: Aus 2

folgt:

\[(x \neq \text{nan}) \iff (-x \neq \text{nan})\].
Beweis 100-13 1) \[ \iff \] VS gleich

1: Aus VS gleich \( x = +\infty \)
folgt via 100-9:
\[ -x = -(+\infty). \]

2: Aus 1\( "-x = -(+\infty)" \) und
aus AAVI\( -(+\infty) = -\infty" \)
folgt:
\[ -x = -\infty. \]

i) \[ \iff \] VS gleich

1: Aus VS gleich \( -x = -\infty \)
und
aus 95-5\( "-\infty Zahl" \)
folgt via 100-11:
\[ x = -(+\infty). \]

2: Aus 1\( "x = -(+\infty)" \)
und
aus AAVI\( -(+\infty) = +\infty" \)
folgt:
\[ x = +\infty. \]

j)

1: Via des bereits bewiesenen i) gilt:
\[ (x = +\infty) \iff (-x = -\infty). \]

2: Aus 1
folgt:
\[ (\neg (x = +\infty)) \iff (\neg (-x = -\infty)). \]

3: Aus 2
folgt:
\[ (x \neq +\infty) \iff (-x \neq -\infty). \]

k) \[ \iff \] VS gleich

1: Aus VS gleich \( x = -\infty \)
folgt via 100-9:
\[ -x = -(+\infty). \]

2: Aus 1\( "-x = -(+\infty)" \)
und
aus AAVI\( -(+\infty) = +\infty" \)
folgt:
\[ -x = +\infty. \]

k) \[ \iff \] VS gleich

1: Aus VS gleich \( -x = +\infty" \)
und
aus 95-5\( "+\infty Zahl" \)
folgt via 100-11:
\[ x = -(+\infty). \]

2: Aus 1\( "x = -(+\infty)" \)
und
aus AAVI\( -(+\infty) = -\infty" \)
folgt:
\[ x = -\infty. \]
Beweis 100-13 1)

1: Via des bereits bewiesenen k) gilt: \((x = -\infty) \iff (-x = +\infty)\).

2: Aus 1 folgt: \((\neg(x = -\infty)) \iff (\neg(-x = +\infty))\).

3: Aus 2 folgt: \((x \neq -\infty) \iff (-x \neq +\infty)\).

m) \[\implies\] VS gleich \(x = i\).

Aus VS gleich “\(x = i\)” folgt via 100-9: \(-x = -i\).

m) \[\iff\] VS gleich \(-x = -i\).

Aus VS gleich “\(-x = -i\)” und aus 95-5 “i Zahl” folgt via 100-9: \(x = i\).

n)

1: Via des bereits bewiesenen m) gilt: \((x = i) \iff (-x = -i)\).

2: Aus 1 folgt: \((\neg(x = i)) \iff (\neg(-x = -i))\).

3: Aus 2 folgt: \((x \neq i) \iff (-x \neq -i)\).

o) \[\iff\] VS gleich \(x = -i\).

Aus VS gleich “\(x = -i\)” und aus 95-5 “i Zahl” folgt via 100-11: \(-x = i\).

o) \[\iff\] VS gleich \(-x = i\).

Aus VS gleich “\(-x = i\)” und aus 95-5 “i Zahl” folgt via 100-11: \(x = -i\).
Beweis 100-13 p)

1: Via des bereits bewiesenen o) gilt:  
\[(x = -i) \iff (-x = i).\]

2: Aus 1 folgt:  
\[\neg(x = -i) \iff \neg(-x = i).\]

3: Aus 2 folgt:  
\[(x \neq -i) \iff (-x \neq i).\]
100-14. Gemäß vorliegenden Satzes gelten auch die “Minus-Versionen” für das Rechnen mit \text{nan}:

\begin{center}
\begin{tabular}{|p{1\textwidth}|}
\hline
\textbf{100-14(Satz)} \\
\textit{Es gelte:} \\
\quad \rightarrow p \in \mathbb{T}. \\
\textit{Dann folgt:} \\
\quad a) \text{nan} - p = -\text{nan} + p = -\text{nan} - p = \text{nan}. \\
\quad b) p - \text{nan} = -p + \text{nan} = -p - \text{nan} = \text{nan}. \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}

RECH-Notation.
**Beweis 100-14**

1.1: Aus $\neg \rightarrow \neg p \in T$ folgt via 100-6: 
   \[-p \in T.\]

1.2: Aus $\neg \rightarrow \neg p \in T$ folgt via AAVI: 
   \[\text{nan} + p = p + \text{nan} = \text{nan}.\]

2.1: Aus 1.1 $\neg p \in T$ folgt via AAVI: 
   \[\text{nan} + (-p) = (-p) + \text{nan} = \text{nan}.\]

2.2: Aus 1.2 $\text{nan} + p = p + \text{nan} = \text{nan}$ und 
   aus AAVI $\neg \text{nan} = \text{nan}$
   folgt: 
   \[-\text{nan} + p = p + (-\text{nan}) = \text{nan}.\]

3: Aus 2.1 $\text{nan} + (-p) = (-p) + \text{nan} = \text{nan}$ und 
   aus AAVI $\neg \text{nan} = \text{nan}$
   folgt: 
   \[-\text{nan} + (-p) = (-p) + (-\text{nan}) = \text{nan}.\]

4.1: Aus 2.1 $\text{nan} + (-p) = \ldots = \text{nan}$
   folgt: 
   \[\text{nan} - p = \text{nan}.\]

4.2: Aus 2.2 $-\text{nan} + p = \ldots = \text{nan}$
   folgt: 
   \[-\text{nan} + p = \text{nan}.\]

4.3: Aus 3 $-\text{nan} + (-p) = \ldots = \text{nan}$
   folgt: 
   \[-\text{nan} - p = \text{nan}.\]

4.4: Aus 2.2 $\ldots p + (-\text{nan}) = \text{nan}$
   folgt: 
   \[p - \text{nan} = \text{nan}.\]

4.5: Aus 2.1 $\ldots (-p) + \text{nan} = \text{nan}$
   folgt: 
   \[-p + \text{nan} = \text{nan}.\]

4.6: Aus 3 $\ldots (-p) + (-\text{nan}) = \text{nan}$
   folgt: 
   \[-p - \text{nan} = \text{nan}.\]

5.a): Aus 4.1, 
aus 4.2 und 
aus 4.3
   folgt: 
   \[\text{nan} - p = -\text{nan} + p = -\text{nan} - p = \text{nan}.\]

5.b): Aus 4.4, 
aus 4.5 und 
aus 4.6
   folgt: 
   \[p - \text{nan} = -p + \text{nan} = -p - \text{nan} = \text{nan}.\]

$\Box$
\[ \cup \text{SZ}: \cup \text{Satz Zahlen.} \]
\[ \cap \text{SZ}: \cap \text{Satz Zahlen.} \]
\[ \lor \text{SZ}: \lor \text{Satz Zahlen.} \]
\[ \land \text{SZ}: \land \text{Satz Zahlen.} \]
\[ \subseteq \text{SZ}: \subseteq \text{Satz Zahlen.} \]
\[ \in \text{SZ}: \in \text{Satz Zahlen.} \]
101-1. Wie erwartet gilt $x \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $\text{Re}x, \text{Im}x$ reelle Zahlen sind:

**101-1(Satz)**

*Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:*

i) $x \in \mathbb{C}$.

ii) „$\text{Re}x \in \mathbb{R}$“ und „$\text{Im}x \in \mathbb{R}$“.

____________________________

**REIM-Notation**
Beweis 101-1 \[ \text{i) } \Rightarrow \text{ii) } \]

\[ \text{VS gleich } x \in \mathbb{C}. \]

1: Aus \text{VS gleich } "x \in \mathbb{C}" und
aus "\[ \mathbb{C} = \{ \omega : (\omega \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} \omega \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} \omega \in \mathbb{R}) \} \]\nfolgt:
\[ x \in \{ \omega : (\omega \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} \omega \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} \omega \in \mathbb{R}) \}. \]

2: Aus 1" \[ x \in \{ \omega : (\omega \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} \omega \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} \omega \in \mathbb{R}) \} \]
folgt:
\[ (\text{Re} \omega \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} \omega \in \mathbb{R}). \]

\[ \text{ii) } \Rightarrow \text{i) } \]

\[ \text{VS gleich } (\text{Re} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} x \in \mathbb{R}). \]

1: Aus \text{VS gleich } "\text{Re} x \in \mathbb{R}..." folgt via \textbf{ElementAxiom}:
\[
\text{Re} x \text{ Menge. }
\]

2: Aus 1" \[ \text{Re} x \text{ Menge} \]
folgt via 96-9: \[ x \text{ Zahl. } \]

3.1: Aus 2" \[ x \text{ Zahl} \]
folgt via 95-6: \[ x \text{ Menge. } \]

3.2: Aus 2" \[ x \text{ Zahl} \]
folgt via 95-4(Def): \[ x \in \mathbb{A}. \]

4: Aus 3.2" \[ x \in \mathbb{A}, \]
aus \text{VS gleich } "\text{Re} x \in \mathbb{R}..." und
aus \text{VS gleich } "...\text{Im} x \in \mathbb{R}"
folgt:
\[ (x \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} x \in \mathbb{R}). \]

5: Aus 4" \[ (x \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} x \in \mathbb{R}) \]" und
aus 3.1" \[ x \text{ Menge} \]
folgt:
\[ x \in \{ \omega : (\omega \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} \omega \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} \omega \in \mathbb{R}) \}. \]

6: Aus 5" \[ x \in \{ \omega : (\omega \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} \omega \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} \omega \in \mathbb{R}) \} \]" und
aus " \[ \{ \omega : (\omega \in \mathbb{A}) \land (\text{Re} \omega \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} \omega \in \mathbb{R}) \} = \mathbb{C} \]
folgt:
\[ x \in \mathbb{C}. \]

\[
\Box
\]
101-2. Via Negation folgt aus 101-1 vorliegendes Kriterium für $x \notin \mathbb{C}$:

\textbf{101-2(Satz)}

\textit{Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:}

i) $x \notin \mathbb{C}$.

ii) "Re$x \notin \mathbb{R}$" oder "Im$x \notin \mathbb{R}$".

\begin{center}
\textbf{REIM-Notation}
\end{center}

\textbf{Beweis 101-2}

1: Via 101-1 gilt:

\[ x \in \mathbb{C} \iff ((\text{Re} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} x \in \mathbb{R})). \]

2: Aus 1 folgt:

\[ \neg(x \in \mathbb{C}) \iff \neg((\text{Re} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} x \in \mathbb{R})). \]

3: Aus 2 folgt:

\[ \neg((\text{Re} x \in \mathbb{R})) \vee (\neg(\text{Im} x \in \mathbb{R})). \]

4: Aus 3 folgt:

\[ x \notin \mathbb{C} \iff ((\text{Re} x \notin \mathbb{R}) \lor (\text{Im} x \notin \mathbb{R})). \]

\[\square\]
101-3. Wie erwartet gilt $x \in \mathbb{B}$ genau dann, wenn $\Re x, \Im x$ reelle Zahlen sind:

**101-3(Satz)**

*Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:*

i) $x \in \mathbb{B}$.

ii) “$\Re x \in S$ und $\Im x \in S$”.

---

**REIM-Notation**
Beweis 101-3

VS gleich

1: Aus VS gleich „$x \in \mathbb{B}$“ und
   aus „$\mathbb{B} = \{\omega : (\omega \in A) \land (\text{Re}\omega \in S) \land (\text{Im}\omega \in S)\}$“
   folgt: $x \in \{\omega : (\omega \in A) \land (\text{Re}\omega \in S) \land (\text{Im}\omega \in S)\}$.

2: Aus 1“$x \in \{x : (\omega \in A) \land (\text{Re}\omega \in S) \land (\text{Im}\omega \in S)\}$”
   folgt:
   $(\text{Re}\omega \in S) \land (\text{Im}\omega \in S)$.

VS gleich

(i) ⇒ (ii)

1: Aus VS gleich “$\text{Re}x \in S$...”
   folgt via **ElementAxiom**: $\text{Re}x$ Menge.

2: Aus 1“$\text{Re}x$ Menge”
   folgt via 96-9: $x$ Zahl.

3.1: Aus 2“$x$ Zahl”
   folgt via 95-6: $x$ Menge.

3.2: Aus 2“$x$ Zahl”
   folgt via 95-4(Def): $x \in A$.

4: Aus 3.2“$x \in A$”,
   aus VS gleich “$\text{Re}x \in S$...” und
   aus VS gleich “...$\text{Im}x \in S$”
   folgt:
   $(x \in A) \land (\text{Re}x \in S) \land (\text{Im}x \in S)$.

5: Aus 4“$(x \in A) \land (\text{Re}x \in S) \land (\text{Im}x \in S)$” und
   aus 3.1“$x$ Menge”
   folgt:
   $x \in \{\omega : (\omega \in A) \land (\text{Re}\omega \in S) \land (\text{Im}\omega \in S)\}$.

6: Aus 5“$x \in \{\omega : (\omega \in A) \land (\text{Re}\omega \in S) \land (\text{Im}\omega \in S)\}$” und
   aus “$\{\omega : (\omega \in A) \land (\text{Re}\omega \in S) \land (\text{Im}\omega \in S)\} = \mathbb{B}$”
   folgt:
   $x \in \mathbb{B}$. 

$\square$
101-4. Via Negation folgt aus 101-3 vorliegendes Kriterium für \( x \notin \mathbb{B} \):

\[
\begin{align*}
\textbf{101-4(Satz)} & \quad \text{Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:} \\
\text{i) } x & \notin \mathbb{B}. \\
\text{ii) } "\text{Re} x \notin S \text{ oder Im} x \notin S".
\end{align*}
\]

\textbf{REIM-Notation.}

\textbf{Beweis 101-4}

1: Via 101-3 gilt:
\[
\begin{align*}
x & \in \mathbb{B} \\
\iff (\text{Re} x \in S) \land (\text{Im} x \in S).
\end{align*}
\]

2: Aus 1 folgt:
\[
\begin{align*}
(\neg (x \in \mathbb{B})) & \iff (\neg ((\text{Re} x \in S) \land (\text{Im} x \in S))).
\end{align*}
\]

3: Aus 2 folgt:
\[
\begin{align*}
(\neg (x \in \mathbb{B})) & \iff ((\neg (\text{Re} x \in S)) \lor (\neg (\text{Im} x \in S))).
\end{align*}
\]

4: Aus 3 folgt:
\[
\begin{align*}
x & \notin \mathbb{B} \\
\iff ((\text{Re} x \notin S) \lor (\text{Im} x \notin S)).
\end{align*}
\]

\]
101-5. Es werden nun einige Elemente von $\mathbb{C}$ und einige Klassen, die *kein* Element von $\mathbb{C}$ sind, angegeben. Hier werden auch einige "TeilKlassen- und Ungleichheits-Aussagen" rund um $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist f) - g) - h) - a) - b) - c) - d) - e) - i) - j) - k) - l):

<table>
<thead>
<tr>
<th>101-5(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) $0 \in \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $1 \in \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $\text{nan} \notin \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $+\infty \notin \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>e) $-\infty \notin \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>f) $\infty \notin \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>g) $i \in \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>h) &quot;$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$&quot; und &quot;$\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>i) &quot;$\mathbb{S} \not\subseteq \mathbb{C}$&quot; und &quot;$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{S}$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>j) &quot;$\mathbb{T} \not\subseteq \mathbb{C}$&quot; und &quot;$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{T}$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>k) &quot;$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$&quot; und &quot;$\mathbb{C} \neq \mathbb{B}$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>l) &quot;$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$&quot; und &quot;$\mathbb{C} \neq \mathbb{A}$&quot;.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Beweis 101-5

REIM-Notation.

f)

Aus $\text{AAI}\ "\infty \notin \mathbb{A}"$ und aus $\text{96-6} \ "\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}"$ folgt via $\text{0-4}$: $\infty \notin \mathbb{C}$.
Beweis 101-5 g)

1.1: Aus AAIII "Rei = 0" und aus AAI "0 ∈ ℜ" folgt: Rei ∈ ℜ.

1.2: Aus AAIII "Imi = 1" und aus AAI "1 ∈ ℜ" folgt: Imi ∈ ℜ.

2: Aus 1.1 "Rei ∈ ℜ" und aus 1.2 "Imi ∈ ℜ" folgt via 101-1: i ∈ ℂ.
Beweis 101-5 h)

Thema 1.1

2: Aus Thema 1.1 "\( \alpha \in \mathbb{R} \)"
   folgt via 95-16: \( \alpha \in \mathbb{T} \).

3: Aus 2 "\( \alpha \in \mathbb{T} \)"
   folgt via FST:
   \( (\alpha = \text{Re} \alpha) \land (\text{Im} \alpha = 0) \).

4.1: Aus Thema 1.1 "\( \alpha \in \mathbb{R} \)" und
   aus 3 "\( \alpha = \text{Re} \alpha \ldots \)"
   folgt:
   \( \text{Re} \alpha \in \mathbb{R} \).

4.2: Aus 3 "\ldots \text{Im} \alpha = 0 \)" und
   aus AAI "\( 0 \in \mathbb{R} \)"
   folgt:
   \( \text{Im} \alpha \in \mathbb{R} \).

5: Aus 4.1 "\( \text{Re} \alpha \in \mathbb{R} \)" und
   aus 4.2 "\( \text{Im} \alpha \in \mathbb{R} \)"
   folgt via 101-1:
   \( \alpha \in \mathbb{C} \).

Ergo Thema 1:

\( \forall \alpha: (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{C}) \).

Konsequenz via 0-2(Def):

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt:
   \( i \in \mathbb{C} \).

2: Via AAI gilt:
   \( i \notin \mathbb{R} \).

3: Aus 1.2 "\( i \in \mathbb{C} \)" und
   aus 2 "\( i \notin \mathbb{R} \)"
   folgt via 0-10:
   \( \mathbb{C} \neq \mathbb{R} \).

4: Aus 3
   folgt:
   \( \mathbb{A} \) "\( \mathbb{R} \neq \mathbb{C} \)"

1.3: Aus A1 gleich "\( \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \)" und
   aus A2 gleich "\( \mathbb{R} \neq \mathbb{C} \)"
   folgt:
   \( (\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}) \land (\mathbb{R} \neq \mathbb{C}) \).
**Beweis 101-5 ab)**

1: Via des bereits bewiesenen h) gilt:
\[ \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}. \]

2.a): Aus AAI “0 ∈ \mathbb{R}” und
aus 1 “\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}”
folgt via 0-4:
\[ 0 \in \mathbb{C}. \]

2.b): Aus AAI “1 ∈ \mathbb{R}” und
aus 1 “\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}”
folgt via 0-4:
\[ 1 \in \mathbb{C}. \]

c)

1: Aus 99-15 “Renan = nan” und
aus AAI “nan ∉ \mathbb{R}”
folgt:
\[ \text{Renan} \notin \mathbb{R}. \]

2: Aus 1 “Renan ∉ \mathbb{R}”
folgt via 101-2:
\[ \text{nan} \notin \mathbb{C}. \]

d)

1: Aus 99-15 “Re(+∞) = +∞” und
aus AAI “+∞ ∉ \mathbb{R}”
folgt:
\[ \text{Re}(+∞) \notin \mathbb{R}. \]

2: Aus 1 “Re(+∞) ∉ \mathbb{R}”
folgt via 101-2:
\[ +\infty \notin \mathbb{C}. \]

e)

1: Aus 99-15 “Re(−∞) = −∞” und
aus AAI “−∞ ∉ \mathbb{R}”
folgt:
\[ \text{Re}(−∞) \notin \mathbb{R}. \]

2: Aus 1 “Re(−∞) ∉ \mathbb{R}”
folgt via 101-2:
\[ −\infty \notin \mathbb{C}. \]
Beweis 101-5 i)

1.1: Via des bereits bewiesenen d) gilt: 

\[ +\infty \notin \mathbb{C}. \]

2: Aus 95-11 "\(+\infty \in S\)" und 
aus 1.1 "\(+\infty \notin \mathbb{C}\)"
folgt via 0-5: 

\(A_1\) "\(S \nsubseteq \mathbb{C}\)"

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: 

\[ i \in \mathbb{C}. \]

2: Aus 1.2 "\(i \in \mathbb{C}\)" und 
aus 99-9 "\(i \notin S\)"
folgt via 0-5: 

\(A_2\) "\(C \nsubseteq S\)"

1.3: Aus A1 gleich "\(S \nsubseteq \mathbb{C}\)" und 
aus A2 gleich "\(C \nsubseteq S\)"
folgt:

\((S \nsubseteq \mathbb{C}) \land (C \nsubseteq S)\).

j)

1.1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: 

\[ \text{nan} \notin \mathbb{C}. \]

2: Aus 95-12 "\(\text{nan} \in T\)" und 
aus 1.1 "\(\text{nan} \notin \mathbb{C}\)"
folgt via 0-5: 

\(A_1\) "\(T \nsubseteq \mathbb{C}\)"

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: 

\[ i \in \mathbb{C}. \]

2: Aus 1.2 "\(i \in \mathbb{C}\)" und 
aus 99-9 "\(i \notin T\)"
folgt via 0-5: 

\(A_2\) "\(C \nsubseteq T\)"

1.3: Aus A1 gleich "\(T \nsubseteq \mathbb{C}\)" und 
aus A2 gleich "\(C \nsubseteq T\)"
folgt:

\((T \nsubseteq \mathbb{C}) \land (C \nsubseteq T)\).
Beweis 101-5 k)

\begin{center}
\textbf{Thema 1.1}
\end{center}

\[ \alpha \in \mathbb{C}. \]

2: Aus Thema 1.1 “\( \alpha \in \mathbb{C} \)” folgt via 101-1:

\[ \text{Re} \alpha \in \mathbb{R} \land (\text{Im} \alpha \in \mathbb{R}). \]

3.1: Aus 2 “\( \text{Re} \alpha \in \mathbb{R} \)” folgt via 95-15:

\[ \text{Re} \alpha \in \mathbb{S}. \]

3.2: Aus 2 “\( \text{Im} \alpha \in \mathbb{R} \)” folgt via 95-15:

\[ \text{Im} \alpha \in \mathbb{S}. \]

4: Aus 3.1 “\( \text{Re} \alpha \in \mathbb{S} \)” und aus 3.2 “\( \text{Im} \alpha \in \mathbb{S} \)” folgt via 101-3:

\[ \alpha \in \mathbb{B}. \]

Ergo Thema 1.1:

\[ \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{B}). \]

Konsequenz via 0-2(Def):

1.2: Via des bereits bewiesenen d) gilt:

\[ +\infty \notin \mathbb{C}. \]

2.1: Aus 99-15 “\( \text{Re}(+\infty) = +\infty \)” und aus 95-11 “\( +\infty \in \mathbb{S} \)” folgt:

\[ \text{Re}(+\infty) \in \mathbb{S}. \]

2.2: Aus 99-15 “\( \text{Im}(+\infty) = 0 \)” und aus 95-11 “\( 0 \in \mathbb{S} \)” folgt:

\[ \text{Im}(+\infty) \in \mathbb{S}. \]

3: Aus 2.1 “\( \text{Re}(+\infty) \in \mathbb{S} \)” und aus 2.2 “\( \text{Im}(+\infty) \in \mathbb{S} \)” folgt via 101-3:

\[ +\infty \in \mathbb{B}. \]

4: Aus 3 “\( +\infty \in \mathbb{B} \)” und aus 1.2 “\( +\infty \notin \mathbb{C} \)” folgt via 0-10:

\[ \mathbb{B} \neq \mathbb{C}. \]

5: Aus 4 folgt:

\[ \mathbb{C} \neq \mathbb{B}. \]

6: Aus A1 gleich “\( \mathbb{C} \subseteq \mathbb{B} \)” und aus 5 “\( \mathbb{C} \neq \mathbb{B} \)” folgt:

\[ (\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}) \land (\mathbb{C} \neq \mathbb{B}). \]
Beweis 101-5 1)

1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: \( \text{nan} \notin \mathbb{C} \).

2: Aus AAI “\( \text{nan} \in A \)” und aus 1“\( \text{nan} \notin \mathbb{C} \)” folgt via 0-10: \( A \neq \mathbb{C} \).

3: Aus 2 folgt: \( \mathbb{C} \neq A \).

4: Aus 96-6 “\( \mathbb{C} \subseteq A \)” und aus 3“\( \mathbb{C} \neq A \)” folgt: \( (\mathbb{C} \subseteq A) \land (\mathbb{C} \neq A) \).

\( \square \)
101-6. Nun wird Einiges über komplexe Zahlen und über \( \text{nan}, +\infty, -\infty \) ausgesagt:

\[ 101-6(\text{Satz}) \]

\[ \text{Es gelte:\hspace{1cm}} \]

\[ \rightarrow x \in \mathbb{C}. \]  

\[ \text{Dann folgt:\hspace{1cm}} \]

a) \( x \neq \text{nan}. \)
b) \( x \neq +\infty. \)
c) \( x \neq -\infty. \)
d) \( x \neq -\infty. \)
e) \( \text{Re} x \neq \text{nan}. \)
f) \( \text{Re} x \neq +\infty. \)
g) \( \text{Re} x \neq -\infty. \)
h) \( \text{Re} x \neq -\infty. \)
i) \( \text{Im} x \neq \text{nan}. \)
j) \( \text{Im} x \neq +\infty. \)
k) \( \text{Im} x \neq -\infty. \)
l) \( \text{Im} x \neq -\infty. \)

**REIM-Notation**
Beweis 101-6 abcd)

1: Via 101-5 gilt: \((\text{nan} \notin \mathbb{C}) \land (+\infty \notin \mathbb{C}) \land (-\infty \notin \mathbb{C}) \land (\infty \notin \mathbb{C})\).

2.a): Aus \(\rightarrow\) “\(x \in \mathbb{C}\)” und
aus 1“\(\text{nan} \notin \mathbb{C} . . .\)”
folgt via 0-1: \(x \neq \text{nan}\).

2.b): Aus \(\rightarrow\) “\(x \in \mathbb{C}\)” und
aus 1“\(\ldots + \infty \notin \mathbb{C} . . .\)”
folgt via 0-1: \(x \neq +\infty\).

2.c): Aus \(\rightarrow\) “\(x \in \mathbb{C}\)” und
aus 1“\(\ldots - \infty \notin \mathbb{C} . . .\)”
folgt via 0-1: \(x \neq -\infty\).

2.d): Aus \(\rightarrow\) “\(x \in \mathbb{C}\)” und
aus 1“\(\ldots \infty \notin \mathbb{C}\)”
folgt via 0-1: \(x \neq \infty\).

efgh

1: Aus \(\rightarrow\) “\(x \in \mathbb{C}\)”
folgt via 101-1: \(\Re x \in \mathbb{R}\).

2: Via AAI gilt: \((\text{nan} \notin \mathbb{R}) \land (+\infty \notin \mathbb{R}) \land (-\infty \notin \mathbb{R}) \land (\infty \notin \mathbb{R})\).

3.e): Aus \(\rightarrow\) “\(\Re x \in \mathbb{R}\)” und
aus 2“\(\text{nan} \notin \mathbb{R} . . .\)”
folgt via 0-1: \(\Re x \neq \text{nan}\).

3.f): Aus \(\rightarrow\) “\(\Re x \in \mathbb{R}\)” und
aus 2“\(\ldots + \infty \notin \mathbb{R} . . .\)”
folgt via 0-1: \(\Re x \neq +\infty\).

3.g): Aus \(\rightarrow\) “\(\Re x \in \mathbb{R}\)” und
aus 2“\(\ldots - \infty \notin \mathbb{R} . . .\)”
folgt via 0-1: \(\Re x \neq -\infty\).

3.h): Aus \(\rightarrow\) “\(\Re x \in \mathbb{R}\)” und
aus 2“\(\ldots \infty \notin \mathbb{R}\)”
folgt via 0-1: \(\Re x \neq \infty\).
Beweis 101-6 ijk1)

1: Aus $\rightarrow "x \in \mathbb{C}"$
folgt via 101-1:

$\text{Im} \ x \in \mathbb{R}$.

2: Via AAI gilt:

$(\text{nan} \not\in \mathbb{R}) \land (+\infty \not\in \mathbb{R}) \land (-\infty \not\in \mathbb{R}) \land (\infty \not\in \mathbb{R})$.

3.i): Aus $\rightarrow "\text{Im} \ x \in \mathbb{R}"$ und
aus 2"nan $\not\in \mathbb{R}$..."
folgt via 0-1:

$\text{Im} \ x \neq \text{nan}$.

3.j): Aus $\rightarrow "\text{Im} \ x \in \mathbb{R}"$ und
aus 2"... + $\infty \not\in \mathbb{R}$..."
folgt via 0-1:

$\text{Im} \ x \neq +\infty$.

3.k): Aus $\rightarrow "\text{Im} \ x \in \mathbb{R}"$ und
aus 2"... $-\infty \not\in \mathbb{R}$..."
folgt via 0-1:

$\text{Im} \ x \neq -\infty$.

3.l): Aus $\rightarrow "\text{Im} \ x \in \mathbb{R}"$ und
aus 2"$\ldots \infty \not\in \mathbb{R}$"
folgt via 0-1:

$\text{Im} \ x \neq \infty$.

□
101-7. Es werden nun einige Elemente von \(\mathbb{B}\) und einige Klassen, die \textit{kein} Element von \(\mathbb{B}\) sind, angegeben. Hier werden auch einige “TeilKlassen- und Ungleichheits-Aussagen” rund um \(\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{B}, \mathbb{A}\) bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist f) - c) - g) - h) - i) - a) - b) - d) - e) - j) - k) - l):

<table>
<thead>
<tr>
<th>101-7(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) (0 \in \mathbb{B}).</td>
</tr>
<tr>
<td>b) (1 \in \mathbb{B}).</td>
</tr>
<tr>
<td>c) (\text{nan} \notin \mathbb{B}).</td>
</tr>
<tr>
<td>d) (+\infty \in \mathbb{B}).</td>
</tr>
<tr>
<td>e) (-\infty \in \mathbb{B}).</td>
</tr>
<tr>
<td>f) (\infty \notin \mathbb{B}).</td>
</tr>
<tr>
<td>g) (i \in \mathbb{B}).</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| h) “\(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}\)” und “\(\mathbb{R} \neq \mathbb{B}\)”.
| i) “\(\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}\)” und “\(\mathbb{S} \neq \mathbb{B}\)”.
| j) “\(\mathbb{T} \nsubseteq \mathbb{B}\)” und “\(\mathbb{B} \nsubseteq \mathbb{T}\)”.
| k) “\(\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}\)” und “\(\mathbb{C} \neq \mathbb{B}\)”.
| l) “\(\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}\)” und “\(\mathbb{B} \neq \mathbb{A}\)”.

Beweis 101-7

REIM-Notation.

f)

Aus \(\text{AAI} \ "\infty \notin \mathbb{A}\”\) und
aus \(\text{96-6} \ "\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}\”\)
folgt via \(\text{0-4}:

\[\infty \notin \mathbb{B}\].\]
Beweis 101-7 c)

1: Aus 99-15 “Renan = nan” und
   aus 95-11 “nan ∉ S”
   folgt:
   Renan ∉ S.

2: Aus 1 “Renan ∉ S”
   folgt via 101-4:
   nan ∉ B.

g)
Aus 101-5 “i ∈ C” und
aus 101-5 “C ⊆ B”
folgt via 0-4:
   i ∈ B.

h)
1.1: Aus 101-5 “R ⊆ C” und
     aus 101-5 “C ⊆ B”
     folgt via 0-6:
     R ⊆ B.

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt:

   2: Aus 1.2 “i ∈ B” und
      aus AAI “i ∉ R”
      folgt via 0-10:
      B ≠ R.

3: Aus 2
   folgt:
   R ≠ B.

4: Aus 1.1 “R ⊆ B” und
   aus 3 “R ≠ B”
   folgt:
   (R ⊆ B) ∧ (R ≠ B).
Beweis 101-7 i)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Thema1.1</th>
<th>α ∈ S.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus Thema1.1“α ∈ S” folgt via 95-16:</td>
<td>α ∈ T.</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2“α ∈ T” folgt via FST:</td>
<td>(α = Reα) ∧ (Imα = 0).</td>
</tr>
<tr>
<td>4.1: Aus 3“α = Reα…” und aus Thema1.1“α ∈ S” folgt:</td>
<td>Reα ∈ S.</td>
</tr>
<tr>
<td>4.2: Aus 3“…Imα = 0” und aus 95-11“0 ∈ S” folgt:</td>
<td>Imα ∈ S.</td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 4.1“Reα ∈ S” und aus 4.2“Imα ∈ S” folgt via 101-3:</td>
<td>α ∈ B.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ergo Thema1.1: ∀α : (α ∈ S) ⇒ (α ∈ B).

Konsequenz via 0-2(Def):

| A1 | “S ⊆ B” |

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: i ∈ B.

| 2: Aus 1.2“i ∈ B” und aus 99-9“i ∉ S” folgt via 0-10: | B ≠ S. |
| 3: Aus 2 folgt: | |

| A2 | “S ≠ B” |

1.3: Aus A1 gleich “S ⊆ B” und aus A2 gleich “S ≠ B” folgt: (S ⊆ B) ∧ (S ≠ B).
Beweis 101-7 ab)

1: Via des bereits bewiesenen h) gilt: \( \mathbb{R} \subseteq \mathbb{B} \).

2.a): Aus AA I\(^{\text{h}}\) “0 ∈ \(\mathbb{R}\)” und
aus 1\(^{\text{h}}\) “\(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}\)”
folgt via 0-4:
\( 0 \in \mathbb{B} \).

2.b): Aus AA I\(^{\text{h}}\) “1 ∈ \(\mathbb{R}\)” und
aus 1\(^{\text{h}}\) “\(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{B}\)”
folgt via 0-4:
\( 1 \in \mathbb{B} \).

d e)

1: Via des bereits bewiesenen i) gilt: \( \mathbb{S} \subseteq \mathbb{B} \).

2.d): Aus 95-11\(^{\text{i}}\) “\(+\infty \in \mathbb{S}\)” und
aus 1\(^{\text{i}}\) “\(\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}\)”
folgt via 0-4:
\( +\infty \in \mathbb{B} \).

2.e): Aus 95-11\(^{\text{i}}\) “\(-\infty \in \mathbb{S}\)” und
aus 1\(^{\text{i}}\) “\(\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B}\)”
folgt via 0-4:
\( -\infty \in \mathbb{B} \).

j)

1.1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: \( \text{nan} \notin \mathbb{B} \).

2: Aus 95-12\(^{\text{c}}\) “\(\text{nan} \in \mathbb{T}\)” und
aus 1.1\(^{\text{c}}\) “\(\text{nan} \notin \mathbb{B}\)”
folgt via 0-5:
\( \text{A1} \quad \text{“} \mathbb{T} \notin \mathbb{B} \text{”} \)

1.2: Via des bereits bewiesenen g) gilt: \( i \in \mathbb{B} \).

2: Aus 1.2\(^{\text{g}}\) “\(i \in \mathbb{B}\)” und
aus 99-9\(^{\text{g}}\) “\(i \notin \mathbb{T}\)”
folgt via 0-5:
\( \text{A2} \quad \text{“} \mathbb{B} \notin \mathbb{T} \text{”} \)

1.3: Aus A1 gleich “\(\mathbb{T} \notin \mathbb{B}\)” und
aus A2 gleich “\(\mathbb{B} \notin \mathbb{T}\)”
folgt:
\[ (\mathbb{T} \notin \mathbb{B}) \land (\mathbb{B} \notin \mathbb{T}). \]
Beweis 101-7

k)

Via 101-5 gilt: 

\[(\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}) \land (\mathcal{C} \neq \mathcal{B})].\]

1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: \(\text{nan} \notin \mathcal{B}\).

2: Aus AAI"\text{nan} \in \mathcal{A}" und aus 1"\text{nan} \notin \mathcal{B}" folgt via 0-10: \(\mathcal{A} \neq \mathcal{B}\).

3: Aus 2 folgt: \(\mathcal{B} \neq \mathcal{A}\).

4: Aus 96-6"\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\" und aus 3"\mathcal{B} \neq \mathcal{A}\" folgt: 

\[(\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}) \land (\mathcal{B} \neq \mathcal{A})].\]
101-8. Nun wird Einiges über komplexe Zahlen und über $\text{nan}, +\infty, -\infty$ ausgesagt:

101-8(Satz)

*Es gelte:*

$\rightarrow$ \( x \in \mathbb{B} \).

*Dann folgt:*

a) \( x \neq \text{nan} \).

b) \( x \neq \infty \).

c) \( \text{Re} \, x \neq \text{nan} \).

d) \( \text{Re} \, x \neq \infty \).

e) \( \text{Im} \, x \neq \text{nan} \).

f) \( \text{Im} \, x \neq -\infty \).
Beweis 101-8 ab)

1: Via 101-7 gilt:
\[(\text{nan} \notin \mathbb{B}) \land (\infty \notin \mathbb{B}).\]

2.a): Aus $\rightarrow "x \in \mathbb{B}"$ und
aus 1"nan $\notin \mathbb{B} . . .""
folgt via 0-1: $x \neq \text{nan}$. 

2.b): Aus $\rightarrow "x \in \mathbb{B}"$ und
aus 1"...\infty $\notin \mathbb{B} . . .""
folgt via 0-1: $x \neq \infty$.

cd)

1: Via 95-11 gilt:
\[(\text{nan} \notin \mathbb{S}) \land (\infty \notin \mathbb{S}).\]

2: Aus $\rightarrow "x \in \mathbb{B}"$
folgt via 101-3: $\Re x \in \mathbb{S}$.

3.c): Aus 2"$\Re x \in \mathbb{S}$" und
aus 1"nan $\notin \mathbb{S} . . .""
folgt via 0-1: $\Re x \neq \text{nan}$.

3.d): Aus 2"$\Re x \in \mathbb{S}$" und
aus 1"...\infty $\notin \mathbb{S} . . .""
folgt via 0-1: $\Re x \neq \infty$.

ef)

1: Via 95-11 gilt:
\[(\text{nan} \notin \mathbb{S}) \land (\infty \notin \mathbb{S}).\]

2: Aus $\rightarrow "x \in \mathbb{B}"$
folgt via 101-3: $\Im x \in \mathbb{S}$.

3.c): Aus 2"$\Im x \in \mathbb{S}$" und
aus 1"nan $\notin \mathbb{S} . . .""
folgt via 0-1: $\Im x \neq \text{nan}$.

3.d): Aus 2"$\Im x \in \mathbb{S}$" und
aus 1"...\infty $\notin \mathbb{S} . . .""
folgt via 0-1: $\Im x \neq \infty$.

$\square$
101-9. Es gilt $p \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $-p \in \mathbb{C}$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-(-p) \in \mathbb{C}$. Analoges gilt für $\mathbb{B}$ an Stelle von $\mathbb{C}$:

**101-9(Satz)**

a) $(p \in \mathbb{C}) \iff (-p \in \mathbb{C}) \iff (-(-p) \in \mathbb{C})$.

b) $(p \in \mathbb{B}) \iff (-p \in \mathbb{B}) \iff (-(-p) \in \mathbb{B})$.

---

**RECH-Notation**

Beweis 101-9

---

**REIM.-Notation**

a) [i) $\Rightarrow$ ii)] VS gleich

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{C}$" folgt via 101-1: $(\text{Re} p \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} p \in \mathbb{R})$.

2.1: Aus 1 "$\text{Re} p \in \mathbb{R}$ ..." folgt via 100-6: $-\text{Re} p \in \mathbb{R}$.

2.2: Aus 1 "...$\text{Im} p \in \mathbb{R}$" folgt via 100-6: $-\text{Im} p \in \mathbb{R}$.

3: Via 96-27 gilt: $(\text{Re}(-p) = -\text{Re} p) \land (\text{Im}(-p) = -\text{Im} p)$.

4.1: Aus 3 "$\text{Re}(-p) = -\text{Re} p$..." und aus 2.1 "$-\text{Re} p \in \mathbb{R}$" folgt: $\text{Re}(-p) \in \mathbb{R}$.

4.2: Aus 3 "...$\text{Im}(-p) = -\text{Im} p$" und aus 2.2 "$-\text{Im} p \in \mathbb{R}$" folgt: $\text{Im}(-p) \in \mathbb{R}$.

5: Aus 4.1 "$\text{Re}(-p) \in \mathbb{R}$" und aus 4.2 "$\text{Im}(-p) \in \mathbb{R}$" folgt via 101-1: $-p \in \mathbb{C}$.
Beweis 101-9 a) \[ \text{ii)} \Rightarrow \text{iii)} \] VS gleich

1: Aus VS gleich “\(-p \in \mathbb{C}\)” folgt via 101-1:
\[ (\text{Re}(-p) \in \mathbb{R}) \land (\text{Im}(-p) \in \mathbb{R}). \]

2.1: Aus 1 “\(\text{Re}(-p) \in \mathbb{R}\)” folgt via 100-6:
\[ -\text{Re}(-p) \in \mathbb{R}. \]

2.2: Aus 1 “\(\ldots\) \(\text{Im}(-p) \in \mathbb{R}\)” folgt via 100-6:
\[ -\text{Im}(-p) \in \mathbb{R}. \]

3: Via 96-27 gilt:
\[ (\text{Re}(-(-p)) = -\text{Re}(-p)) \land (\text{Im}(-(-p)) = -\text{Im}(-p)). \]

4.1: Aus 3 “\(\text{Re}(-(-p)) = -\text{Re}(-p)\)” und aus 2.1 “\(-\text{Re}(-p) \in \mathbb{R}\)” folgt:
\[ \text{Re}(-(-p)) \in \mathbb{R}. \]

4.2: Aus 3 “\(\ldots\) \(\text{Im}(-(-p)) = -\text{Im}(-p)\)” und aus 2.2 “\(-\text{Im}(-p) \in \mathbb{R}\)” folgt:
\[ \text{Im}(-(-p)) \in \mathbb{R}. \]

5: Aus 4.1 “\(\text{Re}(-(-p)) \in \mathbb{R}\)” und aus 4.2 “\(\text{Im}(-(-p)) \in \mathbb{R}\)” folgt via 101-1:
\[ -(-p) \in \mathbb{C}. \]

a) \[ \text{iii)} \Rightarrow \text{i)} \] VS gleich

1: Aus VS gleich “\(-p \in \mathbb{C}\)” folgt via 99-1:
\[ -(-p) \text{ Zahl}. \]

2: Aus 1 “\(-(-p) \text{ Zahl}\)” folgt via 100-6:
\[ p \text{ Zahl}. \]

3: Aus 2 “\(p \text{ Zahl}\)” folgt via FS—:
\[ -(-p) = p. \]

4: Aus VS gleich “\(-(-p) \in \mathbb{C}\)” und aus 3 “\(-(-p) = p\)” folgt:
\[ p \in \mathbb{C}. \]
Beweis 101-9 b) \((i) \Rightarrow (ii)\) VS gleich

1: Aus VS gleich “\(p \in \mathbb{B}\)”
   folgt via 101-3: 
   \((\Re p \in \mathbb{S}) \wedge (\Im p \in \mathbb{S})\).

2.1: Aus 1 “\(\Re p \in \mathbb{S}\)...”
   folgt via 100-6: 
   \(-\Re p \in \mathbb{S}\).

2.2: Aus 1 “...\(\Im p \in \mathbb{S}\)”
   folgt via 100-6: 
   \(-\Im p \in \mathbb{S}\).

3: Via 96-27 gilt: 
   \((\Re(-p) = -\Re p) \wedge (\Im(-p) = -\Im p)\).

4.1: Aus 3 “\(\Re(-p) = -\Re p\)...” und
   aus 2.1 “\(-\Re p \in \mathbb{S}\)”
   folgt: 
   \(\Re(-p) \in \mathbb{S}\).

4.2: Aus 3 “...\(\Im(-p) = -\Im p\)” und
   aus 2.2 “\(-\Im p \in \mathbb{S}\)”
   folgt: 
   \(\Im(-p) \in \mathbb{S}\).

5: Aus 4.1 “\(\Re(-p) \in \mathbb{S}\)” und
   aus 4.2 “\(\Im(-p) \in \mathbb{S}\)”
   folgt via 101-3: 
   \(-p \in \mathbb{B}\).
Beweis 101-9 b) $\begin{bmatrix} \text{iii} \Rightarrow \text{iii} \end{bmatrix}$ VS gleich $-p \in \mathbb{B}$

1: Aus VS gleich “$-p \in \mathbb{B}$”
folgt via 101-3: $(\text{Re}(-p) \in \mathbb{S}) \land (\text{Im}(-p) \in \mathbb{S})$.

2.1: Aus 1 “$\text{Re}(-p) \in \mathbb{S}$…”
folgt via 100-6: $-\text{Re}(-p) \in \mathbb{S}$.

2.2: Aus 1 “…$\text{Im}(-p) \in \mathbb{S}$”
folgt via 100-6: $-\text{Im}(-p) \in \mathbb{S}$.

3: Via 96-27 gilt: $(\text{Re}(-(-p)) = -\text{Re}(-p)) \land (\text{Im}(-(-p)) = -\text{Im}(-p))$.

4.1: Aus 3 “$\text{Re}(-(-p)) = -\text{Re}(-p)$…” und
aus 2.1 “$-\text{Re}(-p) \in \mathbb{S}$”
folgt: $\text{Re}(-(-p)) \in \mathbb{S}$.

4.2: Aus 3 “…$\text{Im}(-(-p)) = -\text{Im}(-p)$” und
aus 2.2 “$-\text{Im}(-p) \in \mathbb{S}$”
folgt: $\text{Im}(-(-p)) \in \mathbb{S}$.

5: Aus 4.1 “$\text{Re}(-(-p)) \in \mathbb{S}$” und
aus 4.2 “$\text{Im}(-(-p)) \in \mathbb{S}$”
folgt via 101-3: $-(-p) \in \mathbb{B}$.

b) $\begin{bmatrix} \text{iii} \Rightarrow \text{i} \end{bmatrix}$ VS gleich $-(-p) \in \mathbb{B}$

1: Aus VS gleich “$-(-p) \in \mathbb{B}$”
folgt via 99-1: $-(-p)$ Zahl.

2: Aus 1 “$-(-p)$ Zahl”
folgt via 100-6: $p$ Zahl.

3: Aus 2 “$p$ Zahl”
folgt via FS — —:

4: Aus VS gleich “$-(-p) \in \mathbb{B}$” und
aus 3 “$-(-p) = p$”
folgt:

$p \in \mathbb{B}$.

□
101-10. Im ÜSatz Zahlen werden die binären Vereinigungen von \(R, S, T, C, B, A\) beschrieben:

**101-10(Satz) (ÜSZ: ÜSatz Zahlen)**

a) \(R \cup S = S\).

b) \(R \cup T = T\).

c) \(R \cup C = C\).

d) \(R \cup B = B\).

e) \(R \cup A = A\).

f) \(S \cup T = T\).

g) \(S \cup C = S \cup C\).

h) \(S \cup B = B\).

i) \(S \cup A = A\).

j) \(T \cup C = T \cup C\).

k) \(T \cup B = T \cup B\).

l) \(T \cup A = A\).

m) \(C \cup B = B\).

n) \(C \cup A = A\).

o) \(B \cup A = A\).

**Beweis 101-10 a)**

Aus 95-11 “\(R \subseteq S\)” folgt via 2-10:

\[ R \cup S = S. \]

b) Aus 95-12 “\(R \subseteq T\)” folgt via 2-10:

\[ R \cup T = T. \]

c) Aus 101-5 “\(R \subseteq C\)” folgt via 2-10:

\[ R \cup C = C. \]
Beweis 101-10 d)
Aus 101-7 "R ⊆ B"
folgt via 2-10:
\[ R \cup B = B. \]
e)
Aus AAI "R ⊆ A"
folgt via 2-10:
\[ R \cup A = A. \]
f)
Aus 95-12 "S ⊆ T"
folgt via 2-10:
\[ S \cup T = T. \]
g) Es gilt:
\[ S \cup C = S \cup C. \]
h) Aus 101-7 "S ⊆ B"
folgt via 2-10:
\[ S \cup B = B. \]
i) Aus 95-11 "S ⊆ A"
folgt via 2-10:
\[ S \cup A = A. \]
j) Es gilt:
\[ T \cup C = T \cup C. \]
k) Es gilt:
\[ T \cup B = T \cup B. \]
l) Aus 95-12 "T ⊆ A"
folgt via 2-10:
\[ T \cup A = A. \]
m) Aus 101-5 "C ⊆ B"
folgt via 2-10:
\[ C \cup B = B. \]
n) Aus 96-6 "C ⊆ A"
folgt via 2-10:
\[ C \cup A = A. \]
Beweis 101-10 o)

Aus 96-6 “$B \subseteq A$“ folgt via 2-10: $B \cup A = A$. □
101-11. Im $\cap$-Satz Zahlen werden die binären Durchschnitte von $R, S, T, C, B, A$ beschrieben:

<table>
<thead>
<tr>
<th>101-11(Satz) ($\cap$SZ: $\cap$Satz Zahlen)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) $R \cap S = R.$</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $R \cap T = R.$</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $R \cap C = R.$</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $R \cap B = R.$</td>
</tr>
<tr>
<td>e) $R \cap A = R.$</td>
</tr>
<tr>
<td>f) $S \cap T = S.$</td>
</tr>
<tr>
<td>g) $S \cap C = R.$</td>
</tr>
<tr>
<td>h) $S \cap B = S.$</td>
</tr>
<tr>
<td>i) $S \cap A = S.$</td>
</tr>
<tr>
<td>j) $T \cap C = R.$</td>
</tr>
<tr>
<td>k) $T \cap B = S.$</td>
</tr>
<tr>
<td>l) $T \cap A = T.$</td>
</tr>
<tr>
<td>m) $C \cap B = C.$</td>
</tr>
<tr>
<td>n) $C \cap A = C.$</td>
</tr>
<tr>
<td>o) $B \cap A = B.$</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Beweis 101-11

REIM-Notation.

a) Aus 95-11 "R ⊆ S" folgt via 2-10: \( R \cap S = R \).

b) Aus 95-12 "R ⊆ T" folgt via 2-10: \( R \cap T = R \).

c) Aus 101-5 "R ⊆ C" folgt via 2-10: \( R \cap C = R \).

d) Aus 101-7 "R ⊆ B" folgt via 2-10: \( R \cap B = R \).

e) Aus AAI "R ⊆ A" folgt via 2-10: \( R \cap A = R \).

f) Aus 95-12 "S ⊆ T" folgt via 2-10: \( S \cap T = S \).
Beweis 101-11 g)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Thema 1.1</th>
<th>( \alpha \in S \cap C ).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2:</td>
<td>Aus Thema 1.1 &quot;( \alpha \in S \cap C )&quot; folgt via 2-2: ((\alpha \in S) \land (\alpha \in C)).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.1:</td>
<td>Aus 2 &quot;( \alpha \in S \ldots )&quot; und aus 95-12 &quot;( S \subseteq T )&quot; folgt via 0-4: ( \alpha \in T ).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2:</td>
<td>Aus 2 &quot;\ldots \alpha \in C )&quot; folgt via 101-1: ( \text{Re} \alpha \in \mathbb{R} ).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>Aus 3.1 &quot;( \alpha \in T )&quot; folgt via FST: ( \alpha = \text{Re} \alpha ).</td>
</tr>
<tr>
<td>5:</td>
<td>Aus 4 &quot;( \alpha = \text{Re} \alpha )&quot; und aus 3.2 &quot;( \text{Re} \alpha \in \mathbb{R} )&quot; folgt: ( \alpha \in \mathbb{R} ).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ergo Thema 1.1: \( \forall \alpha : (\alpha \in S \cap C) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{R}) \).

Konsequenz via 0-2(Def):

<table>
<thead>
<tr>
<th>A1</th>
<th>&quot;( S \cap C \subseteq \mathbb{R} )&quot;</th>
</tr>
</thead>
</table>

1.2: Aus 95-11 "\( \mathbb{R} \subseteq S \)" und aus 101-5 "\( \mathbb{R} \subseteq C \)" folgt via 2-12: \( \mathbb{R} \subseteq S \cap C \).

2: Aus A1 gleich "\( S \cap C \subseteq \mathbb{R} \)" und aus 1.2 "\( \mathbb{R} \subseteq S \cap C \)" folgt via GleichheitsAxiom: \( S \cap C = \mathbb{R} \).

h)
Aus 101-7 "\( S \subseteq B \)" folgt via 2-10: \( S \cap B = S \).

i)
Aus 95-11 "\( S \subseteq A \)" folgt via 2-10: \( S \cap A = S \).
Beweis 101-11 j)

\textbf{Theorem 1.1} \quad \alpha \in T \cap C.

2: Aus Theorem 1.1 "\(\alpha \in T \cap C\)" folgt via 2-2: \(\alpha \in T \land \alpha \in C\).

3.1: Aus 2 "\(\alpha \in T \ldots\)" folgt via FST: \(\alpha = \text{Re}\alpha\).

3.2: Aus 2 "\(\ldots \alpha \in C\)" folgt via 101-1: \(\text{Re}\alpha \in \mathbb{R}\).

4: Aus 3.1 "\(\alpha = \text{Re}\alpha\)" und aus 3.2 "\(\text{Re}\alpha \in \mathbb{R}\)" folgt: \(\alpha \in \mathbb{R}\).

Ergo Theorem 1.1: \(\forall \alpha : (\alpha \in T \cap C) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{R})\).

Konsequenz via 0-2(Def):

1.2: Aus 95-12 "\(\mathbb{R} \subseteq T\)" und aus 101-5 "\(\mathbb{R} \subseteq C\)" folgt via 2-12: \(\mathbb{R} \subseteq T \cap C\).

2: Aus A1 gleich "\(T \cap C \subseteq \mathbb{R}\)" und aus 1.2 "\(\mathbb{R} \subseteq T \cap C\)" folgt via GleichheitsAxiom: \(T \cap C = \mathbb{R}\).
Beweis 101-11 k)

\[\text{α} \in T \cap B.\]

2: Aus Thema1.1 “α ∈ T ∩ B” folgt via 2-2: \((α ∈ T) ∧ (α ∈ B)\).

3.1: Aus 2 “α ∈ T...” folgt via FST:\[α = Reα.\]

3.2: Aus 2 “...α ∈ B” folgt via 101-3:\[Reα ∈ S.\]

4: Aus 3.1 “α = Reα” und aus 3.2 “Reα ∈ S” folgt:\[α ∈ S.\]

Ergo Thema1.1: \[∀ \alpha : (\alpha ∈ T \cap B) → (\alpha ∈ S).\]

Konsequenz via 0-2(Def):

\[\text{A1} | \text{"} T \cap B \subseteq S \text{"}\]

1.2: Aus 95-12 “S ⊆ T” und aus 101-7 “S ⊆ B” folgt via 2-12:\[S ⊆ T \cap B.\]

2: Aus A1 gleich “T ∩ B ⊆ S” und aus 1.2 “S ⊆ T ∩ B” folgt via GleichheitsAxiom:\[T \cap B = S.\]

1)

Aus 95-12 “T ⊆ A” folgt via 2-10:\[T \cap A = T.\]

m)

Aus 101-5 “C ⊆ B” folgt via 2-10:\[C \cap B = C.\]

n)

Aus 96-6 “C ⊆ A” folgt via 2-10:\[C \cap A = C.\]
Beweis 101-11 o)
Aus 96-6 "B ⊆ A" folgt via 2-10: \[ B \cap A = B. \] □
101-12. Im \( \forall \text{Satz Zahlen} \) werden die im \( \cup \text{SZ} \) getroffenen Aussagen über die binären Vereinigungen von \( R, S, T, C, B, A \) in “oder-Aussagen” übersetzt:

\[
\begin{align*}
\text{101-12(Satz) } (\forall \text{SZ: } \forall \text{Satz Zahlen}) \\
a) \quad &“(p \in R) \lor (p \in S)” \text{ genau dann, wenn “} p \in S \”.
\hline
b) \quad &“(p \in R) \lor (p \in T)” \text{ genau dann, wenn “} p \in T \”.
\hline
c) \quad &“(p \in R) \lor (p \in C)” \text{ genau dann, wenn “} p \in C \”.
\hline
d) \quad &“(p \in R) \lor (p \in B)” \text{ genau dann, wenn “} p \in B \”.
\hline
e) \quad &“(p \in R) \lor (p \text{ Zahl})” \text{ genau dann, wenn “} p \text{ Zahl} \”.
\hline
f) \quad &“(p \in S) \lor (p \in T)” \text{ genau dann, wenn “} p \in T \”.
\hline
g) \quad &“(p \in S) \lor (p \in C)” \text{ genau dann, wenn “} (p \in S) \lor (p \in C) \”.
\hline
h) \quad &“(p \in S) \lor (p \in B)” \text{ genau dann, wenn “} p \in B \”.
\hline
i) \quad &“(p \in S) \lor (p \text{ Zahl})” \text{ genau dann, wenn “} p \text{ Zahl} \”.
\hline
j) \quad &“(p \in T) \lor (p \in C)” \text{ genau dann, wenn “} (p \in T) \lor (p \in C) \”.
\hline
k) \quad &“(p \in T) \lor (p \in B)” \text{ genau dann, wenn “} (p \in T) \lor (p \in B) \”.
\hline
l) \quad &“(p \in T) \lor (p \text{ Zahl})” \text{ genau dann, wenn “} p \text{ Zahl} \”.
\hline
m) \quad &“(p \in C) \lor (p \in B)” \text{ genau dann, wenn “} p \in B \”.
\hline
n) \quad &“(p \in C) \lor (p \text{ Zahl})” \text{ genau dann, wenn “} p \text{ Zahl} \”.
\hline
o) \quad &“(p \in B) \lor (p \text{ Zahl})” \text{ genau dann, wenn “} p \text{ Zahl} \”.
\end{align*}
\]

Beweis 101-12 a)

1: Via 2-2 gilt: 

\[
(p \in R \cup S) \iff ((p \in R) \lor (p \in S)).
\]

2: Aus 1 und aus 101-10 “\( R \cup S = S \)” folgt: 

\[
(p \in S) \iff ((p \in R) \lor (p \in S)).
\]

3: Aus 2 folgt: 

\[
((p \in R) \lor (p \in S)) \iff (p \in S).
\]
Beweis 101-12 b)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{T})).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 “\(\mathbb{R} \cup \mathbb{T} = \mathbb{T}\)” 

folgt: 

\[(p \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{T})).\]

3: Aus 2 

folgt: 

\[((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{T})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{T}).\]

c)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{C})).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 “\(\mathbb{R} \cup \mathbb{C} = \mathbb{C}\)” 

folgt: 

\[(p \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{C})).\]

3: Aus 2 

folgt: 

\[((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{C})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{C}).\]

d)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{B})).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 “\(\mathbb{R} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}\)” 

folgt: 

\[(p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{B})).\]

3: Aus 2 

folgt: 

\[((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{B})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{B}).\]

e)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in \mathbb{R} \cup \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{A})).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 “\(\mathbb{R} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}\)” 

folgt: 

\[(p \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{A})).\]

3: Aus 2 

folgt: 

\[((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A}).\]

4: Via 95-4(Def) gilt: 

\[(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A}).\]

5: Aus 3 “\(((p \in \mathbb{R}) \lor (p \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})\)” und 

aus 4 “\((p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{A})\)” 

folgt: 

\[((p \in \mathbb{R}) \lor (p \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (p \text{ Zahl}).\]
Beweis 101-12 f) 

1: Via 2-2 gilt: 
$$(p \in S \cup T) \iff ((p \in S) \lor (p \in T)).$$

2: Aus 1 und 
aus 101-10$"S \cup T = T" 
folgt: 
$$(p \in T) \iff ((p \in S) \lor (p \in T)).$$

3: Aus 2 
folgt: 
$$((p \in S) \lor (p \in T)) \iff (p \in T).$$

g) Es gilt: 
$$((p \in S) \lor (p \in C)) \iff ((p \in S) \lor (p \in C)).$$

h) 

1: Via 2-2 gilt: 
$$(p \in S \cup B) \iff ((p \in S) \lor (p \in B)).$$

2: Aus 1 und 
aus 101-10$"S \cup B = B" 
folgt: 
$$(p \in B) \iff ((p \in S) \lor (p \in B)).$$

3: Aus 2 
folgt: 
$$((p \in S) \lor (p \in B)) \iff (p \in B).$$

i) 

1: Via 2-2 gilt: 
$$(p \in S \cup A) \iff ((p \in S) \lor (p \in A)).$$

2: Aus 1 und 
aus 101-10$"S \cup A = A" 
folgt: 
$$(p \in A) \iff ((p \in S) \lor (p \in A)).$$

3: Aus 2 
folgt: 
$$((p \in S) \lor (p \in A)) \iff (p \in A).$$

4: Via 95-4(Def) gilt: 
$$(p \text{ Zahl}) \iff (p \in A).$$

5: Aus 3$"((p \in S) \lor (p \in A)) \iff (p \in A)" und 
aus 4$"(p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)" 
folgt: 
$$((p \in S) \lor (p \text{ Zahl})) \iff (p \text{ Zahl}).$$

j) Es gilt: 
$$((p \in T) \lor (p \in C)) \iff ((p \in T) \lor (p \in C)).$$

k) Es gilt: 
$$((p \in T) \lor (p \in B)) \iff ((p \in T) \lor (p \in B)).$$
Beweis 101-12 1)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in T \cup A) \iff ((p \in T) \lor (p \in A)).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 \(T \cup A = A\) 

folgt: 

\[(p \in A) \iff ((p \in T) \lor (p \in A)).\]

3: Aus 2 

folgt: 

\[((p \in T) \lor (p \in A)) \iff (p \in A).\]

4: Via 95-4(Def) gilt: 

\[(p \text{ Zahl}) \iff (p \in A).\]

5: Aus 3 \(\((p \in T) \lor (p \in A)) \iff (p \in A)\) ” und 

aus 4 \(\((p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)\) ” 

folgt: 

\[((p \in T) \lor (p \text{ Zahl})) \iff (p \text{ Zahl}).\]

m)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in C \cup B) \iff ((p \in C) \lor (p \in B)).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 \(C \cup B = B\) 

folgt: 

\[(p \in B) \iff ((p \in C) \lor (p \in B)).\]

3: Aus 2 

folgt: 

\[((p \in C) \lor (p \in B)) \iff (p \in B).\]

n)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in C \cup A) \iff ((p \in C) \lor (p \in A)).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 \(C \cup A = A\) 

folgt: 

\[(p \in A) \iff ((p \in C) \lor (p \in A)).\]

3: Aus 2 

folgt: 

\[((p \in C) \lor (p \in A)) \iff (p \in A).\]

4: Via 95-4(Def) gilt: 

\[(p \text{ Zahl}) \iff (p \in A).\]

5: Aus 3 \(\((p \in C) \lor (p \in A)) \iff (p \in A)\) ” und 

aus 4 \(\((p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)\) ” 

folgt: 

\[((p \in C) \lor (p \text{ Zahl})) \iff (p \text{ Zahl}).\]
Beweis 101-12 o)

1: Via 2-2 gilt: 

\[(p \in \mathbb{B} \cup \mathbb{A}) \iff ((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A})).\]

2: Aus 1 und 

aus 101-10 \(\mathbb{B} \cup \mathbb{A} = \mathbb{A}\)

folgt: 

\[(p \in \mathbb{A}) \iff ((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A})).\]

3: Aus 2

folgt: 

\[((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A})) \iff (p \in \mathbb{A}).\]

4: Via 95-4(Def) gilt:

\[(p \text{ Zahl}) \iff (p \in \mathbb{A}).\]

5: Aus 3 \("((p \in \mathbb{B}) \vee (p \in \mathbb{A})) \iff (p \in \mathbb{A})\)" und 

aus 4 \"(p \text{ Zahl}) \iff (p \in \mathbb{A})\)" 

folgt: 

\[((p \in \mathbb{B}) \vee (p \text{ Zahl})) \iff (p \text{ Zahl}).\]
101-13. Im \(\&\)Satz Zahlen werden die im \(\cap\)SZ getroffenen Aussagen über die binären Durchschnitte von \(\mathbb{R}, S, T, C, B, A\) in "und-Aussagen" übersetzt:

<table>
<thead>
<tr>
<th>101-13(Satz) ((&amp;)SZ: (&amp;)Satz Zahlen)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) &quot;((p \in \mathbb{R}) \land (p \in S))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>b) &quot;((p \in \mathbb{R}) \land (p \in T))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>c) &quot;((p \in \mathbb{R}) \land (p \in C))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>d) &quot;((p \in \mathbb{R}) \land (p \in B))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>e) &quot;((p \in \mathbb{R}) \land (\text{p Zahl}))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>f) &quot;((p \in S) \land (p \in T))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in S).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>g) &quot;((p \in S) \land (p \in C))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>h) &quot;((p \in S) \land (p \in B))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in S).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>i) &quot;((p \in S) \land (\text{p Zahl}))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in S).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>j) &quot;((p \in T) \land (p \in C))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>k) &quot;((p \in T) \land (p \in B))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in S).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>l) &quot;((p \in T) \land (\text{p Zahl}))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in T).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>m) &quot;((p \in C) \land (p \in B))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in C).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>n) &quot;((p \in C) \land (\text{p Zahl}))&quot; genau dann, wenn &quot;(p \in C).&quot;</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| o) "\((p \in B) \land (\text{p Zahl})\)" genau dann, wenn "\(p \in B\)."

Beweis 101-13 a)

1: Via 2-2 gilt: \((p \in \mathbb{R} \cap S) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in S)).\)

2: Aus 1 und aus 101-12 "\(\mathbb{R} \cap S = \mathbb{R}\)" folgt: \((p \in \mathbb{R}) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in S)).\)

3: Aus 2 folgt: \(((p \in \mathbb{R}) \land (p \in S)) \iff (p \in \mathbb{R}).\)
Beweis 101-13 b)

1: Via 2-2 gilt: \( (p \in \mathbb{R} \cap T) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in T)) \).

2: Aus 1 und
aus 101-12 "\( \mathbb{R} \cap T = \mathbb{R} \)"
folgt:
\( (p \in \mathbb{R}) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in T)) \).

3: Aus 2
folgt:
\( ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in T)) \iff (p \in \mathbb{R}) \).

c)

1: Via 2-2 gilt:
\( (p \in \mathbb{R} \cap C) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in C)) \).

2: Aus 1 und
aus 101-12 "\( \mathbb{R} \cap C = \mathbb{R} \)"
folgt:
\( (p \in \mathbb{R}) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in C)) \).

3: Aus 2
folgt:
\( ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in C)) \iff (p \in \mathbb{R}) \).

d)

1: Via 2-2 gilt:
\( (p \in \mathbb{R} \cap B) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in B)) \).

2: Aus 1 und
aus 101-12 "\( \mathbb{R} \cap B = \mathbb{R} \)"
folgt:
\( (p \in \mathbb{R}) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in B)) \).

3: Aus 2
folgt:
\( ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in B)) \iff (p \in \mathbb{R}) \).

e)

1: Via 2-2 gilt:
\( (p \in \mathbb{R} \cap A) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in A)) \).

2: Aus 1 und
aus 101-12 "\( \mathbb{R} \cap A = \mathbb{R} \)"
folgt:
\( (p \in \mathbb{R}) \iff ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in A)) \).

3: Aus 2
folgt:
\( ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in A)) \iff (p \in \mathbb{R}) \).

4: Via 95-4(Def) gilt:
\( (p \text{ Zahl}) \iff (p \in A) \).

5: Aus 3 "\( ((p \in \mathbb{R}) \land (p \in A)) \iff (p \in \mathbb{R}) \)" und
aus 4 "\( (p \text{ Zahl}) \iff (p \in A) \)"
folgt:
\( ((p \in \mathbb{R}) \land (p \text{ Zahl})) \iff (p \in \mathbb{R}) \).
Beweis 101-13: f)

1: Via 2-2 gilt: \((p \in S \cap T) \iff ((p \in S) \land (p \in T))\).

2: Aus 1 und
aus 101-12: \(S \cap T = S^\prime\)
folgt:
\((p \in S) \iff ((p \in S) \land (p \in T))\).

3: Aus 2
folgt:
\(((p \in S) \land (p \in T)) \iff (p \in S)\).

g)

1: Via 2-2 gilt:
\((p \in S \cap C) \iff ((p \in S) \land (p \in C))\).

2: Aus 1 und
aus 101-12: \(S \cap C = R^\prime\)
folgt:
\((p \in R) \iff ((p \in S) \land (p \in C))\).

3: Aus 2
folgt:
\(((p \in S) \land (p \in C)) \iff (p \in R)\).

h)

1: Via 2-2 gilt:
\((p \in S \cap B) \iff ((p \in S) \land (p \in B))\).

2: Aus 1 und
aus 101-12: \(S \cap B = S^\prime\)
folgt:
\((p \in S) \iff ((p \in S) \land (p \in B))\).

3: Aus 2
folgt:
\(((p \in S) \land (p \in B)) \iff (p \in S)\).

i)

1: Via 2-2 gilt:
\((p \in S \cap A) \iff ((p \in S) \land (p \in A))\).

2: Aus 1 und
aus 101-12: \(S \cap A = S^\prime\)
folgt:
\((p \in S) \iff ((p \in S) \land (p \in A))\).

3: Aus 2
folgt:
\(((p \in S) \land (p \in A)) \iff (p \in S)\).

4: Via 95-4(Def) gilt:
\((p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)\).

5: Aus 3: \(((p \in S) \land (p \in A)) \iff (p \in S)\) und
aus 4: \((p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)\)
folgt:
\(((p \in S) \land (p \text{ Zahl})) \iff (p \in S)\).
Beweis 101-13 j)
1: Via 2-2 gilt: 
\[(p \in T \cap C) \iff ((p \in T) \land (p \in C)).\]
2: Aus 1 und aus 101-12 "T \cap C = R" folgt:
\[(p \in R) \iff ((p \in T) \land (p \in C)).\]
3: Aus 2 folgt:
\[((p \in T) \land (p \in C)) \iff (p \in R).\]

ek)
1: Via 2-2 gilt:
\[(p \in T \cap B) \iff ((p \in T) \land (p \in B)).\]
2: Aus 1 und aus 101-12 "T \cap B = S" folgt:
\[(p \in S) \iff ((p \in T) \land (p \in B)).\]
3: Aus 2 folgt:
\[((p \in T) \land (p \in B)) \iff (p \in S).\]
1)
1: Via 2-2 gilt:
\[(p \in T \cap A) \iff ((p \in T) \land (p \in A)).\]
2: Aus 1 und aus 101-12 "T \cap A = T" folgt:
\[(p \in T) \iff ((p \in T) \land (p \in A)).\]
3: Aus 2 folgt:
\[((p \in T) \land (p \in A)) \iff (p \in T).\]
4: Via 95-4(Def) gilt:
\[(p \text{ Zahl}) \iff (p \in A).\]
5: Aus 3"((p \in T) \land (p \in A)) \iff (p \in T)" und aus 4"(p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)" folgt:
\[((p \in T) \land (p \text{ Zahl})) \iff (p \in T).\]

m)
1: Via 2-2 gilt:
\[(p \in C \cap B) \iff ((p \in C) \land (p \in B)).\]
2: Aus 1 und aus 101-12 "C \cap B = C" folgt:
\[(p \in C) \iff ((p \in C) \land (p \in B)).\]
3: Aus 2 folgt:
\[((p \in C) \land (p \in B)) \iff (p \in C).\]
Beweis 101-13 n)

1: Via 2-2 gilt: 

\[ (p \in C \cap A) \iff ((p \in C) \land (p \in A)). \]

2: Aus 1 und 

aus 101-12 "\( C \cap A = C \)" 

folgt: 

\[ (p \in C) \iff ((p \in C) \land (p \in A)). \]

3: Aus 2 

folgt: 

\[ ((p \in C) \land (p \in A)) \iff (p \in C). \]

4: Via 95-4(Def) gilt: 

\[ (p \text{ Zahl}) \iff (p \in A). \]

5: Aus 3 "\((p \in C) \land (p \in A)\) \iff (p \in C)" und 

aus 4 "\((p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)\)" 

folgt: 

\[ ((p \in C) \land (p \text{ Zahl})) \iff (p \in C). \]

o)

1: Via 2-2 gilt: 

\[ (p \in B \cap A) \iff ((p \in B) \land (p \in A)). \]

2: Aus 1 und 

aus 101-12 "\( B \cap A = B \)" 

folgt: 

\[ (p \in B) \iff ((p \in B) \land (p \in A)). \]

3: Aus 2 

folgt: 

\[ ((p \in B) \land (p \in A)) \iff (p \in B). \]

4: Via 95-4(Def) gilt: 

\[ (p \text{ Zahl}) \iff (p \in A). \]

5: Aus 3 "\((p \in B) \land (p \in A)\) \iff (p \in B)" und 

aus 4 "\((p \text{ Zahl}) \iff (p \in A)\)" 

folgt: 

\[ ((p \in B) \land (p \text{ Zahl})) \iff (p \in B). \]
101-14. Um etwa "Re x ∈ R" nachzuweisen reicht es, sich von "Re x ∈ C" zu überzeugen:

101-14(Satz)

a) Aus "Re x ∈ C" folgt "Re x ∈ R".

b) Aus "Re x ∈ B" folgt "Re x ∈ S".

c) Aus "Re x Zahl" folgt "Re x ∈ T".

d) Aus "Im x ∈ C" folgt "Im x ∈ R".

e) Aus "Im x ∈ B" folgt "Im x ∈ S".

f) Aus "Im x Zahl" folgt "Im x ∈ T".

REIM-Notation

Beweis 101-14

a) VS gleich

1: Aus VS gleich "Re x ∈ C" folgt via ElementAxiom: Re x Menge.

2: Aus 1 "Re x Menge" folgt via 96-9: Re x ∈ T.

3: Aus 2 "Re x ∈ T" und aus VS gleich "Re x ∈ C" folgt via ∧SZ: Re x ∈ R.

b) VS gleich

1: Aus VS gleich "Re x ∈ B" folgt via ElementAxiom: Re x Menge.

2: Aus 1 "Re x Menge" folgt via 96-9: Re x ∈ T.

3: Aus 2 "Re x ∈ T" und aus VS gleich "Re x ∈ B" folgt via ∧SZ: Re x ∈ S.
Beweis 101-14 c) VS gleich

Aus VS gleich "Rex Zahl"
folgt via 96-9:

\[ \text{Rex} \in T. \]

d) VS gleich

\[ \text{Im} \in \mathbb{C}. \]

1: Aus VS gleich "\text{Im} \in \mathbb{C}"
folgt via \textbf{ElementAxiom}:

\[ \text{Im} \in \mathbb{Menge}. \]

2: Aus 1 "\text{Im} \in \mathbb{Menge}"
folgt via 96-9:

\[ \text{Im} \in T. \]

3: Aus 2 "\text{Im} \in T" und
aus VS gleich "\text{Im} \in \mathbb{C}"
folgt via \&SZ:

\[ \text{Im} \in \mathbb{R}. \]

e) VS gleich

\[ \text{Im} \in \mathbb{B}. \]

1: Aus VS gleich "\text{Im} \in \mathbb{B}"
folgt via \textbf{ElementAxiom}:

\[ \text{Im} \in \mathbb{Menge}. \]

2: Aus 1 "\text{Im} \in \mathbb{Menge}"
folgt via 96-9:

\[ \text{Im} \in T. \]

3: Aus 2 "\text{Im} \in T" und
aus VS gleich "\text{Im} \in \mathbb{B}"
folgt via \&SZ:

\[ \text{Im} \in \mathbb{S}. \]

f) VS gleich

Aus VS gleich "\text{Im} \in \mathbb{Zahl}"
folgt via 96-9:

\[ \text{Im} \in T. \]

\[ \square \]
101-15. Nun wird ein Kriterium für "\( x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \)" etabliert:

\textbf{101-15(Satz)}

Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:

i) \( p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \).

ii) "\( (\text{Rep} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan}) \)" oder "\( (\text{Rep} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan}) \)"

oder "\( (\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty) \)"

oder "\( (\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty) \)".

\textbf{REIM-Notation}.

\textbf{Beweis 101-15} \([ \text{i) } \Rightarrow \text{ii) } ]\) VS gleich \( p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \).

1: Aus VS gleich "\( p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C} \)"
folgt via 5-3:
\( (p \in \mathbb{B}) \land (p \notin \mathbb{C}) \).

2: Aus 1"\( p \in \mathbb{B} \ldots \)"
folgt via 101-3:
\( (\text{Rep} \in \mathbb{S}) \land (\text{Imp} \in \mathbb{S}) \).

3.1: Aus 2"\( \text{Rep} \in \mathbb{S} \ldots \)"
folgt via 95-20:
\( \text{Rep} \neq \text{nan} \).

3.2: Aus 2"\( \ldots \text{Imp} \in \mathbb{S} \)"
folgt via 95-20:
\( \text{Imp} \neq \text{nan} \).

...
Beweis 101-15 \((i) \Rightarrow (ii)\) VS gleich \(p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}\).

4: Aus \(1 \ldots p \notin \mathbb{C}\)
folgt via 101-2:
\[(\text{Rep} \notin \mathbb{R}) \lor (\text{Imp} \notin \mathbb{R}).\]

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>4.1. Fall</th>
<th>Rep \notin \mathbb{R}.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>5: Aus 2: (\text{Rep} \in \mathbb{R}) ... folgt via 95-15: ((\text{Rep} \in \mathbb{R}) \lor (\text{Rep} = +\infty) \lor (\text{Rep} = -\infty).)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>6: Aus 4.1. Fall: (\text{Rep} \notin \mathbb{R}) und aus 5: ((\text{Rep} \in \mathbb{R}) \lor (\text{Rep} = +\infty) \lor (\text{Rep} = -\infty)) folgt: ((\text{Rep} = +\infty) \lor (\text{Rep} = -\infty)).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>7: Aus 6: ((\text{Rep} = +\infty) \lor (\text{Rep} = -\infty)) und aus 3.2: (\text{Imp} \neq \text{nan}) folgt: ((\text{Rep} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Rep} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>8: Aus 7 folgt: ((\text{Rep} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Rep} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty) \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)).</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>4.2. Fall</th>
<th>Imp \notin \mathbb{R}.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>5: Aus 2: (\ldots \text{Imp} \in \mathbb{R}) ... folgt via 95-15: ((\text{Imp} \in \mathbb{R}) \lor (\text{Imp} = +\infty) \lor (\text{Imp} = -\infty).)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>6: Aus 4.2. Fall: (\text{Imp} \notin \mathbb{R}) und aus 5: ((\text{Imp} \in \mathbb{R}) \lor (\text{Imp} = +\infty) \lor (\text{Imp} = -\infty)) folgt: ((\text{Imp} = +\infty) \lor (\text{Imp} = -\infty)).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>7: Aus 3.1: (\text{Rep} \neq \text{nan}) und aus 6: ((\text{Imp} = +\infty) \lor (\text{Imp} = -\infty)) folgt: ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)) \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>8: Aus 7 folgt: ((\text{Rep} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Rep} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty) \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)).</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung**
In beiden Fällen gilt:
\[((\text{Rep} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Rep} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)) \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)).\]
Beweis 101-15 [ii) ⇒ i)]

VS gleich

\[ ((\text{Re} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Re} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \]

\[ \lor ((\text{Re} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)) \lor ((\text{Re} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)). \]

1: Nach VS gilt:

\[ ((\text{Re} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Re} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \]

\[ \lor ((\text{Re} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)) \lor ((\text{Re} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)). \]

Fallunterscheidung

1.1. Fall

\[ (\text{Re} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan}). \]

2: Aus 1.1. Fall"\text{Re} = +\infty..." folgt via 95-15: \text{Re} \in S.

3: Aus 2"\text{Re} \in S" folgt via 95-16: \text{Re} \in T.

4: Aus 3"\text{Re} \in T" folgt via 96-9: \text{Imp} \in T.

5: Aus 4"\text{Imp} \in T" und aus 1.1. Fall"...\text{Imp} \neq \text{nan}" folgt via 95-20: \text{Imp} \in S.

6: Aus 2"\text{Re} \in S" und aus 5"\text{Imp} \in S" folgt via 101-3: \( p \in B \).

7: Aus 1.1. Fall"\text{Re} = +\infty..." folgt via 95-18: \text{Re} \notin R.

8: Aus 7"\text{Re} \notin R" folgt via 101-2: \( p \notin C \).

9: Aus 6"\text{p} \in B" und aus 8"\text{p} \notin C" folgt via 5-3: \( p \in B \setminus C \).

...
Beweis 101-15 \([\text{ii} \Rightarrow \text{i}]\)

VS gleich
\[
\begin{align*}
((\text{Rep} = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) & \lor ((\text{Rep} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \\
\lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)) & \lor ((\text{Rep} \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty))
\end{align*}
\]

... 

Fallunterscheidung

... 

\begin{tabular}{|l|l|}
\hline
1.2. Fall & 
\((\text{Rep} = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})\). \\
\hline
2: & Aus 1.2. Fall \("\text{Rep} = -\infty\ldots"\) \bigskip \text{folgt via 95-15:} \\
& \text{Rep} \in \mathbb{S}.
\hline
3: & Aus 2 \("\text{Rep} \in \mathbb{S}\"\) \bigskip \text{folgt via 95-16:} \\
& \text{Rep} \in \mathbb{T}.
\hline
4: & Aus 3 \("\text{Rep} \in \mathbb{T}\"\) \bigskip \text{folgt via 96-9:} \\
& \text{Imp} \in \mathbb{T}.
\hline
5: & Aus 4 \("\text{Imp} \in \mathbb{T}\" und \\
& aus 1.2. Fall \("\ldots\text{Imp} \neq \text{nan}\"\) \bigskip \text{folgt via 95-20:} \\
& \text{Imp} \in \mathbb{S}.
\hline
6: & Aus 2 \("\text{Rep} \in \mathbb{S}\" und \\
& aus 5 \("\text{Imp} \in \mathbb{S}\"\) \bigskip \text{folgt via 101-3:} \\
& \text{p} \in \mathbb{B}.
\hline
7: & Aus 1.2. Fall \("\text{Rep} = -\infty\ldots"\) \bigskip \text{folgt via 95-18:} \\
& \text{Rep} \notin \mathbb{R}.
\hline
8: & Aus 7 \("\text{Rep} \notin \mathbb{R}\"\) \bigskip \text{folgt via 101-2:} \\
& \text{p} \notin \mathbb{C}.
\hline
9: & Aus 6 \("\text{p} \in \mathbb{B}\" und \\
& aus 8 \("\text{p} \notin \mathbb{C}\"\) \bigskip \text{folgt via 5-3:} \\
& \text{p} \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}.
\hline
\end{tabular}

...
Beweis 101-15 [ii) ⇒ i)]

VS gleich

\[ ((\text{Re}p = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Re}p = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Re}p \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)) \lor ((\text{Re}p \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)). \]

... 

**Fallunterscheidung**

... 

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.3. Fall</th>
<th>((\text{Re}p \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2:</td>
<td>Aus 1.3. Fall “...\text{Imp} = +\infty” folgt via 95-15: \text{Imp} \in S.</td>
</tr>
<tr>
<td>3:</td>
<td>Aus 2“\text{Imp} \in S” folgt via 95-16: \text{Imp} \in T.</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>Aus 3“\text{Imp} \in T” folgt via 96-9: \text{Re}p \in T.</td>
</tr>
<tr>
<td>5:</td>
<td>Aus 4“\text{Re}p \in T” und aus 1.3. Fall “\text{Re}p \neq \text{nan}...” folgt via 95-20: \text{Re}p \in S.</td>
</tr>
<tr>
<td>6:</td>
<td>Aus 5“\text{Re}p \in S” und aus 2“\text{Imp} \in S” folgt via 101-3: (p \in \mathbb{B}).</td>
</tr>
<tr>
<td>7:</td>
<td>Aus 1.3. Fall “...\text{Imp} = +\infty” folgt via 95-18: \text{Imp} \notin \mathbb{R}.</td>
</tr>
<tr>
<td>8:</td>
<td>Aus 7“\text{Imp} \notin \mathbb{R}” folgt via 101-2: (p \notin \mathbb{C}).</td>
</tr>
<tr>
<td>9:</td>
<td>Aus 6“\text{Imp} \in \mathbb{B}” und aus 8“\text{Imp} \notin \mathbb{C}” folgt via 5-3: (p \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

...
Beweis 101-15 \([\textbf{ii)} \Rightarrow \textbf{i)}\]

\[\text{VS gleich } (\text{Re}p = +\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan}) \lor ((\text{Re}p = -\infty) \land (\text{Imp} \neq \text{nan})) \lor ((\text{Re}p \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = +\infty)) \lor ((\text{Re}p \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty)).\]

... 

\textbf{Fallunterscheidung}

...

\begin{center}
\begin{tabular}{|l|l|}
\hline
\textbf{1.4.Fall} & (\text{Re}p \neq \text{nan}) \land (\text{Imp} = -\infty). \\
\hline
2: & \text{Aus 1.4.Fall‘...Imp} = -\infty” \\
folgt via 95-15: & \text{Imp} \in S. \\
3: & \text{Aus 2”Imp} \in S” \\
folgt via 95-16: & \text{Imp} \in T. \\
4: & \text{Aus 3”Imp} \in T” \\
folgt via 96-9: & \text{Rep} \in T. \\
5: & \text{Aus 4”Rep} \in T” und \\
\text{aus 1.4.Fall”Rep} \neq \text{nan...”} & \text{Rep} \in S. \\
folgt via 95-20: & \\
6: & \text{Aus 5”Rep} \in S” und \\
\text{aus 2”Imp} \in S” & \text{p} \in B. \\
folgt via 101-3: & \\
7: & \text{Aus 1.4.Fall‘...Imp} = -\infty” \\
folgt via 95-18: & \text{Imp} \notin R. \\
8: & \text{Aus 7”Imp} \notin R” \\
folgt via 101-2: & \text{p} \notin C. \\
9: & \text{Aus 6”p} \in B” und \\
\text{aus 8”p} \notin C” & \text{p} \in B \setminus C. \\
folgt via 5-3: & \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}

\textbf{Ende Fallunterscheidung} \text{In allen Fällen gilt: } \text{p} \in B \setminus C. 

\begin{flushright} \square \end{flushright}
101-16. Auch um späters Zitieren zu vereinfachen werden nun die Inklusions-
Aussagen über \( R, S, T, C, B, A \) im \( \subseteq \text{Satz Zahlen} \) zusammengefasst:

<table>
<thead>
<tr>
<th>101-16(Satz) (( \subseteq \text{SZ}: \subseteq \text{Satz Zahlen} )</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) ( R \subseteq S. )</td>
</tr>
<tr>
<td>b) ( R \subseteq T. )</td>
</tr>
<tr>
<td>c) ( R \subseteq C. )</td>
</tr>
<tr>
<td>d) ( R \subseteq B. )</td>
</tr>
<tr>
<td>e) ( R \subseteq A. )</td>
</tr>
<tr>
<td>f) ( S \subseteq T. )</td>
</tr>
<tr>
<td>g) ( S \subseteq B. )</td>
</tr>
<tr>
<td>h) ( S \subseteq A. )</td>
</tr>
<tr>
<td>i) ( T \subseteq A. )</td>
</tr>
<tr>
<td>j) ( C \subseteq B. )</td>
</tr>
<tr>
<td>k) ( C \subseteq A. )</td>
</tr>
<tr>
<td>l) ( B \subseteq A. )</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Beweis 101-16 a) 
Via 95-11 gilt: \( R \subseteq S \).
b) 
Via 95-12 gilt: \( R \subseteq T \).
c) 
Via 101-5 gilt: \( R \subseteq C \).
d) 
Via 101-7 gilt: \( R \subseteq B \).
e) 
Via AAI gilt: \( R \subseteq A \).
f) 
Via 95-12 gilt: \( S \subseteq T \).
g) 
Via 101-7 gilt: \( S \subseteq B \).
h) 
Via 95-11 gilt: \( S \subseteq A \).
i) 
Via 95-12 gilt: \( T \subseteq A \).
j) 
Via 101-5 gilt: \( C \subseteq B \).
k) 
Via 101-5 gilt: \( C \subseteq A \).
l) 
Via 101-7 gilt: \( B \subseteq A \). □
101-17. Auch um späters Zitieren zu vereinfachen werden nun die Inklusions-Aussagen über \( \mathbb{R}, S, T, C, B, A \) vom \( \subseteq \text{Satz Zahlen} \) als Implikationen geschrieben und im \( \in \text{Satz Zahlen} \) zusammengefasst:

<table>
<thead>
<tr>
<th>101-17(Satz) (( \in \text{SZ: } \in \text{Satz Zahlen} ))</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) Aus ( &quot;p \in \mathbb{R})&quot; folgt ( &quot;p \in \mathbb{S})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Aus ( &quot;p \in \mathbb{R})&quot; folgt ( &quot;p \in \mathbb{T})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) Aus ( &quot;p \in \mathbb{R})&quot; folgt ( &quot;p \in \mathbb{C})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) Aus ( &quot;p \in \mathbb{R})&quot; folgt ( &quot;p \in \mathbb{B})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>e) Aus ( &quot;p \in \mathbb{R})&quot; folgt ( &quot;p \text{ Zahl})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>f) Aus ( &quot;p \in \mathbb{S})&quot; folgt ( &quot;p \in \mathbb{T})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>g) Aus ( &quot;p \in \mathbb{S})&quot; folgt ( &quot;p \in \mathbb{B})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>h) Aus ( &quot;p \in \mathbb{S})&quot; folgt ( &quot;p \text{ Zahl})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>i) Aus ( &quot;p \in \mathbb{T})&quot; folgt ( &quot;p \text{ Zahl})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>j) Aus ( &quot;p \in \mathbb{C})&quot; folgt ( &quot;p \in \mathbb{B})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>k) Aus ( &quot;p \in \mathbb{C})&quot; folgt ( &quot;p \text{ Zahl})&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>l) Aus ( &quot;p \in \mathbb{B})&quot; folgt ( &quot;p \text{ Zahl})&quot;.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Beweis 101-17 a) \( VS \text{ gleich } \)

Aus \( VS \text{ gleich "p } \in \mathbb{R}\)" folgt via 95-15: \( p \in \mathbb{S}. \)

b) \( VS \text{ gleich } \)

Aus \( VS \text{ gleich "p } \in \mathbb{R}\)" folgt via 95-16: \( p \in \mathbb{T}. \)

c) \( VS \text{ gleich } \)

Aus \( VS \text{ gleich "p } \in \mathbb{R}\)" und aus \( \subseteq \text{SZ "R } \subseteq \mathbb{C}\)" folgt via 0-4: \( p \in \mathbb{C}. \)
Beweis 101-17 d) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ ℝ” und aus ⊆SZ “ℝ ⊆ ℤ” folgt via 0-4:

p ∈ ℤ.

e) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ ℝ” folgt via 95-6:

p Zahl.

f) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ S” folgt via 95-20:

p ∈ T.

g) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ S” und aus ⊆SZ “S ⊆ ℤ” folgt via 0-4:

p ∈ ℤ.

h) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ S” folgt via 99-1:

p Zahl.

i) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ T” folgt via 99-1:

p Zahl.

j) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ C” und aus ⊆SZ “C ⊆ ℤ” folgt via 0-4:

p ∈ ℤ.

k) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ C” folgt via 99-1:

p Zahl.

l) VS gleich

Aus VS gleich “p ∈ ℤ” folgt via 99-1:

p Zahl.
FS: Fundamentalsatz.
AKR: Additive KürzungsRegel.
AVR: Additive VerschiebungsRegel.

Ersterstellung: 01/10/05
Letzte Änderung: 28/01/12
102-1. Falls die Summe zweier treller Zahlen eine reelle Zahl ist, dann sind beide an der Summe beteiligten Zahlen reell:

\[
\begin{align*}
\mathbf{102-1}(\text{Satz}) \\
Es\ gelte: \\
\quad & -\to \ x \in T. \\
\quad & -\to \ y \in T. \\
\quad & -\to \ x + y \in \mathbb{R}. \\
Dann\ folgt: \\
\quad & a) \ x \in \mathbb{R}. \\
\quad & b) \ y \in \mathbb{R}.
\end{align*}
\]

\textbf{Beweis 102-1}

1.1: Aus \( -\to \ "x \in T" \) folgt via 95-16: \( (x \in \mathbb{R}) \lor (x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty). \)

1.2: Aus \( -\to \ "y \in T" \) folgt via 95-16: \( (y \in \mathbb{R}) \lor (y = \text{nan}) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty). \)

1.3: Aus \( -\to \ "x + y \in \mathbb{R}" \) folgt via 95-17: \( x + y \neq \text{nan}. \)

1.4: Aus \( -\to \ "x + y \in \mathbb{R}" \) folgt via 95-17: \( x + y \neq +\infty. \)

1.5: Aus \( -\to \ "x + y \in \mathbb{R}" \) folgt via 95-17: \( x + y \neq -\infty. \)
Beweis 102-1

2.1: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})
\land (x = \text{nan}) \land (y = \text{nan})
\lor (x = +\infty) \land (y = +\infty)
\lor (x = +\infty) \land (y = -\infty)
\lor (x = -\infty) \land (y = +\infty)
\lor (x = -\infty) \land (y = -\infty).
\]

Fallunterscheidung

2.1.1. Fall
\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R}).\]

2.1.2. Fall
\[(x \in \mathbb{R}) \land (y = \text{nan}).\]

3: Aus \(\rightarrow\)“\(x \in T\)” folgt via AAVI:
\[x + \text{nan} = \text{nan}.\]

4: Aus 3“\(x + \text{nan} = \text{nan}\)” und aus 2.1.2. Fall“\(\ldots y = \text{nan}\)” folgt:
\[x + y = \text{nan}.\]

5: Es gilt 4“\(x + y = \text{nan}\)”.
Es gilt 1.3“\(x + y \neq \text{nan}\)”.
Ex falso quodlibet folgt:
\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R}).\]
**Beweis 102-1**

... 

**Fallunterscheidung**

... 

### 2.1.3. Fall  
\[ (x \in \mathbb{R}) \land (y = +\infty). \]

3: Aus 2.1.3. Fall “\(x \in \mathbb{R}\)”
folgt via **AAVI**:
\[ x + (+\infty) = +\infty. \]

4: Aus 3 “\(x + (+\infty) = +\infty\)” und
aus 2.1.3. Fall “... \(y = +\infty\)”
folgt:
\[ x + y = +\infty. \]

5: Es gilt 4 “\(x + y = +\infty\)”.
Es gilt 1.4 “\(x + y \neq +\infty\)”.
Ex falso quodlibet folgt:
\[ (x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R}). \]

### 2.1.4. Fall  
\[ (x \in \mathbb{R}) \land (y = -\infty). \]

3: Aus 2.1.4. Fall “\(x \in \mathbb{R}\)”
folgt via **AAVI**:
\[ x + (-\infty) = -\infty. \]

4: Aus 3 “\(x + (-\infty) = -\infty\)” und
aus 2.1.4. Fall “... \(y = -\infty\)”
folgt:
\[ x + y = -\infty. \]

5: Es gilt 4 “\(x + y = -\infty\)”.
Es gilt 1.5 “\(x + y \neq -\infty\)”.
Ex falso quodlibet folgt:
\[ (x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R}). \]

### 2.1.5. Fall  
\[ (x = nan) \land (y \in \mathbb{R}). \]

3: Aus → “\(y \in \mathbb{T}\)”
folgt via **AAVI**:
\[ nan + y = nan. \]

4: Aus 3 “\(nan + y = nan\)” und
aus 2.1.5. Fall “\(x = nan\)”
folgt:
\[ x + y = nan. \]

5: Es gilt 4 “\(x + y = nan\)”.
Es gilt 1.3 “\(x + y \neq nan\)”.
Ex falso quodlibet folgt:
\[ (x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R}). \]
### Beweis 102-1

...  

**Fallunterscheidung**

...  

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1.6 Fall</th>
<th>((x = \text{nan}) \land (y = \text{nan})).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1.6. Fall</td>
<td>folgt: (x = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.1.6. Fall</td>
<td>folgt: (y = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>(x + y \equiv \text{nan} + y \equiv \text{nan} + \text{nan} \not\equiv \text{nan}).</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 5: Es gilt 4“\(x + y = \ldots = \text{nan}\).  
Es gilt 1.3“\(x + y \not\equiv \text{nan}\).  
Ex falso quodlibet folgt: | \((x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})\). |

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1.7 Fall</th>
<th>((x = \text{nan}) \land (y = +\infty)).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1.7. Fall</td>
<td>folgt: (x = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.1.7. Fall</td>
<td>folgt: (y = +\infty).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>(x + y \equiv \text{nan} + y \equiv \text{nan} + (+\infty) \not\equiv \text{nan}).</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 5: Es gilt 4“\(x + y = \ldots = \text{nan}\).  
Es gilt 1.3“\(x + y \not\equiv \text{nan}\).  
Ex falso quodlibet folgt: | \((x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})\). |

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1.8 Fall</th>
<th>((x = \text{nan}) \land (y = -\infty)).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1.8. Fall</td>
<td>folgt: (x = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.1.8. Fall</td>
<td>folgt: (y = -\infty).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>(x + y \equiv \text{nan} + y \equiv \text{nan} + (-\infty) \not\equiv \text{nan}).</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 5: Es gilt 4“\(x + y = \ldots = \text{nan}\).  
Es gilt 1.3“\(x + y \not\equiv \text{nan}\).  
Ex falso quodlibet folgt: | \((x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})\). |

...
Beweis 102-1

...  

**Fallunterscheidung**  

...  

<table>
<thead>
<tr>
<th><strong>2.1.9.Fall</strong></th>
<th>$(x = +\infty) \land (y \in \mathbb{R})$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3:</td>
<td>Aus 2.1.9.Fall“...$y \in \mathbb{R}$” folgt via AAVI: $(+\infty) + y = +\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>Aus 3“(+$\infty$) + $y = +\infty” und aus 2.1.9.Fall“$x = +\infty...” folgt: $x + y = +\infty$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 5:             | Es gilt 4“$x + y = ... = +\infty”“.  
Es gilt 1.4“$x + y \neq +\infty”“.  
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})$. |

<table>
<thead>
<tr>
<th><strong>2.1.10.Fall</strong></th>
<th>$(x = +\infty) \land (y = \text{nan})$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1:</td>
<td>Aus 2.1.10.Fall folgt: $x = +\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2:</td>
<td>Aus 2.1.10.Fall folgt: $y = \text{nan}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>$x + y \overset{3.1}{=} (+\infty) + y \overset{3.2}{=} (+\infty) + \text{nan} \overset{97-1}{=} \text{nan}$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 5:             | Es gilt 4“$x + y = ... = \text{nan}”“.  
Es gilt 1.3“$x + y \neq \text{nan}”“.  
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})$. |

<table>
<thead>
<tr>
<th><strong>2.1.11.Fall</strong></th>
<th>$(x = +\infty) \land (y = +\infty)$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1:</td>
<td>Aus 2.1.11.Fall folgt: $x = +\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2:</td>
<td>Aus 2.1.11.Fall folgt: $y = +\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>$x + y \overset{3.1}{=} (+\infty) + y \overset{3.2}{=} (+\infty) + (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} +\infty$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 5:             | Es gilt 4“$x + y = ... = +\infty”“.  
Es gilt 1.4“$x + y \neq +\infty”“.  
Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})$. |
Beweis 102-1

... 

Fallunterscheidung

... 

2.1.12.Fall

(x = +∞) ∧ (y = −∞).

3.1: Aus 2.1.11.Fall folgt:  
x = +∞.

3.2: Aus 2.1.11.Fall folgt:  
y = −∞.

4:  
x + y ≡ (+∞) + y ≡ (+∞) + (−∞)  AAVI  nan.

5: Es gilt 4 “x + y = ... = nan”.
   Es gilt 1.3 “x + y ≠ nan”.
   Ex falso quodlibet folgt:  
   (x ∈ ℜ) ∧ (y ∈ ℜ).

2.1.13.Fall

(x = −∞) ∧ (y ∈ ℜ).

3: Aus 2.1.13.Fall “... y ∈ ℜ” folgt via AAVI:  
   (−∞) + y = −∞.

4: Aus 3 “(−∞) + y = −∞” und aus 2.1.13.Fall “x = −∞...” folgt:  
   x + y = −∞.

5: Es gilt 4 “x + y = ... = −∞”.
   Es gilt 1.5 “x + y ≠ −∞”.
   Ex falso quodlibet folgt:  
   (x ∈ ℜ) ∧ (y ∈ ℜ).

2.1.14.Fall

(x = −∞) ∧ (y = nan).

3.1: Aus 2.1.14.Fall folgt:  
x = −∞.

3.2: Aus 2.1.14.Fall folgt:  
y = nan.

4:  
x + y ≡ (−∞) + y ≡ (−∞) + nan 97−1  nan.

5: Es gilt 4 “x + y = ... = nan”.
   Es gilt 1.3 “x + y ≠ nan”.
   Ex falso quodlibet folgt:  
   (x ∈ ℜ) ∧ (y ∈ ℜ).
Beweis 102-1

Fallunterscheidung

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1.15.Fall</th>
<th>$(x = -\infty) \land (y = +\infty)$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1.15.Fall folgt:</td>
<td>$x = -\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.1.15.Fall folgt:</td>
<td>$y = +\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>$x + y \overset{3.1}{=} (-\infty) + y \overset{3.2}{=} (-\infty) + (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} \text{nan}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>5:</td>
<td>Es gilt 4&quot;$x + y = \ldots = \text{nan}$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Es gilt 1.3&quot;$x + y \neq \text{nan}$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1.16.Fall</th>
<th>$(x = -\infty) \land (y = -\infty)$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1.16.Fall folgt:</td>
<td>$x = -\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.1.16.Fall folgt:</td>
<td>$y = -\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>$x + y \overset{3.1}{=} (-\infty) + y \overset{3.2}{=} (-\infty) + (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty$.</td>
</tr>
<tr>
<td>5:</td>
<td>Es gilt 4&quot;$x + y = \ldots = -\infty$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Es gilt 1.5&quot;$x + y \neq -\infty$&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Ex falso quodlibet folgt: $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt: $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})$. □
102-2. Falls für zwei reelle Zahlen $x, y$ die Gleichung $x + y = z$ mit $z \in \mathbb{R}$ gilt, dann sind $x, y$ reell und es gilt $x = z - y$ und $y = z - x$:

**102-2(Satz)**

*Es gelte:*

- $x \in T$.
- $y \in T$.
- $x + y = z$.
- $z \in \mathbb{R}$.

*Dann folgt:*

- $a) \ x \in \mathbb{R}.$
- $b) \ y \in \mathbb{R}.$
- $c) \ x = z - y.$
- $d) \ y = z - x.$

---

**RECH-Notation**.

**Beweis 102-2**

1: Aus $\rightarrow "x + y = z"$ und
   aus $\rightarrow "z \in \mathbb{R}"$
   folgt: $x + y \in \mathbb{R}$.

2.a): Aus $\rightarrow "x \in T"$,
   aus $\rightarrow "y \in \mathbb{R}"$ und
   aus $1"x + y \in \mathbb{R}"
   folgt via 102-1: $x \in \mathbb{R}$.

2.b): Aus $\rightarrow "x \in T"$,
   aus $\rightarrow "y \in \mathbb{R}"$ und
   aus $1"x + y \in \mathbb{R}"
   folgt via 102-1: $y \in \mathbb{R}$.

...
Beweis 102-2

3.1: Aus 2.a) “$x \in \mathbb{R}$...” folgt via AAV:

\[ x - x = 0. \]

3.2: Aus 2.a) “$x \in \mathbb{R}$...” folgt via AAV:

\[ x + 0 = x. \]

3.3: Aus 2.b) “...$y \in \mathbb{R}$” folgt via AAV:

\[ y - y = 0. \]

3.4: Aus 2.b) “...$y \in \mathbb{R}$” folgt via AAV:

\[ y + 0 = y. \]

4.1:

\[
\begin{align*}
\vec{\rightarrow}^1 & \quad (x + y) - y \\
& \quad = (x + y) + (-y) \\
& \quad \text{FSA} \quad x + (y + (-y)) \\
& \quad = x + (y - y) \\
& \quad \overset{3.3}{=} x + 0 \\
& \quad \overset{3.2}{=} x.
\end{align*}
\]

4.2:

\[
\begin{align*}
\vec{\rightarrow}^1 & \quad (x + y) - x \\
& \quad = (x + y) + (-x) \\
& \quad \text{FSA} \quad (y + x) + (-x) \\
& \quad \text{FSA} \quad y + (x + (-x)) \\
& \quad = y + (x - x) \\
& \quad \overset{3.1}{=} y + 0 \\
& \quad \overset{3.4}{=} y.
\end{align*}
\]
Beweis 102-2

...  

5.c): Aus 4.1 “z – y = ... = x”  
folgt:  
x = z - y.

5.d): Aus 4.2 “z – x = ... = y”  
folgt:  
y = z - x.
102-3. Interessanter Weise gilt $x + y \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $x, y \in \mathbb{C}$. Ein derartiges Resultat ist offenbar nicht verfügbar, wenn "\(\mathbb{C}\)" durch "\(\mathbb{R}, S, T, B\)" ersetzt wird. Der Fall $x + y \in \mathbb{A}$ ist in 96-13 behandelt:

<table>
<thead>
<tr>
<th>102-3(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:</td>
</tr>
<tr>
<td>i) &quot;(x \in \mathbb{C})&quot; und &quot;(y \in \mathbb{C}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>ii) (x + y \in \mathbb{C}).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

---

Beweis 102-3

---

\[ [i] \implies [ii] \] VS gleich \( (x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}). \)

1.1: Aus VS gleich "\(x \in \mathbb{C}\ldots\)" folgt via 101-1: \( (\Re x \in \mathbb{R}) \land (\Im x \in \mathbb{R}). \)

1.2: Aus VS gleich "\(\ldots y \in \mathbb{C}\)" folgt via 101-1: \( (\Re y \in \mathbb{R}) \land (\Im y \in \mathbb{R}). \)

2.1: Aus 1.1"\(\Re x \in \mathbb{R}\ldots\)" und aus 1.2"\(\Re y \in \mathbb{R}\ldots\)" folgt via AAV: \( (\Re x) + (\Re y) \in \mathbb{R}. \)

2.2: Aus 1.1"\(\ldots \Im x \in \mathbb{R}\)" und aus 1.2"\(\ldots \Im y \in \mathbb{R}\)" folgt via AAV: \( (\Im x) + (\Im y) \in \mathbb{R}. \)

3.1: Via 96-25 gilt: \( \Re(x + y) = (\Re x) + (\Re y). \)

3.2: Via 96-25 gilt: \( \Im(x + y) = (\Im x) + (\Im y). \)

...
Beweis 102-3 \([i] \Rightarrow [ii]\) VS gleich 

\((x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C})\).

\[3.1:\]
Aus 3.1 "\(\text{Re}(x + y) = (\text{Re}x) + (\text{Re}y)\)" und
aus 2.1 "\((\text{Re}x) + (\text{Re}y) \in \mathbb{R}\)"
folgt:
\(\text{Re}(x + y) \in \mathbb{R}\).

\[4.2:\]
Aus 3.2 "\(\text{Im}(x + y) = (\text{Im}x) + (\text{Im}y)\)" und
aus 2.2 "\((\text{Im}x) + (\text{Im}y) \in \mathbb{R}\)"
folgt:
\(\text{Im}(x + y) \in \mathbb{R}\).

\[5:\]
Aus 4.1 "\(\text{Re}(x + y) \in \mathbb{R}\)" und
aus 4.2 "\(\text{Im}(x + y) \in \mathbb{R}\)"
folgt via 101-1:
\(x + y \in \mathbb{C}\).

\[i) \Rightarrow [i]\) VS gleich 

\(x + y \in \mathbb{C}\).

\[1.1:\]
Aus VS gleich "\(x + y \in \mathbb{C}\)"
folgt via 101-1:
\((\text{Re}(x + y) \in \mathbb{R}) \land (\text{Im}(x + y) \in \mathbb{R})\).

\[1.2:\]
Aus VS gleich "\(x + y \in \mathbb{C}\)"
folgt via \(\epsilon \text{SZ}\):
\(x + y \text{ Zahl}\).

\[2.1:\]
Via 96-25 gilt:
\(\text{Re}(x + y) = (\text{Re}x) + (\text{Re}y)\).

\[2.2:\]
Via 96-25 gilt:
\(\text{Im}(x + y) = (\text{Im}x) + (\text{Im}y)\).

\[2.3:\]
Aus 1.2 "\(x + y \text{ Zahl}\)"
folgt via 96-13:
\((x \text{ Zahl}) \land (y \text{ Zahl})\).

\[3.1:\]
Aus 1.1 "\(\text{Re}(x + y) \in \mathbb{R}\)..." und
aus 2.1 "\(\text{Re}(x + y) = (\text{Re}x) + (\text{Re}y)\)"
folgt:
\((\text{Re}x) + (\text{Re}y) \in \mathbb{R}\).

\[3.2:\]
Aus 1.1 "\(\ldots \text{Im}(x + y) \in \mathbb{R}\)..." und
aus 2.2 "\(\text{Im}(x + y) = (\text{Im}x) + (\text{Im}y)\)"
folgt:
\((\text{Im}x) + (\text{Im}y) \in \mathbb{R}\).

\[3.3:\]
Aus 2.3 "\(x \text{ Zahl}\)..."
folgt via 96-9:
\((\text{Re}x \in \mathbb{T}) \land (\text{Im}x \in \mathbb{T})\).

\[3.4:\]
Aus 2.3 "\(\ldots y \text{ Zahl}\)"
folgt via 96-9:
\((\text{Re}y \in \mathbb{T}) \land (\text{Im}y \in \mathbb{T})\).

\ldots
Beweis 102-3 [ii) ⇒ i) VS gleich $x + y \in \mathbb{C}$.

...  

4.1: Aus 3.3“$\text{Re} x \in \mathbb{T}$...”,  
aus 3.4“$\text{Re} y \in \mathbb{T}$...” und  
aus 3.1“(Re$x$) + (Re$y$) $\in \mathbb{R}$”  
folgt via 102-1: $(\text{Re} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Re} y \in \mathbb{R})$.

4.2: Aus 3.3“...Im$x$ $\in \mathbb{T}$”,  
aus 3.4“...Im$y$ $\in \mathbb{T}$” und  
aus 3.2“(Im$x$) + (Im$y$) $\in \mathbb{R}$”  
folgt via 102-1: $(\text{Im} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} y \in \mathbb{R})$.

5.1: Aus 4.1“$\text{Re} x \in \mathbb{R}$...” und  
aus 4.2“Im$x$ $\in \mathbb{R}$...”  
folgt via 101-1: $x \in \mathbb{C}$.

5.2: Aus 4.1“...Re$y$ $\in \mathbb{R}$” und  
aus 4.2“...Im$y$ $\in \mathbb{R}$”  
folgt via 101-1: $y \in \mathbb{C}$.

6: Aus 5.1 und  
aus 5.2  
folgt:  

$(x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C})$.  

$\square$
102-4. Falls \( x + y = z \in \mathbb{C} \), dann sind \( x, y \) komplexe Zahlen und es gilt \( x = z - y \) und \( y = z - x \):

\[
\begin{align*}
\text{102-4(Satz)} \quad & \quad \text{Es gelte:} \\
\rightarrow & \quad x + y = z. \\
\rightarrow & \quad z \in \mathbb{C}. \\
\text{Dann folgt:} \\
a) & \quad x \in \mathbb{C}. \\
b) & \quad y \in \mathbb{C}. \\
c) & \quad x = z - y. \\
d) & \quad y = z - x. 
\end{align*}
\]

RECH-Notation

Beweis 102-4

REIM-Notation

1.1: Aus \( \rightarrow \) "\( x + y = z \)" und aus \( \rightarrow \) "\( z \in \mathbb{C} \)" folgt: \( x + y \in \mathbb{C} \).

1.2: Aus \( \rightarrow \) "\( x + y = z \)" folgt: \( z = x + y \).

1.3: Aus \( \rightarrow \) "\( z \in \mathbb{C} \)" folgt via 101-1: \( (\text{Re}z \in \mathbb{R}) \land (\text{Im}z \in \mathbb{R}) \).

...
Beweis 102-4 . .

2.a): Aus 1.1“x + y ∈ C” folgt via 102-3: x ∈ C.

2.b): Aus 1.1“x + y ∈ C” folgt via 102-3: y ∈ C.

2.2: Rez ⇔ Re(x + y) 96-25 (Rex) + (Rey).

2.3: Imz ⇔ Im(x + y) 96-25 (Imx) + (Imy).

3.1: Aus 2.a)“x ∈ C” folgt via ∈SZ: x Zahl.

3.2: Aus 2.b)“y ∈ C” folgt via ∈SZ: y Zahl.

3.3: Aus 2.2“Rez = . . . = (Rex) + (Rey)” folgt: (Rex) + (Rey) = Rez.

3.4: Aus 2.3“Imz = . . . = (Imx) + (Imy)” folgt: (Imx) + (Imy) = Imz.

4.1: Aus 3.1“x Zahl” folgt via 96-9: (Rex ∈ T) ∧ (Imx ∈ T).

4.2: Aus 3.2“y Zahl” folgt via 96-9: (Rey ∈ T) ∧ (Imy ∈ T).

4.3: Aus 3.1“x Zahl” folgt via 96-24: x = (Rex) + i · (Imx).

4.4: Aus 3.2“y Zahl” folgt via 96-24: y = (Rey) + i · (Imy).

...
Beweis 102-4

...  

5.1: Aus 4.1 \( \text{Re}x \in T \ldots \) , 
aus 4.2 \( \text{Re}y \in T \ldots \) , 
aus 3.3 \( (\text{Re}x) + (\text{Re}y) = \text{Re}z \) und 
aus 1.3 \( \text{Re}z \in \mathbb{R} \ldots \) 
folgt via 102-2: \( \text{Re}x = (\text{Re}z) - (\text{Re}y) \).

5.2: Aus 4.1 \( \text{Re}x \in T \ldots \) , 
aus 4.2 \( \text{Re}y \in T \ldots \) , 
aus 3.3 \( (\text{Re}x) + (\text{Re}y) = \text{Re}z \) und 
aus 1.3 \( \text{Re}z \in \mathbb{R} \ldots \) 
folgt via 102-2: \( \text{Re}y = (\text{Re}z) - (\text{Re}x) \).

5.3: Aus 4.1 \( \ldots \text{Im}x \in T \) , 
aus 4.2 \( \ldots \text{Im}y \in T \) , 
aus 3.4 \( (\text{Im}x) + (\text{Im}y) = \text{Im}z \) und 
aus 1.3 \( \ldots \text{Im}z \in \mathbb{R} \) 
folgt via 102-2: \( \text{Im}x = (\text{Im}z) - (\text{Im}y) \).

5.4: Aus 4.1 \( \ldots \text{Im}x \in T \) , 
aus 4.2 \( \ldots \text{Im}y \in T \) , 
aus 3.4 \( (\text{Im}x) + (\text{Im}y) = \text{Im}z \) und 
aus 1.3 \( \ldots \text{Im}z \in \mathbb{R} \) 
folgt via 102-2: \( \text{Im}y = (\text{Im}z) - (\text{Im}x) \).

...
Beweis 102-4

...  

6.1:  

\[ x \]  
\[ \equiv^3 (\text{Re} x) + i \cdot (\text{Im} x) \]  
\[ \equiv^1 ((\text{Re} z) - (\text{Re} y)) + i \cdot (\text{Im} z) \]  
\[ \equiv^2 ((\text{Re} z) - (\text{Re} y)) + i \cdot ((\text{Im} z) - (\text{Im} y)) \]  
\[ = ((\text{Re} z) + (-\text{Re} y)) + i \cdot ((\text{Im} z) - (\text{Im} y)) \]  
\[ = ((\text{Re} z) + (-\text{Re} y)) + i \cdot ((\text{Im} z) + (-\text{Im} y)) \]  
\[ 96-27 = (\text{Re} z) + \text{Re}(-y) + i \cdot ((\text{Im} z) + (-\text{Im} y)) \]  
\[ 96-27 = (\text{Re} z) + \text{Re}(-y) + i \cdot ((\text{Im} z) + \text{Im}(-y)) \]  
\[ 96-25 = z + (-y) \]  
\[ = z - y. \]  

6.2:  

\[ y \]  
\[ \equiv^4 (\text{Re} y) + i \cdot (\text{Im} y) \]  
\[ \equiv^2 ((\text{Re} z) - (\text{Re} x)) + i \cdot (\text{Im} y) \]  
\[ \equiv^4 ((\text{Re} z) - (\text{Re} x)) + i \cdot ((\text{Im} z) - (\text{Im} x)) \]  
\[ = ((\text{Re} z) + (-\text{Re} x)) + i \cdot ((\text{Im} z) - (\text{Im} x)) \]  
\[ = ((\text{Re} z) + (-\text{Re} x)) + i \cdot ((\text{Im} z) + (-\text{Im} x)) \]  
\[ 96-27 = (\text{Re} z) + \text{Re}(-x) + i \cdot ((\text{Im} z) + (-\text{Im} x)) \]  
\[ 96-27 = (\text{Re} z) + \text{Re}(-x) + i \cdot ((\text{Im} z) + \text{Im}(-x)) \]  
\[ 96-25 = z + (-x) \]  
\[ = z - x. \]  

7. c): Aus 6.1 folgt:  
\[ x = z - y. \]  

7. d): Aus 6.2 folgt:  
\[ y = z - x. \]
102-5. Interessanter Weise gilt $x - x = 0$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{C}$:

**102-5(Satz)**

*Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:*

i) $x - x = 0$.

ii) $x \in \mathbb{C}$. 

---

**RECH-Notation**
Beweis 102-5

\[ \begin{align*}
\text{i) } & \Rightarrow \text{ ii) } \quad \text{VS gleich} \\
\text{1:} & \quad \text{Aus VS gleich } "x - x = 0" \\
& \quad \text{folgt:} \\
\text{2:} & \quad \text{Aus } 1.1 "x + (-x) = 0" \text{ und} \\
& \quad \text{aus } 101-7 "0 \in \mathbb{C}" \\
& \quad \text{folgt via } 102-4: \quad x \in \mathbb{C}.
\end{align*} \]

\[ \begin{align*}
\text{ii) } & \Rightarrow \text{ i) } \quad \text{VS gleich} \\
\text{1:} & \quad \text{Aus VS gleich } "x \in \mathbb{C}" \\
& \quad \text{folgt via } 101-1: \quad (\text{Re } x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im } x \in \mathbb{R}).
\end{align*} \]

\[ \begin{align*}
\text{2.1:} & \quad \text{Aus } 1 \quad \text{Re } x \in \mathbb{R} \ldots \\
& \quad \text{folgt via } \text{AAV}: \quad (\text{Re } x) - (\text{Re } x) = 0.
\end{align*} \]

\[ \begin{align*}
\text{2.2:} & \quad \text{Aus } 1 \quad \text{Im } x \in \mathbb{R} \ldots \\
& \quad \text{folgt via } \text{AAV}: \quad (\text{Im } x) - (\text{Im } x) = 0.
\end{align*} \]

\[ \begin{align*}
\text{3:} & \quad x - x \\
& \quad = x + (-x) \\
& \quad = (\text{Re } x) + (\text{Re } x) + i \cdot (\text{Im } x) + (\text{Im } x) \\
& \quad = (\text{Re } x) - (\text{Re } x) + i \cdot (\text{Im } x) + (\text{Im } x) \\
& \quad = (\text{Re } x) - (\text{Re } x) + i \cdot (\text{Im } x) - (\text{Im } x) \\
& \quad = 2 \cdot 0 + i \cdot (\text{Im } x) - (\text{Im } x) \\
& \quad \overset{2.2}{=} 0 + i \cdot 0 \\
& \quad \overset{96-35}{=} 0.
\end{align*} \]

\[ \begin{align*}
\text{4:} & \quad \text{Aus 3} \\
& \quad \text{folgt:} \\
& \quad x - x = 0.
\end{align*} \]
102-6. Im FS: **FundamentalSatz** – werden vier Kriterien für “$x + y = 0$” formuliert. Die Beweis-Reihenfolge ist i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i):

---

**102-6(Satz) (FS: FundamentalSatz −)**

*Die Aussagen i), ii), iii), iv), v) sind äquivalent:*

i) $x + y = 0$.

ii) “$x \in \mathbb{C}$” und “$x = -y$”.

iii) “$x \in \mathbb{C}$” und “$y = -x$”.

iv) “$y \in \mathbb{C}$” und “$x = -y$”.

v) “$y \in \mathbb{C}$” und “$y = -x$”.

---

**RECH-Notation.**
Beweis 102-6 \([i] \Rightarrow [ii]\) VS gleich

1: Aus VS gleich “\(x + y = 0\)” und
   aus 101-5 “\(0 \in \mathbb{C}\)”
   folgt via 102-4:
   \[(x \in \mathbb{C}) \land (x = 0 - y).\]

3: Via 98-12 gilt:
   \[0 - y = -y.\]

4: Aus 1 “\(\ldots x = 0 - y\)” und
   aus 3 “\(0 - y = -y\)”
   folgt:
   \[x = -y.\]

5: Aus 1 “\(x \in \mathbb{C} \ldots\)” und
   aus 4 “\(x = -y\)”
   folgt:
   \[(x \in \mathbb{C}) \land (x = -y).\]

\([ii] \Rightarrow [iv]\) VS gleich

1: Aus VS gleich “\(x \in \mathbb{C} \ldots\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots x = -y\)”
   folgt:
   \[-y \in \mathbb{C}.\]

2: Aus 1 “\(-y \in \mathbb{C}\)”
   folgt via 101-9:
   \[y \in \mathbb{C}.\]

3: Aus 2 “\(y \in \mathbb{C}\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots x = -y\)”
   folgt:
   \[(y \in \mathbb{C}) \land (x = -y).\]

\([iv] \Rightarrow [v]\) VS gleich

1: Aus VS gleich “\(y \in \mathbb{C} \ldots\)”
   folgt via \(\in \text{SZ}:\)
   \[y \text{ Zahl}.\]

2: Aus VS gleich “\(\ldots x = -y\)” und
   aus 1 “\(y \text{ Zahl}\)”
   folgt via 100-11:
   \[-x = y.\]

3: Aus 2
   folgt:
   \[y = -x.\]

4: Aus VS gleich “\(y \in \mathbb{C}\)” und
   aus 3 “\(y = -x\)”
   folgt:
   \[(y \in \mathbb{C}) \land (y = -x).\]
Beweis $102$-$6$ \[ \Rightarrow \text{iii} \] \( \text{VS gleich} \)

1: Aus \( \text{VS gleich } y \in \mathbb{C} \ldots \) und aus \( \text{VS gleich } \ldots y = -x \) folgt:

\[ -x \in \mathbb{C}. \]

2: Aus 1" \( -x \in \mathbb{C} \)" folgt via 101-9:

\[ x \in \mathbb{C}. \]

3: Aus 2" \( x \in \mathbb{C} \)" und aus \( \text{VS gleich } \ldots y = -x \) folgt:

\[ (x \in \mathbb{C}) \land (y = -x). \]

\[ \text{iii} \Rightarrow \text{i} \] \( \text{VS gleich} \)

1.1: Aus \( \text{VS gleich } x \in \mathbb{C} \ldots \)
folgt via 102-5:

\[ x - x = 0. \]

1.2: Aus \( \text{VS} \)
folgt:

\[ y = -x. \]

2:

\[ x + y = x + (-x) = x - x \overset{1.1}{=} 0. \]

3: Aus 2
folgt:

\[ x + y = 0. \]

\[ \square \]
102-7. In enger Anlehnung an FS, werden Kriterien für “$x - y = 0$” angegeben:

### 102-7(Satz)

*Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent:*

i) $x - y = 0$.

ii) “$x \in \mathbb{C}$” und “$x = y$”.

iii) “$y \in \mathbb{C}$” und “$x = y$”.

------

**RECH-Notation.**

**Beweis 102-7** \([i) \Rightarrow ii)] \)

VS gleich $x - y = 0$.

1: Aus VS folgt: $x + (-y) = 0$.

2: Aus 1“$x + (-y) = 0$” folgt via FS: $(x \in \mathbb{C}) \land (\neg y \in \mathbb{C}) \land (x = -(y))$.

3: Aus 2“…$\neg y \in \mathbb{C}$…” folgt via 101-9: $y \in \mathbb{C}$.

4: Aus 3“$y \in \mathbb{C}$” folgt via $\in\SZ$: $y$ Zahl.

5: Aus 2“…$x = -(y)$” und aus 4“$y$ Zahl” folgt via 100-11: $x = y$.

6: Aus 2“$x \in \mathbb{C}$…” und aus 5“$x = y$” folgt: $(x \in \mathbb{C}) \land (x = y)$. 
Beweis 102-7 (ii) ⇒ (iii) VS gleich

1: Aus VS gleich “...x = y” und aus VS gleich “x ∈ C...” folgt:

2: Aus 1“y ∈ C” und aus VS gleich “...x = y” folgt:

(iii) ⇒ (i) VS gleich

1: Aus VS gleich “y ∈ C...” folgt via 102-5:

2: Aus 1“y − y = 0” und aus VS gleich “...x = y” folgt:
102-8. Hier wird eine “T-Version” vom FS formuliert. Interessanter Weise genügt es in i), dass \( x \) oder \( y \) aus \( T \) sind. Die Beweis-Reihenfolge ist i) \( \Rightarrow \) ii) \( \Rightarrow \) iv) \( \Rightarrow \) v) \( \Rightarrow \) iii) \( \Rightarrow \) i):

\[
102-8(Satz)
\]

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v) sind äquivalent:

i) “\( x + y = 0 \)” und “\( (x \in T) \lor (y \in T) \)”.

ii) “\( x \in \mathbb{R} \)” und “\( x = -y \)”.

iii) “\( x \in \mathbb{R} \)” und “\( y = -x \)”.

iv) “\( y \in \mathbb{R} \)” und “\( x = -y \)”.

v) “\( y \in \mathbb{R} \)” und “\( y = -x \)”.

RECH-Notation.
Beweis 102-8 \( (i) \Rightarrow (ii) \) VS gleich \( (x + y = 0) \land ((x \in T) \lor (y \in T)) \).

1: Aus VS gleich “\( x + y = 0 \)…” folgt via \( \text{FS}^- \):
\( (x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \land (x = -y) \).

2.1: Aus 1 “\( (x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \)…” und aus VS gleich “\( \ldots (x \in T) \lor (y \in T) \)” folgt:
\( (x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \land (x \in T) \lor (x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \land (y \in T) \).

**Fallunterscheidung**

2.1.1. Fall

3: Aus 2.1.1. Fall “\( \ldots x \in T \)” und aus 2.1.1. Fall “\( x \in \mathbb{C} \)” folgt via \( \land \text{SZ} \):
\( x \in \mathbb{R} \).

2.1.2. Fall

3: Aus 2.1.2. Fall “\( \ldots y \in T \)” und aus 2.1.2. Fall “\( \ldots y \in \mathbb{C} \)” folgt via \( \land \text{SZ} \):
\( y \in \mathbb{R} \).

4: Aus 3 “\( y \in \mathbb{R} \)” folgt via 100-6:
\( -y \in \mathbb{R} \).

5: Aus 1 “\( \ldots x = -y \)” und aus 4 “\( -y \in \mathbb{R} \)” folgt:
\( x \in \mathbb{R} \).

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: \( A1 \text{ bij } “x \in \mathbb{R}” \)

2.2: Aus A1 gleich “\( x \in \mathbb{R} \)” und aus 1 “\( \ldots x = -y \)” folgt:
\( (x \in \mathbb{R}) \land (x = -y) \).
Beweis 102-8 \[\text{ii)} \Rightarrow \text{iv)}\] VS gleich

1: Aus VS gleich “\(\ldots x = -y\)“ und
   aus VS gleich “\(x \in \mathbb{R}\ldots\)"
   folgt:
   \(-y \in \mathbb{R}\).

2: Aus 1 “\(-y \in \mathbb{R}\)”
   folgt via 100-6:
   \(y \in \mathbb{R}\).

3: Aus 2 “\(y \in \mathbb{R}\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots x = -y\)"
   folgt:
   \((y \in \mathbb{R}) \land (x = -y)\).

\[\text{iv)} \Rightarrow \text{v)}\] VS gleich

1: Aus VS gleich “\(y \in \mathbb{R}\ldots\)”
   folgt via \(\in \text{SZ}\):
   \(y \in \mathbb{C}\).

2: Aus 1 “\(y \in \mathbb{C}\ldots\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots x = -y\)"
   folgt via \(\text{FS}^-\):
   \(y = -x\).

3: Aus VS gleich “\(y \in \mathbb{R}\ldots\)” und
   aus 2 “\(y = -x\)”
   folgt:
   \((y \in \mathbb{R}) \land (y = -x)\).

\[\text{v)} \Rightarrow \text{iii)}\] VS gleich

1: Aus VS gleich “\(\ldots y = -x\)“ und
   aus VS gleich “\(y \in \mathbb{R}\ldots\)”
   folgt:
   \(-x \in \mathbb{R}\).

2: Aus 1 “\(-x \in \mathbb{R}\)”
   folgt via 100-6:
   \(x \in \mathbb{R}\).

3: Aus 2 “\(x \in \mathbb{R}\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots y = -x\)”
   folgt:
   \((x \in \mathbb{R}) \land (y = -x)\).
Beweis 102-8 (iii) ⇒ i) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “\( x \in \mathbb{R} \)…”
folgt via \( \in_{\mathbb{SZ}} \):
\( x \in T \).

1.2: Aus VS gleich “\( x \in \mathbb{R} \)…”
folgt via \( \in_{\mathbb{SZ}} \):
\( x \in \mathbb{C} \).

2.1: Aus 1.1
folgt:
\( (x \in T) \lor (y \in T) \).

2.2: Aus 1.2 “\( x \in \mathbb{C} \)” und
aus VS gleich “…\( y = -x \)”
folgt via \( \text{FS}_- \):
\( x + y = 0 \).

3: Aus 2.2 und
aus 2.1
folgt:
\( (x + y = 0) \land ((x \in T) \lor (y \in T)) \).

\( \square \)
102-9. Nun wird eine “T-Version” von 102-7 gegeben. In i) genügt es, dass \( x \) oder \( y \) aus \( \mathbb{T} \) sind:

|  |
|---|---|
| **102-9(Satz)** |  |

Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent:

i) “\( x - y = 0 \) und “\( (x \in \mathbb{T}) \lor (y \in \mathbb{T}) \)”.

ii) “\( x \in \mathbb{R} \) und “\( x = y \)”.

iii) “\( y \in \mathbb{R} \) und “\( x = y \)”.

---

RECH-Notation.
Beweis 102-9 \([i] \Rightarrow [ii]\) VS gleich \((x - y = 0) \land ((x \in T) \lor (y \in T)).\)

1: Aus VS gleich \(" x - y = 0\ldots\)"
folgt via 102-7:
\((x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \land (x = y).\)

2.1: Aus 1\(" (x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C})\ldots\)" und
aus VS gleich \(" \ldots(x \in T) \lor (y \in T)\)"
folgt:
\((x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \land (x \in T) \lor (y \in T).\)

\[\text{Fallunterscheidung}\]

\[\boxed{2.1.1.\text{Fall}}\]
\((x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \land (x \in T).\)
Aus 2.1.1.\text{Fall}"\ldots x \in T" und
aus 2.1.1.\text{Fall}"x \in \mathbb{C}\ldots"
folgt via \(\land \text{SZ}:\)
\(x \in \mathbb{R}.\)

\[\boxed{2.1.2.\text{Fall}}\]
\((x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C}) \land (y \in T).\)
3: Aus 2.1.2.\text{Fall}"\ldots y \in T" und
aus 2.1.2.\text{Fall}"\ldots y \in \mathbb{C}\ldots"
folgt via \(\land \text{SZ}:\)
\(y \in \mathbb{R}.\)
4: Aus 1"\ldots x = y" und
aus 3"y \in \mathbb{R}"
folgt:
\(x \in \mathbb{R}.\)

\[\text{Ende Fallunterscheidung}\]
In beiden Fällen gilt:
\(\boxed{A1} \ "x \in \mathbb{R}"\)

2.2: Aus A1 gleich \(" x \in \mathbb{R}"\) und
aus 1"\ldots x = y"
folgt:
\((x \in \mathbb{R}) \land (x = y).\)
Beweis 102-9 \([\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}]\) VS gleich
\((x \in \mathbb{R}) \land (x = y)\).

1: Aus VS gleich “\(\ldots x = y\)” und
aus VS gleich “\(x \in \mathbb{R}\)”
folgt:
\(y \in \mathbb{R}\).

2: Aus \(1^\circ \ y \in \mathbb{R}\)” und
aus VS gleich “\(\ldots x = y\)”
folgt:
\((y \in \mathbb{R}) \land (x = y)\).

\([\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}]\) VS gleich
\((y \in \mathbb{R}) \land (x = y)\).

1.1: Aus VS gleich “\(y \in \mathbb{R}\)”
folgt via \(\in \mathbb{S}Z\):
\(y \in \mathbb{T}\).

1.2: Aus VS gleich “\(y \in \mathbb{R}\)”
folgt via \(\in \mathbb{S}Z\):
\(y \in \mathbb{C}\).

2.1: Aus 1.1
folgt:
\((x \in \mathbb{T}) \lor (y \in \mathbb{T})\).

2.2: Aus 1.2 “\(y \in \mathbb{C}\)” und
aus VS gleich “\(\ldots x = y\)”
folgt via 102-7:
\(x - y = 0\).

3: Aus 2.2 und
aus 2.1
folgt:
\((x - y = 0) \land ((x \in \mathbb{T}) \lor (y \in \mathbb{T}))\).
}\]
102-10. Da 1, i komplexe Zahlen sind, folgt aus 102-5 das vorliegende Resultat. Die Aussage 0 − 0 = 0 ist bereits seit 98-15 bekannt:

\[
\begin{align*}
\textbf{102-10(Satz)} \\
\text{a) } 1 - 1 &= 0. \\
\text{b) } i - i &= 0.
\end{align*}
\]

\[\text{RECH-Notation.}\]

\textbf{Beweis 102-10}

1.a): Aus 101-5 “1 ∈ \mathbb{C}” folgt via 102-5: \(1 - 1 = 0.\)

1.b): Aus 101-5 “i ∈ \mathbb{C}” folgt via 102-5: \(i - i = 0.\)

□
102-11. In der **AKR: Additive KürzungsRegel** wird Hinreichendes dafür angegeben, dass aus $x + a = y + a$ die Aussage $x = y$ folgt. Interessanter Weise muss - unter anderem - nur $x$ Zahl oder $y$ Zahl gefordert werden:

**102-11(Satz) (AKR: Additive KürzungsRegel)**

*Es gelte:

$\rightarrow x + a = y + a$.  

$x$ Zahl.  

oder  

$y$ Zahl.  

$\rightarrow a \in \mathbb{C}$.  

*Dann folgt:  

a) $x$ Zahl.  

b) $y$ Zahl.  

c) $x = y$.  

RECH-Notation.*
Beweis 102-11

1.1: Aus $\rightarrow^a \in \mathbb{C}$ folgt via $\in \mathbb{SZ}$:

$$a \in \mathbb{C}$$

1.2: Nach $\rightarrow$ gilt:

$$x \in \mathbb{Z} \lor y \in \mathbb{Z}.$$
Beweis 102-11 . . .

1. a): Aus A2
folgt:

1. b): Aus A2
folgt:

1.3: Aus A2 gleich “x Zahl...”
folgt via FSA0:

1.4: Aus A2 gleich “...y Zahl”
folgt via FSA0:

1.5: Aus \( \rightarrow \) “\( a \in \mathbb{C} \)”
folgt via 102-5:

2:

\[
\begin{align*}
x & \quad \overset{1.3}{=} x + 0 \\
& \quad \overset{1.5}{=} x + (a - a) \\
& \quad = x + (a + (-a)) \\
\text{FSA} & \quad = (x + a) + (-a) \\
\overset{\rightarrow}{=} & \quad (y + a) + (-a) \\
\text{FSA} & \quad = y + (a + (-a)) \\
& \quad = y + (a - a) \\
& \quad \overset{1.5}{=} y + 0 \\
& \quad \overset{1.4}{=} y.
\end{align*}
\]

3. c): Aus 2
folgt:

\[
\begin{align*}
x & = y.
\end{align*}
\]

\[\square\]
102-12. Mit der **AVR: Additive VerschiebungsRegel** steht Hinreichendes zur Verfügung, um aus $x + a = y$ die Aussage $x = y - a$ folgt. Interessanter Weise muss - unter anderem - nur $x$ Zahl oder $y$ Zahl gefordert werden:

---

102-12 **Satz** (AVR: Additive VerschiebungsRegel)

*Es gelte:*

- $x + a = y$.

$$
\begin{array}{c}
\text{x Zahl.} \\
\text{oder} \\
\text{y Zahl.}
\end{array}
$$

- $a \in \mathbb{C}$.

*Dann folgt:*

a) $x$ Zahl.

b) $y$ Zahl.

c) $x = y - a$.

---

**RECH-Notation.**
**Beweis 102-12**

1.1: Aus $\rightarrow “a \in \mathbb{C}”$ folgt via $\in \mathbb{SZ}$:  

<table>
<thead>
<tr>
<th>A1</th>
<th>“a Zahl”</th>
</tr>
</thead>
</table>

1.2: Nach $\rightarrow$ gilt: 

$$(x \text{ Zahl}) \lor (y \text{ Zahl}).$$

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fallunterscheidung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td><strong>1.2.1.Fall</strong></td>
</tr>
<tr>
<td>x Zahl.</td>
</tr>
<tr>
<td>2: Aus 1.2.1.Fall “x Zahl” und aus A1 gleich “a Zahl” folgt via 96-13:</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2“x + a Zahl” und aus $\rightarrow “x + a = y”$ folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 1.2.1.Fall “x Zahl” und aus 3“y Zahl” folgt:</td>
</tr>
</tbody>
</table>

| **1.2.2.Fall** |
| y Zahl. |
| 2: Aus $\rightarrow “x + a = y”$ und aus 1.2.2.Fall “y Zahl” folgt: | $x + a$ Zahl. |
| 3: Aus 2“x + a Zahl” folgt via 96-13: | $x$ Zahl. |
| 4: Aus 3“x Zahl” und aus 1.2.2.Fall “y Zahl” folgt: | $(x \text{ Zahl}) \land (y \text{ Zahl})$. |

**Ende Fallunterscheidung** | In beiden Fällen gilt: 

| A2 | “(x Zahl) \land (y Zahl)” |

...
Beweis 102-12 ... 

1.a): Aus A2 folgt:

   \[ x \text{ Zahl.} \]

1.b): Aus A2 folgt:

   \[ y \text{ Zahl.} \]

1.3: Aus A2 gleich “\( x \text{ Zahl...} \)” folgt via FSA0:

   \[ x = x + 0. \]

1.4: Aus \( a \in \mathbb{C} \) folgt via 102-5:

   \[ a - a = 0. \]

2:

\[
\begin{align*}
\text{1.3 } & \quad x + 0 \\
\text{1.4 } & \quad x + (a - a) \\
= & \quad x + (a + (-a)) \\
\text{FSA } & \quad (x + a) + (-a) \\
\end{align*}
\]

\[ \quad \Rightarrow y + (-a) \]

\[ \quad = y - a. \]

3.c): Aus 2 folgt:

\[ x = y - a. \]

\[ \Box \]
102-13. Nun wird eine Folgerung aus AVR gezogen:

**102-13(Satz)**

*Es gelte:*

\[ x - a = y. \]

\[ \rightarrow \]  

\begin{tabular}{l}
\textit{x Zahl.} \\
\vspace{0.5em}
\hline
\textbf{oder} \\
\vspace{0.5em}
\textit{y Zahl.}
\end{tabular}

\[ \rightarrow \]  

\[ a \in \mathbb{C}. \]

*Dann folgt:*

\[ a) \quad x \text{ Zahl.} \]

\[ b) \quad y \text{ Zahl.} \]

\[ c) \quad x = y + a. \]

---

RECH-Notation.
Beweis 102-13

1: Aus $\rightarrow " a \in C "$ folgt via 101-9: $-a \in C$.

2: Aus $\rightarrow " x - a = y "$ folgt: $x + (-a) = y$.

3: Aus 2$" x + (-a) = y "$, aus $\rightarrow " (x \ Zahl) \lor (y \ Zahl) "$ und aus 1$"-a \in C "$ folgt via AVR: $(x \ Zahl) \land (y \ Zahl) \land (x = y - (-a))$.

4.a): Aus 3 folgt: $x \ Zahl$.

4.b): Aus 3 folgt: $y \ Zahl$.

4.1: Aus $\rightarrow " a \in C "$ folgt via $\in SZ$: $a \ Zahl$.

5: Aus 4.1$" a \ Zahl "$ folgt via $FS$: $-(-a) = a$.

6: Aus 3$" \ldots x = y - (-a) "$ folgt: $x = y + (-(-a))$.

7.c): Aus 6$" x = y + (-(-a)) "$ und aus 5$"-(-a) = a "$ folgt: $x = y + a$. □
102-14. Wie im FS- und den begleitenden Resultaten angedeutet, kommt der Aussage \( x + y = 0 \) in Bezug auf \( x, y \) spezielle Bedeutung zu. Dies wird auch durch das nunmehrige Resultat bestätigt:

**102-14(Satz)**

*Unter der Voraussetzung ...*

\[ \rightarrow x + y = 0. \]

*... sind die Aussagen i), ii) äquivalent:*

i) \( x = 0. \)

ii) \( y = 0. \)

---

RECH-Notation.
Beweis 102-14 \([\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}]\) VS gleich

\begin{align*}
1: & \text{ Aus } \rightarrow "x + y = 0" \quad x = 0. \\
& \text{ folgt via FS } \leftarrow : \\
2: & \text{ Aus } 1" y \in \mathbb{C}" \quad y \in \mathbb{C}. \\
& \text{ folgt via } \in_{\text{SZ}}: \\
3: & \text{ Aus } 2" y \text{ Zahl}" \quad y \text{ Zahl.} \\
& \text{ folgt via } \text{FSA0}: \\
4: & \\
5: & \text{ Aus } 4 \quad y = 0. \\

\end{align*}

\[\text{ii) } \Rightarrow \text{i)} \text{ VS gleich} \]

\begin{align*}
1: & \text{ Aus } \rightarrow "x + y = 0" \quad x \in \mathbb{C}. \\
& \text{ folgt via FS } \leftarrow : \\
2: & \text{ Aus } 1" x \in \mathbb{C}" \quad x \text{ Zahl.} \\
& \text{ folgt via } \in_{\text{SZ}}: \\
3: & \text{ Aus } 2" x \text{ Zahl}" \quad x + 0 = x. \\
& \text{ folgt via } \text{FSA0}: \\
4: & \\
5: & \text{ Aus } 4 \quad x = 0. \\
\end{align*}
102-15. Wie im FS— und den begleitenden Resultaten angedeutet, kommt der Aussage \(x + y = 0\) in Bezug auf \(x, y\) spezielle Bedeutung zu. Dies wird auch durch das nunmehrige Resultat bestätigt:

\begin{boxed}{102-15(Satz)}
Unter der Voraussetzung …
\[\rightarrow x + y = 0.\]
… sind die Aussagen i), ii) äquivalent:

i) \(0 \neq x\).

ii) \(0 \neq y\).
\end{boxed}

RECH-Notation.

Beweis 102-15

1: Aus \(\rightarrow \) “\(x + y = 0\)” folgt via 102-14:
\[(x = 0) \iff (y = 0).\]

2: Aus 1 folgt:
\[\neg(x = 0) \iff \neg(y = 0).\]

3: Aus 2 folgt:
\[(0 \neq x) \iff (0 \neq y).\]
\(\square\)
FS−+: FundamentalSatz −+.
+SZ: +Satz Zahlen.
103-1. Nun wird der erste von vier Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum Fundamentalsatz \( \rightarrow \) bewiesen:

\[
\text{103-1(Satz)}
\]

\[
\text{Aus } x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R} \text{ folgt } -(x + y) = -x - y.
\]

\text{RECH-Notation}.
Beweis \ref{beweis:VS_gleich} VS gleich

1.1: Aus VS gleich \(x \in \mathbb{R} \ldots\) folgt via \(\in \mathbb{S}Z\):
\(x \in \mathbb{C}\).

1.2: Aus VS gleich \(\ldots y \in \mathbb{R}\) folgt via \(\in \mathbb{S}Z\):
\(y \in \mathbb{C}\).

2.1: Aus 1.1 \("x \in \mathbb{C}\"") folgt via \ref{102-5}:
\(x - x = 0\).

2.2: Aus 1.2 \("y \in \mathbb{C}\"") folgt via \ref{102-5}:
\(y - y = 0\).

3: \((x + y) + (-x - y)\)
\(= (x + y) + ((-x) - y)\)
\(= (x + y) + ((-x) + (-y))\)
\(\overset{\text{FSA}}{=} (y + x) + ((-x) + (-y))\)
\(\overset{\text{FSA}}{=} y + (x + ((-x) + (-y)))\)
\(\overset{\text{FSA}}{=} y + ((x + (-x)) + (-y))\)
\(= y + ((x - x) + (-y))\)
\(\overset{2.1}{=} y + (0 + (-y))\)
\(= y + (0 - y)\)
\(\overset{98-12}{=} y + (-y)\)
\(= y - y\)
\(\overset{2.2}{=} 0\).

4: Aus 3 \"\((x + y) + (-x - y) = \ldots = 0\)" folgt via \textbf{FS-}:
\(-x - y = -(x + y)\).

5: Aus 3 folgt:
\(-(x + y) = -x - y\).
103-2. Hier wird der zweite von vier Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum Fundamentalsatz --- etabliert:

**103-2(Satz)**

*Aus "*x* ∈ *S*" und "*y* ∈ *S*" folgt "*(x + y) = −x − y*".*

---

**RECH-Notation.**

Beweis 103-2 VS gleich

**1.1:** Aus VS gleich "*x* ∈ *S*..." folgt via 95-15:

(x ∈ ℝ) ∨ (x = +∞) ∨ (x = −∞).

**1.2:** Aus VS gleich "...*y* ∈ *S*" folgt via 95-15:

(y ∈ ℝ) ∨ (y = +∞) ∨ (y = −∞).

**2:** Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

(x ∈ ℝ) ∧ (y ∈ ℝ)

∧ (x ∈ ℝ) ∧ (y = +∞)

∧ (x ∈ ℝ) ∧ (y = −∞)

∧ (x = +∞) ∧ (y ∈ ℝ)

∧ (x = +∞) ∧ (y = +∞)

∧ (x = +∞) ∧ (y = −∞)

∧ (x = −∞) ∧ (y ∈ ℝ)

∧ (x = −∞) ∧ (y = +∞)

∧ (x = −∞) ∧ (y = −∞).

**Fallunterscheidung**

**2.1.Fall**

Aus 2.1.Fall "*x* ∈ ℝ..." und
aus 2.1.Fall "...*y* ∈ ℝ"
folgt via 103-1:

−(x + y) = −x − y.

...
**Beweis 103-2** VS gleich \((x \in S) \land (y \in S)\).

...  

**Fallunterscheidung**  

...  

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.2 Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.2 Fall folgt: (y = +\infty).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.2 Fall “(x \in \mathbb{R})” folgt via AAVI: (x + (+\infty) = +\infty).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.3: Aus 2.2 Fall “(x \in \mathbb{R})” folgt via 97-3: (-x - (+\infty) = -x - (+\infty)) (\equiv) (-\infty) (\equiv) (-x) (\equiv) (-x - y).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

| 4: \((-x + y) \equiv -(-x + (+\infty)) \equiv -(+\infty) \equiv -\infty \equiv -x - (+\infty)\) AAIVI \(\equiv\) \(-x - y\) |

| 6: Aus 5 folgt: \(- (x + y) = -x - y\). |

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.3 Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.3 Fall folgt: (y = -\infty).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.3 Fall “(x \in \mathbb{R})” folgt via AAVI: (x + (-\infty) = -\infty).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.3: Aus 2.3 Fall “(x \in \mathbb{R})” folgt via 97-3: (-x - (-\infty) = +\infty).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

| 4: \((-x + y) \equiv -(-x + (-\infty)) \equiv -(-\infty) \equiv +\infty \equiv -x - (-\infty)\) AAIVI \(\equiv\) \(-x - y\) |

| 6: Aus 5 folgt: \(- (x + y) = -x - y\). |
Beweis 103-2 VS gleich $(x \in S) \land (y \in S)$.

Fallunterscheidung

2.4.Fall $(x = +\infty) \land (y \in \mathbb{R})$.

3.1: Aus 2.4.Fall folgt: $x = +\infty$.

3.2: Aus 2.4.Fall "... $y \in \mathbb{R}$" folgt via $\text{AAVI}$: $(+\infty) + y = +\infty$.

3.3: Aus 2.4.Fall "... $y \in \mathbb{R}$" folgt via 97-3:

4: $-(x + y) \overset{3.1}{=} -((+\infty) + y) \overset{3.2}{=} -(+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty \overset{3.3}{=} -(+\infty) - y \overset{3.1}{=} -x - y$.

6: Aus 5 folgt: $-(x + y) = -x - y$.

2.5.Fall $(x = +\infty) \land (y = +\infty)$.

3.1: Aus 2.5.Fall folgt: $x = +\infty$.

3.2: Aus 2.5.Fall folgt: $y = +\infty$.

4: $-(x + y) \overset{3.1}{=} -((+\infty) + y) \overset{3.2}{=} -(+\infty) + (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -(+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty \overset{\text{AAVI}}{=} -x + ((-\infty) + (+\infty)) \overset{3.1}{=} -x + (-\infty) \overset{3.2}{=} -x + (-y) = -x - y$.

5: Aus 4 folgt: $-(x + y) = -x - y$. 

...
Beweis 103-2 VS gleich 

\((x \in \mathbb{S}) \land (y \in \mathbb{S})\).

... 

**Fallunterscheidung**

... 

**2.6.Fall**

\((x = +\infty) \land (y = -\infty)\).

3.1: Aus 2.6.Fall folgt:  
\(x = +\infty\).

3.2: Aus 2.6.Fall folgt:  
\(y = -\infty\).

4: \(- (x + y) \overset{3.1}{=} -((+\infty) + y) \overset{3.2}{=} -((+\infty) + (-\infty)) \overset{\text{AAVI}}{=} -\text{nan} \overset{97-4}{=} -(+\infty) - (-\infty) \overset{3.1}{=} -x - (-\infty) \overset{3.2}{=} -x - y.\)

5: Aus 4 folgt:  
\(- (x + y) = -x - y.\)

**2.7.Fall**

\((x = -\infty) \land (y \in \mathbb{R})\).

3.1: Aus 2.7.Fall folgt:  
\(x = -\infty\).

3.2: Aus 2.7.Fall "... \(y \in \mathbb{R}\)" folgt via \(\text{AAVI}\):  
\((-\infty) + y = -\infty.\)

3.3: Aus 2.7.Fall "... \(y \in \mathbb{R}\)" folgt via 97-3:  
\((-\infty) - y = +\infty.\)

4: \(- (x + y) \overset{3.1}{=} -((-\infty) + y) \overset{3.2}{=} -((-\infty) + (-\infty)) \overset{\text{AAVI}}{=} +\infty \overset{3.3}{=} -(-\infty) - y \overset{3.1}{=} -x - y.\)

6: Aus 5 folgt:  
\(- (x + y) = -x - y.\)

...
Beweis 103-2 vs gleich $(x \in S) \land (y \in S)$.

... 

Fallunterscheidung

... 

| Fall       | Bedingung                                                                 | 3.1: Aus 2.8 Fall folgt: | 3.2: Aus 2.8 Fall folgt: | 4: 
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2.8.Fall</td>
<td>$(x = -\infty) \land (y = +\infty)$</td>
<td>$x = -\infty$</td>
<td>$y = +\infty$</td>
<td>$-(x+y) \overset{\text{AA VI}}{=} -(( -\infty ) + y) \overset{\text{AA VI}}{=} -(-\infty) + (+\infty) \overset{\text{AA VI}}{=} -\text{nan}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>$\overset{\text{AA VI}}{=} \text{nan} \overset{\text{AA VI}}{=} -(-\infty) - (+\infty) \overset{\text{AA VI}}{=} -x - (+\infty) \overset{\text{AA VI}}{=} -x - y$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>$-(x+y) = -x - y$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

| Fall       | Bedingung                                                                 | 3.1: Aus 2.9 Fall folgt: | 3.2: Aus 2.9 Fall folgt: | 4: 
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2.9.Fall</td>
<td>$(x = -\infty) \land (y = -\infty)$</td>
<td>$x = -\infty$</td>
<td>$y = -\infty$</td>
<td>$-(x+y) \overset{\text{AA VI}}{=} -(( -\infty ) + y) \overset{\text{AA VI}}{=} -(-\infty) + (-\infty) \overset{\text{AA VI}}{=} -(\text{nan})$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>$\overset{\text{AA VI}}{=} +\infty \overset{\text{AA VI}}{=} (+\infty) + (+\infty) \overset{\text{AA VI}}{=} (-\infty) + (-\infty) \overset{\text{AA VI}}{=} ( -(-\infty) ) + ( -(-\infty) )$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>$\overset{\text{AA VI}}{=} (-x) + (-(-\infty)) \overset{\text{AA VI}}{=} (-x) + (-y) = (-x) - y = -x - y$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>$-(x+y) = -x - y$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $-(x+y) = -x - y$. 

\[\square\]
103-3. Nun wird der dritte von vier Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum Fundamentalsatz \(\rightarrow\) bewiesen:

**103-3(Satz)**

Aus “\(x \in T\)” und “\(y \in T\)” folgt “\(-(x + y) = -x - y\)”.

---

**RECH-Notation**

Beweis 103-3 \(\forall \mathbf{S}\) gleich

\[(x \in T) \land (y \in T).\]

1.1: Aus \(\forall \mathbf{S}\) gleich “\(x \in T\)...”
folgt via 95-16:

\[(x \in S) \lor (x = \text{nan}).\]

1.2: Aus \(\forall \mathbf{S}\) gleich “...\(y \in T\)”
folgt via 95-16:

\[(y \in S) \lor (y = \text{nan}).\]

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:

\[(x \in S) \land (y \in S)
\lor (x \in S) \land (y = \text{nan})
\lor (x = \text{nan}) \land (y \in S)
\lor (x = \text{nan}) \land (y = \text{nan}).\]

**Fallunterscheidung**

2.1.Fall

Aus 1.2.Fall “\(x \in S\)...” und
aus 1.2.Fall “...\(y \in S\)”
folgt via 103-2:

\[-(x + y) = -x - y.\]

...
Beweis 103-3 VS gleich 

\[(x \in \mathbb{T}) \land (y \in \mathbb{T}).\]

... 

**Fallunterscheidung**

... 

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.2. Fall</th>
<th>[(x \in S) \land (y = \text{nan}).]</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus VS gleich &quot;(x \in \mathbb{T})...&quot; folgt via AAVI:</td>
<td>[x + \text{nan} = \text{nan}.]</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus VS gleich &quot;(x \in \mathbb{T})...&quot; folgt via 100-14:</td>
<td>[\text{nan} = -x + \text{nan} = x - \text{nan} = -x - y.]</td>
</tr>
<tr>
<td>3.3: Aus 2.2. Fall folgt:</td>
<td>[y = \text{nan}.]</td>
</tr>
<tr>
<td>4: [-(x + y) \equiv -(x + \text{nan}) \equiv -\text{nan} \equiv -x + \text{nan} \equiv -x - y.]</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 4 folgt:</td>
<td>[-(x + y) = -x - y.]</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.3. Fall</th>
<th>[(x = \text{nan}) \land (y \in S).]</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus VS gleich &quot;...(y \in \mathbb{T})&quot; folgt via AAVI:</td>
<td>[\text{nan} + y = \text{nan}.]</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus VS gleich &quot;...(y \in \mathbb{T})&quot; folgt via 100-14:</td>
<td>[\text{nan} - y = \text{nan}.]</td>
</tr>
<tr>
<td>3.3: Aus 2.3. Fall folgt:</td>
<td>[x = \text{nan}.]</td>
</tr>
<tr>
<td>4: [-(x + y) \equiv -(\text{nan} + y) \equiv -\text{nan} \equiv -x - y \equiv -(x - y).]</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>6: Aus 5 folgt:</td>
<td>[-(x + y) = -x - y.]</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Beweis 103-3 VS gleich 

\((x \in \mathbb{T}) \land (y \in \mathbb{T})\).

... 

Fallunterscheidung 

... 

\[ \begin{align*} 
2.4.\text{Fall} & \quad (x = \text{nan}) \land (y = \text{nan}). \\
3.1: & \quad \text{Aus } 2.4.\text{Fall folgt:} \quad x = \text{nan}. \\
3.2: & \quad \text{Aus } 2.4.\text{Fall folgt:} \quad y = \text{nan}. \\
4: & \quad -(x + y) \overset{3.1}{=} -(\text{nan} + y) \overset{3.2}{=} -(\text{nan} + \text{nan}) \overset{97-1}{=} -\text{nan} \overset{\text{AAVI}}{=} \text{nan} \\
 & \quad 97 \overset{1}{=} \text{nan} + \text{nan} \overset{\text{AAVI}}{=} (-\text{nan}) + (-\text{nan}) \overset{3.1}{=} (-x) + (-\text{nan}) \\
 & \quad \overset{3.2}{=} (-x) + (-y) = (-x) - y = -x - y. \\
5: & \quad \text{Aus } 4 \text{ folgt:} \quad -(x + y) = -x - y. 
\end{align*} \]

Ende Fallunterscheidung 

In allen Fällen gilt: 

\[-(x + y) = -x - y. \]

\[ \square \]
103-4. Hiermit wird der letzte der vier Hilfs-Sätze auf dem Weg zum FundamentalSatz \( \Rightarrow \) bewiesen:

\[
\text{103-4(Satz)}
\]
\[
\text{Aus } \text{"x Zahl" und } \text{"y Zahl" folgt } -(x + y) = -x - y\text{.}
\]

RECH-Notation.

Beweis 103-4 \( \text{VS} \) gleich \( (x \text{ Zahl}) \land (y \text{ Zahl}) \).

1.1: Aus \( \text{VS} \) gleich \( \text{"x Zahl..."} \)

folgt via 96-9:

\( (\text{Re} x \in \mathbb{T}) \land (\text{Im} x \in \mathbb{T}) \).

1.2: Aus \( \text{VS} \) gleich \( \text{"...y Zahl"} \)

folgt via 96-9:

\( (\text{Re} y \in \mathbb{T}) \land (\text{Im} y \in \mathbb{T}) \).

2.1: Aus 1.1 \( \text{"}\text{Re} x \in \mathbb{T} \ldots\" \) und

aus 1.2 \( \text{"}\text{Re} y \in \mathbb{T} \ldots\" \)

folgt via 103-3:

\( -(\text{Re} x + (\text{Re} y)) = -(\text{Re} x) - (\text{Re} y) \).

2.2: Aus 1.1 \( \text{"}\text{Im} x \in \mathbb{T} \ldots\" \) und

aus 1.2 \( \text{"}\text{Im} y \in \mathbb{T} \ldots\" \)

folgt via 103-3:

\( -(\text{Im} x + (\text{Im} y)) = -(\text{Im} x) - (\text{Im} y) \).

...
Beweis 103-4 VS gleich

\((x \text{ Zahl}) \land (y \text{ Zahl}).\)

\[3:\]

\[-(x + y)\]

\[96-27 \quad (-\text{Re}(x + y)) + i \cdot (-\text{Im}(x + y))\]

\[96-25 \quad (-((\text{Re}x) + (\text{Re}y))) + i \cdot (-\text{Im}(x + y))\]

\[96-25 \quad (-((\text{Re}x) + (\text{Re}y))) + i \cdot (-((\text{Im}x) + (\text{Im}y)))\]

\[2.1 \quad ((-\text{Re}x) - (\text{Re}y)) + i \cdot (-((\text{Im}x) + (\text{Im}y)))\]

\[2.2 \quad ((-\text{Re}x) - (\text{Re}y)) + i \cdot (-((\text{Im}x) - (\text{Im}y)))\]

\[2.2 \quad ((-\text{Re}x) - (\text{Re}y)) + i \cdot (-((\text{Im}x) - (\text{Im}y)))\]

\[2.2 \quad ((-\text{Re}x) - (\text{Re}y)) + i \cdot ((-\text{Im}x) - (-\text{Im}y))\]

\[2.2 \quad ((-\text{Re}x) + (-\text{Re}y)) + i \cdot ((-\text{Im}x) + (-\text{Im}y))\]

\[96-27 \quad ((\text{Re}(-x)) + (-\text{Re}y)) + i \cdot ((-\text{Im}x) + (-\text{Im}y))\]

\[96-27 \quad ((\text{Re}(-x)) + (\text{Re}(-y))) + i \cdot ((-\text{Im}x) + (-\text{Im}y))\]

\[96-27 \quad ((\text{Re}(-x)) + (\text{Re}(-y))) + i \cdot ((\text{Im}(-x)) + (-\text{Im}y))\]

\[96-27 \quad ((\text{Re}(-x)) + (\text{Re}(-y))) + i \cdot ((\text{Im}(-x)) + (\text{Im}(-y)))\]

\[96-25 \quad (-x) + (-y)\]

\[= (-x) - y\]

\[= -x - y.\]

\[4:\]

Aus 3 folgt:

\[-(x + y) = -x - y.\]
103-5. Im **FS**---: **FundamentalSatz** --- sind die - vermutlich vertrauten - Regeln zum Umgang mit mns und der Summe - inklusive Vorzeichenwechsel - gesammelt. Interessanter Weise gelten diese Regeln für alle \( x, y \):

<table>
<thead>
<tr>
<th><strong>103-5(Satz) (FS</strong>---: <strong>FundamentalSatz</strong> ---)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) ((-x + y) = -x - y = -y - x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>b) ((-x - y) = -x + y = y - x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>c) ((-x + y) = x - y = -y + x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>d) ((-x - y) = x + y = y + x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>e) (x - (-y) = x + y = y + x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>f) (-x - (-y) = -x + y = y - x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>g) ((-x) + y = x + y = y + x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>h) ((-x) - y = x - y = -y + x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>i) ((-x) - (-y) = x + y = y + x.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**RECH-Notation.**
Beweis 103-5 a)

1.1: Via 95-6 gilt:
\[(x + y \text{ Zahl}) \lor (x + y \notin A).\]

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1.1. Fall</th>
<th>(x + y \text{ Zahl.})</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.1.1. Fall “(x + y \text{ Zahl}^)” folgt via 96-13:</td>
<td>((x \text{ Zahl}) \land (y \text{ Zahl}).)</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 “(x \text{ Zahl}^)” und aus 2 “(y \text{ Zahl}^)” folgt via 103-4:</td>
<td>(-x + y = -x - y.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1.2. Fall</th>
<th>(x + y \notin A.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2.1: Aus 1.2. Fall “(x + y \notin A^)” folgt via 96-14:</td>
<td>(x + y = U.)</td>
</tr>
<tr>
<td>2.2: Aus 1.2. Fall “(x + y \notin A^)” folgt via 96-14:</td>
<td>((x \notin A) \lor (y \notin A).)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.2.1. Fall</th>
<th>(x \notin A.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3: Aus 2.2.1. Fall “(x \notin A^)” folgt via 96-12:</td>
<td>(-x = U.)</td>
</tr>
<tr>
<td>4: (- (x + y) = -U \not= 19 \cdot U \not= 19 \cdot U + (-y) = U - y) (\not= 19 (-x) - y = -x - y.)</td>
<td>(-x + y = -x - y.)</td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 4 folgt:</td>
<td>(-x + y = -x - y.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.2.2. Fall</th>
<th>(y \notin A.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3: Aus 2.2.2. Fall “(y \notin A^)” folgt via 96-12:</td>
<td>(-y = U.)</td>
</tr>
<tr>
<td>4: (- (x + y) = -U \not= 19 \cdot U \not= 19 \cdot (x) + U = -x + U) (\not= 19 (-x) + (-y) = -x - y.)</td>
<td>(-x + y = -x - y.)</td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 4 folgt:</td>
<td>(-x + y = -x - y.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:
\[ -(x + y) = -x - y.\]
Beweis 103-5 a)

...  

**Fallunterscheidung**

...  

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:  

\[ A_1 \mid -(x + y) = -x - y \]

1.2: \(-x - y = (-x) - y = (-x) + (-y) \overset{\text{FSA}}{=} (-y) + (-x) = (-y) - x = -y - x.\)

2: Aus A1 gleich \(-(x + y) = -x - y\) und  

aus 1.2 \(-x - y = ... = -y - x\)  

folgt: \(-(x + y) = -x - y = -y - x.\)

b)

1.1: Via 95-6 gilt:  

\((y \text{ Zahl}) \lor (y \notin A)\).

**Fallunterscheidung**

1.1.1.**Fall**  

\[ y \text{ Zahl}.\]

2.1: Aus 1.1.1.**Fall** \(y \text{ Zahl}\)  

follt via \text{FS} \(\land\):  

\(-(-y) = y.\)

2.2: Via des bereits bewiesenen a) gilt:  

\(-(x + (-y)) = -x - (-y).\)

3: \(-(x - y) = -(x + (-y)) \overset{2}{=} -x - (-y) = -x + (-(-y)) \overset{1}{=} -x + y.\)

4: Aus 3  

folgt:  

\(-(x - y) = -x + y.\)

1.1.2.**Fall**  

\[ y \notin A.\]

2.1: Aus 1.1.2.**Fall** \(y \notin A\)  

folgt via 96-12:  

\(-y = U.\)

2.2: Aus 1.1.2.**Fall** \(y \notin A\)  

folgt via 96-14:  

\((x + y) = U.\)

3: \(-(x - y) = -(x + (-y)) \overset{2}{=} -(x + U) \overset{19}{=} -U \overset{19}{=} U \overset{2}{=} (-x) + y = -x + y.\)

4: Aus 3  

folgt:  

\(-(x - y) = -x + y.\)

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:  

\[ A_1 \mid -(x - y) = -x + y \]
Beweis 103-5 b)

...  

1.2: Via 98-8 gilt: \( y - x = -x + y \).

2: aus A1 gleich "\(- (x - y) = -x + y\)" und aus 1.2"\(y - x = -x + y\)"
folgt: \((- (x - y) = -x + y = y - x.)

c)

1: \(- (x + y) = -((-x) + y) \)

2: aus A1 gleich "\(- (x + y) = ... = x - y\)" und aus 2"\(x - y = -y + x\)"
folgt: \(- (x + y) = x - y = -y + x.

d)

1: \(- (x - y) = -((-x) + y) \)

2: Via FSA gilt: \(x + y = y + x\).

3: Aus 1"\(- (x - y) = ... = x + y\)" und aus 2"\(x + y = y + x\)"
folgt: \(- (x - y) = x + y = y + x.

e)

1: \(x - (-y) \)

2: Via FSA gilt: \(x + y = y + x\).

3: Aus 1"\(x - (-y) = ... = x + y\)" und aus 2"\(x + y = y + x\)"
folgt: \(x - (-y) = x + y = y + x.

f)

1: \(-x - (-y) \)

2: Via 98-8 gilt: \(y - x = -x + y\).

3: Aus 1"\(-x - (-y) = ... = -x + y\)" und aus 2"\(y - x = -x + y\)"
folgt: \(-x - (-y) = -x + y = y - x.

Beweis 103-5 g)

1: \(-x + y = \text{FSA } y + (-x) = y - (-x) = y + x = x + y.\)

2: Via \text{FSA} gilt:
\[x + y = y + x.\]

3: Aus 1 “\(-x + y = \ldots = x + y\)” und
aus 2 “\(x + y = y + x\)”
folgt:
\[-(-x) + y = x + y = y + x.\]

h)

1:
\[\begin{aligned} (-x) - y &= (-x) + (-y) \text{g) } x + (-y) = x - y. \\
\end{aligned}\]

2: Via \text{98-8} gilt:
\[x - y = -y + x.\]

3: Aus 1 “\(-x - y = \ldots = x - y\)” und
aus 2 “\(x - y = -y + x\)”
folgt:
\[-(-x) - y = x - y = -y + x.\]

i)

1:
\[\begin{aligned} (-x) - (-y) &= \text{h) } x - (-y) = x + y. \\
\end{aligned}\]

2: Via \text{FSA} gilt:
\[x + y = y + x.\]

3: Aus 1 “\(-x - (-y) = \ldots = x + y\)” und
aus 2 “\(x + y = y + x\)”
folgt:
\[-(-x) - (-y) = x + y = y + x.\]

\[\square\]
103-6. Hier werden “vierstellige” Folgerungen aus FSA und aus FS−+ gezogen:

**103-6(Satz)**

a) \((x + y) + (z + w) = (x + z) + (y + w)\).

b) \((x + y) + (z + w) = (x + w) + (y + z)\).

c) \((x + y) + (z - w) = (x + z) + (y - w)\).

d) \((x + y) + (z - w) = (x - w) + (y + z)\).

e) \((x + y) - (z + w) = (x - z) + (y - w)\).

f) \((x + y) - (z + w) = (x - w) + (y - z)\).

g) \((x - y) + (z + w) = (x + z) - (y - w)\).

h) \((x - y) + (z + w) = (x + w) - (y - z)\).

i) \((x + y) - (z - w) = (x - z) + (y + w)\).

j) \((x + y) - (z - w) = (x + w) + (y - z)\).

k) \((x - y) + (z - w) = (x + z) - (y + w)\).

l) \((x - y) + (z - w) = (x - w) - (y - z)\).

m) \((x - y) - (z + w) = (x - z) - (y + w)\).

n) \((x - y) - (z + w) = (x - w) - (y + z)\).

o) \((x - y) - (z - w) = (x - z) - (y - w)\).

p) \((x - y) - (z - w) = (x + w) - (y + z)\).

---

RECH-Notation.
Beweis 103-6 a)

1: \((x + y) + (z + w)\) \(\overset{\text{FSA}}{=} x + (y + (z + w))\) \(\overset{\text{FSA}}{=} x + ((y + z) + w)\)
\(\overset{\text{FSA}}{=} x + ((z + y) + w)\) \(\overset{\text{FSA}}{=} x + ((y + z) + w)\) \(\overset{\text{FSA}}{=} (x + z) + (y + w)\).

2: Aus 1 folgt:
\((x + y) + (z + w) = (x + z) + (y + w)\).

b)

1: \((x + y) + (z + w)\) \(\overset{\text{FSA}}{=} (x + y) + (w + z)\) \(\overset{\text{a)}}{=} (x + w) + (y + z)\).

2: Aus 1 folgt:
\((x + y) + (z + w) = (x + w) + (y + z)\).

c)

1: \((x+y)+(z−w) = (x+y)+(z+(−w))\) \(\overset{\text{a)}}{=} (x+z)+(y+(−w)) = (x+z)+(y−w)\).

2: Aus 1 folgt:
\((x + y) + (z - w) = (x + z) + (y - w)\).

d)

1: \((x+y)+(z−w) = (x+y)+(z+(−w))\) \(\overset{\text{b)}}{=} (x+(−w))+(y+z) = (x−w)+(y+z)\).

2: Aus 1 folgt:
\((x + y) + (z - w) = (x - w) + (y + z)\).

e)

1: \((x + y) - (z + w) = (x + y) + (−(z + w))\) \(\overset{\text{FSA}−}{=} (x + y) + (−z − w)\)
\(= (x + y) + ((−z) − w) = (x + y) + ((−z) + (−w))\)
\(\overset{\text{a)}}{=} (x + (−z)) + (y + (−w)) = (x − z) + (y + (−w)) = (x − z) + (y − w)\).

2: Aus 1 folgt:
\((x + y) - (z + w) = (x - z) + (y - w)\).

f)

1: \((x + y) - (z + w) = (x + y) + (−(z + w))\) \(\overset{\text{FSA}−}{=} (x + y) + (−z − w)\)
\(= (x + y) + ((−z) − w) = (x + y) + ((−z) + (−w))\)
\(\overset{\text{b)}{=}} (x + (−w)) + (y + (−z)) = (x − w) + (y + (−z)) = (x − w) + (y − z)\).

2: Aus 1 folgt:
\((x + y) - (z + w) = (x - w) + (y - z)\).
Beweis 103-6 g)  

1: $(x - y) + (z + w) = (x + (-y)) + (z + w) \overset{a)}{=} (x + z) + ((-y) + w) \\
   = (x + z) + (-y + w) \overset{FS}{=} (x + z) + (-y - w) = (x + z) - (y - w).$  

2: Aus 1 folgt:  
$(x - y) + (z + w) = (x + z) - (y - w).$  

h)  

1: $(x - y) + (z + w) = (x + (-y)) + (z + w) \overset{b)}{=} (x + w) + ((-y) + z) \\
   = (x + w) + (-y + z) \overset{FS}{=} (x + w) + (-y - z) = (x + w) - (y - z).$  

2: Aus 1 folgt:  
$(x - y) + (z + w) = (x + w) - (y - z).$  

i)  

1: $(x + y) - (z - w) = (x + y) - (z + (-w)) \overset{e)}{=} (x - z) + (y - (-w)) \\
   \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \ quad
Beweis 103-6 1) 

1: \((x - y) + (z - w) = (x + (-y)) + (z - w) = (x + (-y)) + (z + (-w))\)
\[\begin{align*}
&\overset{b)}{(x + (-w)) + ((-y) + z) = (x - w) + ((-y) + z) = (x - w) + (-y + z) \\
&\text{FS}^{-+} (x - w) + (-y - z)) = (x - w) - (y - z).
\end{align*}\]

2: Aus 1 folgt: \((x - y) + (z - w) = (x - w) - (y - z)\).

m) 

1: \((x - y) - (z + w) = (x + (-y)) - (z + w)\) e) \(\overset{e)}{(x - z) + ((-y) - w))\)
\[\begin{align*}
&= (x - z) + ((-y) - w) \overset{FS}{{=}+} (x - z) + ((-y) - w) = (x - z) - (y + w).
\end{align*}\]

2: Aus 1 folgt: \((x - y) - (z + w) = (x - z) - (y + w)\).

n) 

1: \((x - y) - (z + w) = (x + (-y)) - (z + w)\) f) \(\overset{f)}{(x - w) + ((-y) - z))\)
\[\begin{align*}
&= (x - w) + ((-y) - z) \overset{FS}{{=}+} (x - w) + ((-y) - z) = (x - w) - (y + z).
\end{align*}\]

2: Aus 1 folgt: \((x - y) - (z + w) = (x - w) - (y + z)\).

o) 

1: \((x - y) - (z - w) = (x + (-y)) - (z - w)\) e) \(\overset{e)}{(x - z) + ((-y) - (-w))\)
\[\begin{align*}
&= (x - z) + ((-y) - (-w)) \overset{FS}{{=}+} (x - z) + ((-y) - (-w)) = (x - z) - (y - w).
\end{align*}\]

2: Aus 1 folgt: \((x - y) - (z - w) = (x - z) - (y - w)\).

p) 

1: \((x - y) - (z - w) = (x + (-y)) - (z - w)\) f) \(\overset{f)}{(x - (-w)) + ((-y) - z)\)
\[\begin{align*}
&= (x - (-w)) + ((-y) - z) \overset{FS}{{=}+} (x + w) + ((-y) - z) = (x + w) - (y + z).
\end{align*}\]

2: Aus 1 folgt: \((x - y) - (z - w) = (x + w) - (y + z)\).
103-7. Im +Satz Zahlen wird angegeben, in welcher der Mengen \( R, S, T, C, B, A \) die Summe \( x + y \) liegt, wenn \( x \) in \( R, S, T, C, B, A \) und \( y \) in \( R, S, T, C, B, A \) ist. Die Beweis-Reihenfolge ist a) - b) - c) - g) - l) - p) - q) - d) - e) - f) - h) - i) - j) - k) - m) - n) - o) - r) - s) - t) - u):

**103-7(Satz) (+SZ: +Satz Zahlen)**

a) Aus "\( x \in R \) und \( y \in R \)" folgt "\( x + y \in R \)."
b) Aus "\( x \in R \) und \( y \in S \)" folgt "\( x + y \in S \)."
c) Aus "\( x \in R \) und \( y \in T \)" folgt "\( x + y \in T \)."
d) Aus "\( x \in R \) und \( y \in C \)" folgt "\( x + y \in C \)."
e) Aus "\( x \in R \) und \( y \in B \)" folgt "\( x + y \in B \)."
f) Aus "\( x \in R \) und \( y \) Zahl" folgt "\( x + y \) Zahl".
g) Aus "\( x \in S \) und \( y \in S \)" folgt "\( x + y \in T \)."
h) Aus "\( x \in S \) und \( y \in T \)" folgt "\( x + y \in T \)."
i) Aus "\( x \in S \) und \( y \in C \)" folgt "\( x + y \in B \)."
j) Aus "\( x \in S \) und \( y \in B \)" folgt "\( x + y \) Zahl".
k) Aus "\( x \in S \) und \( y \) Zahl" folgt "\( x + y \) Zahl".
l) Aus "\( x \in T \) und \( y \in T \)" folgt "\( x + y \in T \)."
m) Aus "\( x \in T \) und \( y \in C \)" folgt "\( x + y \) Zahl".
n) Aus "\( x \in T \) und \( y \in B \)" folgt "\( x + y \) Zahl".
o) Aus "\( x \in T \) und \( y \) Zahl" folgt "\( x + y \) Zahl".

...
103-7(Satz) (+SZ: +Satz Zahlen) …

p) Aus “x ∈ C” und “y ∈ C” folgt “x + y ∈ C”.

q) Aus “x ∈ C” und “y ∈ B” folgt “x + y ∈ B”.

r) Aus “x ∈ C” und “y Zahl” folgt “x + y Zahl”.

s) Aus “x ∈ B” und “y ∈ B” folgt “x + y Zahl”.

t) Aus “x ∈ B” und “y Zahl” folgt “x + y Zahl”.

u) Aus “x Zahl” und “y Zahl” folgt “x + y Zahl”.

———

RECH-Notation.

Beweis 103-7 a) VS gleich 

Aus VS gleich “x ∈ R…” und aus VS gleich “…y ∈ R” folgt via AAV: 

(x ∈ R) ∧ (y ∈ R).

x + y ∈ R.
Beweis 103-7 b) VS gleich

1: Aus VS gleich "... y ∈ S" folgt via 95-15:

\((x ∈ \mathbb{R}) ∧ (y ∈ \mathbb{S})\). \((y ∈ \mathbb{R}) \lor (y = +∞) \lor (y = −∞)\).

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fall</th>
<th>(y \in \mathbb{R})</th>
<th>(y = +∞)</th>
<th>(y = −∞)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1.1. Fall</td>
<td>(x + y \in \mathbb{R})</td>
<td>(x + (+∞) = +∞)</td>
<td>(x + y = +∞)</td>
</tr>
<tr>
<td>1.2. Fall</td>
<td>(x + (−∞) = −∞)</td>
<td>(x + (+∞) = +∞)</td>
<td>(x + (−∞) = −∞)</td>
</tr>
<tr>
<td>1.3. Fall</td>
<td>(x + y \in \mathbb{S})</td>
<td>(x + y \in \mathbb{S})</td>
<td>(x + y \in \mathbb{S})</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt: \(x + y \in \mathbb{S}\).
Beweis 103-7 c) VS gleich

1: Aus VS gleich “...y ∈ T”
folgt via 95-16:

\[(x ∈ \mathbb{R}) \land (y ∈ \mathbb{T})\].

\[(y ∈ \mathbb{S}) ∨ (y = \text{nan})\].

Fallunterscheidung

1.1.Fall  
\[y ∈ \mathbb{S}\].

2: Aus VS gleich “x ∈ \mathbb{R}...” und
aus 1.1.Fall “y ∈ \mathbb{S}”
folgt via des bereits bewiesenen b):
\[x + y ∈ \mathbb{S}\].

3: Aus 2“x + y ∈ \mathbb{S}”
folgt via ∈ SZ:
\[x + y ∈ \mathbb{T}\].

1.2.Fall  
\[y = \text{nan}\].

2: Aus VS gleich “x ∈ \mathbb{R}...”
folgt via ∈ SZ:
\[x ∈ \mathbb{T}\].

3: Aus 2“x ∈ \mathbb{T}”
folgt via AAVI:
\[x + \text{nan} = \text{nan}\].

4: Aus 3“x + \text{nan} = \text{nan}”
folgt via 95-16:
\[x + \text{nan} ∈ \mathbb{T}\].

5: Aus 4“x + \text{nan} ∈ \mathbb{T}” und
aus 1.2.Fall “y = \text{nan}”
folgt:
\[x + y ∈ \mathbb{T}\].

Ende Fallunterscheidung
In beiden Fällen gilt:
\[x + y ∈ \mathbb{T}\].
Beweis 103-7 g) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “$x \in S$...” folgt via 95-15:

\[(x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty).\]

1.2: Aus VS gleich “...$y \in S$” folgt via 95-15:

\[(y \in \mathbb{R}) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty).\]

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

\[\begin{align*}
(x \in \mathbb{R}) & \land (y \in \mathbb{R}) \\
\lor (x \in \mathbb{R}) & \land (y = +\infty) \\
\lor (x \in \mathbb{R}) & \land (y = -\infty) \\
\lor (x = +\infty) & \land (y \in \mathbb{R}) \\
\lor (x = +\infty) & \land (y = +\infty) \\
\lor (x = +\infty) & \land (y = -\infty) \\
\lor (x = -\infty) & \land (y \in \mathbb{R}) \\
\lor (x = -\infty) & \land (y = +\infty) \\
\lor (x = -\infty) & \land (y = -\infty).
\end{align*}\]

Fallunterscheidung

2.1.Fall \[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R}).\]

3: Aus 2.1.Fall “$x \in \mathbb{R}$...” und aus 2.1.Fall “...$y \in \mathbb{R}$” folgt via AAV:

\[x + y \in \mathbb{R}.\]

4: Aus 3 “$x + y \in \mathbb{R}$” folgt via $\in SZ$:

\[x + y \in T.\]

2.2.Fall \[(x \in \mathbb{R}) \land (y = +\infty).\]

3: Aus 2.2.Fall “$x \in \mathbb{R}$...” folgt via AAV:

\[x + (+\infty) = +\infty.\]

4: Aus 3 “$x + (+\infty) = +\infty$” folgt via 95-16:

\[x + (+\infty) \in T.\]

5: Aus 4 “$x + (+\infty) \in T$” und aus 2.2.Fall “...$y = +\infty$” folgt:

\[x + y \in T.\]

...
Beweis 103-7 g) VS gleich 

\( (x \in S) \land (y \in S) \).

Fallunterscheidung

\[ \text{2.3.Fall} \quad (x \in \mathbb{R}) \land (y = -\infty). \]

3: Aus 2.3.Fall“\( x \in \mathbb{R} \)...”

folgt via AAVI:

\[ x + (-\infty) = -\infty. \]

4: Aus 3“\( x + (-\infty) = -\infty \)”

folgt via 95-16:

\[ x + (-\infty) \in T. \]

5: Aus 4“\( x + (-\infty) \in T \)” und

aus 2.3.Fall“\( ... y = -\infty \)”

folgt:

\[ x + y \in T. \]

\[ \text{2.4.Fall} \quad (x = +\infty) \land (y \in \mathbb{R}). \]

3: Aus 2.4.Fall“\( ... y \in \mathbb{R} \)”

folgt via AAVI:

\[ (+\infty) + y = +\infty. \]

4: Aus 3“\( (+\infty) + y = +\infty \)”

folgt via 95-16:

\[ (+\infty) + y \in T. \]

5: Aus 4“\( (+\infty) + y \in T \)” und

aus 2.4.Fall“\( x = +\infty \)...”

folgt:

\[ x + y \in T. \]

\[ \text{2.5.Fall} \quad (x = +\infty) \land (y = +\infty). \]

3.1: Aus 2.5.Fall

folgt:

\[ x = +\infty. \]

3.2: Aus 2.5.Fall

folgt:

\[ y = +\infty. \]

4:

\[ x + y \overset{3.1}{=} (+\infty) + y \overset{3.2}{=} (+\infty) + (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} +\infty. \]

3: Aus 2“\( x + y = ... = +\infty \)”

folgt via 95-16:

\[ x + y \in T. \]
Beweis 103-7 g) VS gleich

\( (x \in S) \land (y \in S) \).

**Fallunterscheidung**

**2.6. Fall** \( (x = +\infty) \land (y = -\infty) \).

3.1: Aus 2.6. Fall folgt: \( x = +\infty \).

3.2: Aus 2.6. Fall folgt: \( y = -\infty \).

4: \( x + y \equiv (+\infty) + y \equiv (+\infty) + (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} \text{nan} \).

5: Aus 4" \( x + y = \ldots = \text{nan} \" folgt via 95-16: \( x + y \in T \).

**2.7. Fall** \( (x = -\infty) \land (y \in R) \).

3: Aus 2.7. Fall"\ldots y \in R" folgt via AAVI: \( (-\infty) + y = -\infty \).

4: Aus 3" \( (-\infty) + y = -\infty \" folgt via 95-16: \( (-\infty) + y \in T \).

5: Aus 4" \( (-\infty) + y \in T \" und aus 2.7. Fall" \( x = -\infty \ldots \"

folgt: \( x + y \in T \).

**2.8. Fall** \( (x = -\infty) \land (y = +\infty) \).

3.1: Aus 2.8. Fall folgt: \( x = -\infty \).

3.2: Aus 2.8. Fall folgt: \( y = +\infty \).

4: \( x + y \equiv (-\infty) + y \equiv (-\infty) + (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} \text{nan} \).

5: Aus 4" \( x + y = \ldots = \text{nan} \" folgt via 95-16: \( x + y \in T \).
Beweis 103-7 g) VS gleich \((x \in S) \land (y \in S)\). 

... 

Fallunterscheidung 

... 

2.9.Fall \((x = -\infty) \land (y = -\infty)\).

3.1: Aus 2.9.Fall folgt: \(x = -\infty\).

3.2: Aus 2.9.Fall folgt: \(y = -\infty\).

4: \(x + y^3 = (-\infty) + y^3 = (-\infty) + (-\infty) \stackrel{AA VI}{=} -\infty\).

5: Aus 4“\(x + y = \ldots = -\infty\)” folgt via 95-16: \(x + y \in T\). 

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: \(x + y \in T\). 

1) VS gleich \((x \in T) \land (y \in T)\).

1.1: Aus VS gleich “\(x \in T\)” folgt via 95-16: \((x \in S) \lor (x = \text{nan})\).

1.2: Aus VS gleich “\(\ldots y \in T\)” folgt via 95-16: \((y \in S) \lor (y = \text{nan})\).

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

\[
(x \in S) \land (y \in S) \\
\lor (x \in S) \land (y = \text{nan}) \\
\lor (x = \text{nan}) \land (y \in S) \\
\lor (x = \text{nan}) \land (y = \text{nan}).
\]

Fallunterscheidung 

2.1.Fall \((x \in S) \land (y \in S)\).

Aus 2.1.Fall “\(x \in S\)” und aus 2.1.Fall “\(\ldots y \in S\)” folgt via des bereits bewiesenen g): \(x + y \in T\). 

...
Beweis 103-7 1) VS gleich \((x \in \mathbb{T}) \land (y \in \mathbb{T})\).

... Fallunterscheidung ...

### 2.2. Fall \((x \in S) \land (y = \text{nan})\)

<p>| | |</p>
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3:</td>
<td>Aus VS gleich “(x \in T)” folgt via <strong>AAVI:</strong> (x + \text{nan} = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>Aus 3”(x + \text{nan} = \text{nan})” folgt via <strong>95-16:</strong> (x + \text{nan} \in T).</td>
</tr>
<tr>
<td>5:</td>
<td>Aus 4“(x + \text{nan} \in T)” und aus 2.2.Fall”...(y = \text{nan})” folgt: (x + y \in T).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

### 2.3. Fall \((x = \text{nan}) \land (y \in S)\)

<p>| | |</p>
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3:</td>
<td>Aus VS gleich “...(y \in T)” folgt via <strong>AAVI:</strong> (\text{nan} + y = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>Aus 3”(\text{nan} + y = \text{nan})” folgt via <strong>95-16:</strong> (\text{nan} + y \in T).</td>
</tr>
<tr>
<td>5:</td>
<td>Aus 4“(\text{nan} + y \in T)” und aus 2.3.Fall”(x = \text{nan})” folgt: (x + y \in T).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

### 2.4. Fall \((x = \text{nan}) \land (y = \text{nan})\)

<p>| | |</p>
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1:</td>
<td>Aus 2.4.Fall folgt: (x = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2:</td>
<td>Aus 2.4.Fall folgt: (y = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>(x + y \equiv \text{nan} \lor y \equiv \text{nan} \Rightarrow x + y \in \mathbb{T}).</td>
</tr>
<tr>
<td>5:</td>
<td>Aus 4“(x + y = \ldots = \text{nan})” folgt via <strong>95-16:</strong> (x + y \in T).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In allen Fällen gilt: \(x + y \in T\).
Beweis 103-7 p) VS gleich

Aus VS gleich “\(x \in \mathbb{C}\ldots\)” und
aus VS gleich “\(\ldots y \in \mathbb{C}\)”
folgt via 102-3:

\[x + y \in \mathbb{C}.\]

q) VS gleich

\[(x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{B}).\]

1.1: Aus VS gleich “\(x \in \mathbb{C}\ldots\)”
folgt via 101-1:

\[(\text{Re} x \in \mathbb{R}) \land (\text{Im} x \in \mathbb{R}).\]

1.2: Aus VS gleich “\(\ldots y \in \mathbb{B}\)”
folgt via 101-4:

\[(\text{Re} y \in \mathbb{S}) \land (\text{Im} y \in \mathbb{S}).\]

2.1: Aus 1.1“\(\text{Re} x \in \mathbb{R}\ldots\)” und
aus 1.2“\(\text{Re} y \in \mathbb{S}\ldots\)”
folgt via des bereits bewiesenen b):

\[(\text{Re} x) + (\text{Re} y) \in \mathbb{S}.\]

2.2: Aus 1.1“\(\ldots \text{Im} x \in \mathbb{R}\)” und
aus 1.2“\(\ldots \text{Im} y \in \mathbb{S}\)”
folgt via des bereits bewiesenen b):

\[(\text{Im} x) + (\text{Im} y) \in \mathbb{S}.\]

3.1: Via 96-25 gilt:

\[\text{Re}(x + y) = (\text{Re} x) + (\text{Re} y).\]

3.2: Via 96-25 gilt:

\[\text{Im}(x + y) = (\text{Im} x) + (\text{Im} y).\]

4.1: Aus 3.1“\(\text{Re}(x + y) = (\text{Re} x) + (\text{Re} y)\)” und
aus 2.1“\((\text{Re} x) + (\text{Re} y) \in \mathbb{S}\)”
folgt:

\[\text{Re}(x + y) \in \mathbb{S}.\]

4.2: Aus 3.2“\(\text{Im}(x + y) = (\text{Im} x) + (\text{Im} y)\)” und
aus 2.2“\((\text{Im} x) + (\text{Im} y) \in \mathbb{S}\)”
folgt:

\[\text{Im}(x + y) \in \mathbb{S}.\]

5: Aus 4.1“\(\text{Re}(x + y) \in \mathbb{S}\)” und
aus 4.2“\(\text{Im}(x + y) \in \mathbb{S}\)”
folgt via 101-3:

\[x + y \in \mathbb{B}.\]

d) VS gleich

\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{C}).\]

1: Aus VS gleich “\(x \in \mathbb{R}\ldots\)”
folgt via \(\in\mathbb{SZ}\):

\[x \in \mathbb{C}.\]

2: Aus 1“\(x \in \mathbb{C}\)” und
aus VS gleich “\(\ldots y \in \mathbb{C}\)”
folgt via des bereits bewiesenen p):

\[x + y \in \mathbb{C}.\]
Beweis 103-7 e) VS gleich

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{R}$ . . .”
   folgt via $\in \mathbb{SZ}$: $x \in \mathbb{C}$.

2: Aus 1“$x \in \mathbb{C}$” und
   aus VS gleich “. . . $y \in \mathbb{B}$”
   folgt via des bereits bewiesenen q):
   $x + y \in \mathbb{B}$.

f) VS gleich

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{R}$ . . .”
   folgt via $\in \mathbb{SZ}$: $x$ Zahl.

2: Aus 1“$x$ Zahl” und
   aus VS gleich “. . . $y$ Zahl”
   folgt via 96-13:
   $x + y$ Zahl.

h) VS gleich

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{S}$ . . .”
   folgt via $\in \mathbb{SZ}$: $x \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1“$x \in \mathbb{T}$” und
   aus VS gleich “. . . $y \in \mathbb{T}$”
   folgt via des bereits bewiesenen 1):
   $x + y \in \mathbb{T}$.

i) VS gleich

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{S}$ . . .”
   folgt via $\in \mathbb{SZ}$: $x \in \mathbb{B}$.

2: Aus VS gleich “. . . $y \in \mathbb{C}$” und
   aus 1“$x \in \mathbb{B}$”
   folgt via des bereits bewiesenen q):
   $y + x \in \mathbb{B}$.

3: Via FSA gilt:
   $x + y = y + x$.

4: Aus 3“$x + y = y + x$” und
   aus 2“$y + x \in \mathbb{B}$”
   folgt:
   $x + y \in \mathbb{B}$.
Beweis 103-7 j) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “$x \in S\ldots$”
    folgt via $\in_{SZ}$: $x$ Zahl.

1.2: Aus VS gleich “… $y \in B$”
    folgt via $\in_{SZ}$: $y$ Zahl.

2: Aus 1.1“$x$ Zahl” und
    aus 1.2“$y$ Zahl”
    folgt via 96-13:
    $x + y$ Zahl.

k) VS gleich

1: Aus VS gleich “$x \in S\ldots$”
    folgt via $\in_{SZ}$: $x$ Zahl.

2: Aus 1“$x$ Zahl” und
    aus VS gleich “… $y$ Zahl”
    folgt via 96-13:
    $x + y$ Zahl.

m) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “$x \in T\ldots$”
    folgt via $\in_{SZ}$: $x$ Zahl.

1.2: Aus VS gleich “… $y \in C$”
    folgt via $\in_{SZ}$: $y$ Zahl.

2: Aus 1.1“$x$ Zahl” und
    aus 1.2“$y$ Zahl”
    folgt via 96-13:
    $x + y$ Zahl.

n) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “$x \in T\ldots$”
    folgt via $\in_{SZ}$: $x$ Zahl.

1.2: Aus VS gleich “… $y \in B$”
    folgt via $\in_{SZ}$: $y$ Zahl.

2: Aus 1.1“$x$ Zahl” und
    aus 1.2“$y$ Zahl”
    folgt via 96-13:
    $x + y$ Zahl.
Beweis 103-7 o) VS gleich

1: Aus VS gleich "\(x \in \mathbb{T}\ldots\)"
   folgt via \(\in\) \(\mathbb{SZ}\):
   \(x\) Zahl.

2: Aus 1"\(x\) Zahl" und
   aus VS gleich "\(\ldots\ y\) Zahl"
   folgt via 96-13:
   \(x + y\) Zahl.

r) VS gleich

1: Aus VS gleich "\(x \in \mathbb{C}\ldots\)"
   folgt via \(\in\) \(\mathbb{SZ}\):
   \(x\) Zahl.

2: Aus 1"\(x\) Zahl" und
   aus VS gleich "\(\ldots\ y\) Zahl"
   folgt via 96-13:
   \(x + y\) Zahl.

s) VS gleich

1.1: Aus VS gleich "\(x \in \mathbb{B}\ldots\)"
   folgt via \(\in\) \(\mathbb{SZ}\):
   \(x\) Zahl.

1.2: Aus VS gleich "\(\ldots\ y \in \mathbb{B}\)"
   folgt via \(\in\) \(\mathbb{SZ}\):
   \(y\) Zahl.

2: Aus 1.1"\(x\) Zahl" und
   aus 1.2"\(y\) Zahl"
   folgt via 96-13:
   \(x + y\) Zahl.

t) VS gleich

1: Aus VS gleich "\(x \in \mathbb{B}\ldots\)"
   folgt via \(\in\) \(\mathbb{SZ}\):
   \(x\) Zahl.

2: Aus 1"\(x\) Zahl" und
   aus VS gleich "\(\ldots\ y\) Zahl"
   folgt via 96-13:
   \(x + y\) Zahl.

u) VS gleich

Aus VS gleich "\(x\) Zahl\ldots\)" und
aus VS gleich "\(\ldots\ y\) Zahl"
folgt via 96-13:
\(x + y\) Zahl.
104-1. \( T \setminus \mathbb{R} \) besteht genau aus den Zahlen nan, \(+\infty\), \(-\infty\):

\[\begin{align*}
104-1(\text{Satz}) \quad & \\
Die \text{ Aussagen i}, \text{ ii)} \text{ sind äquivalent:} \\
i) & \; x \in T \setminus \mathbb{R}. \\
ii) & \; "x = \text{nan}" \text{ oder } "x = +\infty" \text{ oder } "x = -\infty".
\end{align*}\]

Beweis 104-1 \( \begin{align*}
(1) \Rightarrow \text{ii)]} \quad & \\
VS \text{ gleich} \quad & x \in T \setminus \mathbb{R}. \\
\end{align*}\]

1: Aus VS gleich "\( x \in T \setminus \mathbb{R} \)" folgt via 5-3: \( (x \in T) \land (x \notin \mathbb{R}) \).

2: Aus 1 "\( x \in T \ldots \)" folgt via 95-16: \( (x \in \mathbb{R}) \lor (x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty) \).

3: Aus 2 "\( (x \in \mathbb{R}) \lor (x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty) \)" und aus 1 "\( \ldots x \notin \mathbb{R} \)" folgt: \( (x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty) \).
Beweis 104-1 (ii) ⇒ i) VS gleich \( (x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty) \).

1: Nach VS gilt:
\( (x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty) \).

**Fallunterscheidung**

1.1. Fall
\[
\begin{align*}
2: & \text{ Aus 95-12 } \text{"nan } \in \mathbb{T}\text{" und }\
& \text{ aus } \mathbf{AAI} \text{"nan } \notin \mathbb{R}\text{"} \\
& \text{ folgt via 5-3: } \\
3: & \text{ Aus 1.1. Fall } \text{"x = nan" und } \\
& \text{ aus 2 } \text{"nan } \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{R}\text{"} \\
& \text{ folgt: }
\end{align*}
\]
\( \text{nan } \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{R} \).

1.2. Fall
\[
\begin{align*}
2: & \text{ Aus 95-12 } \text{"+}\infty \in \mathbb{T}\text{" und } \\
& \text{ aus } \mathbf{AAI} \text{"+}\infty \notin \mathbb{R}\text{"} \\
& \text{ folgt via 5-3: } \\
3: & \text{ Aus 1.2. Fall } \text{"x = +}\infty\text{" und } \\
& \text{ aus 2 } \text{"+}\infty \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{R}\text{"} \\
& \text{ folgt: }
\end{align*}
\]
\( +\infty \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{R} \).

1.3. Fall
\[
\begin{align*}
2: & \text{ Aus 95-12 } \text{"-}\infty \in \mathbb{T}\text{" und } \\
& \text{ aus } \mathbf{AAI} \text{"-}\infty \notin \mathbb{R}\text{"} \\
& \text{ folgt via 5-3: } \\
3: & \text{ Aus 1.3. Fall } \text{"x = -}\infty\text{" und } \\
& \text{ aus 2 } \text{"-}\infty \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{R}\text{"} \\
& \text{ folgt: }
\end{align*}
\]
\( -\infty \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{R} \).

**Ende Fallunterscheidung** In allen Fällen gilt:
\( x \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{R} \).

\(\square\)
104-2. Klarer Weise gilt $\text{nan}, +\infty, -\infty \in T \setminus R$ und $T \setminus R \subseteq A$ und $T \setminus R \subseteq T$:

<table>
<thead>
<tr>
<th>104-2(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) $\text{nan} \in T \setminus R$.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $+\infty \in T \setminus R$.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $-\infty \in T \setminus R$.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $T \setminus R \subseteq T$.</td>
</tr>
<tr>
<td>e) $T \setminus R \subseteq A$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Beweis 104-2 a)

Aus “$\text{nan} = \text{nan}$” folgt via 104-1: $\text{nan} \in T \setminus R$.

b)

Aus “$+\infty = +\infty$” folgt via 104-1: $+\infty \in T \setminus R$.

c)

Aus “$-\infty = -\infty$” folgt via 104-1: $-\infty \in T \setminus R$.

d)

Via 5-5 gilt: $T \setminus R \subseteq T$.

e)

Aus d) “$T \setminus R \subseteq T$” und aus $\subseteq_{SZ}$“$T \subseteq A$” folgt via 0-6: $T \setminus R \subseteq A$. □
104-3. Falls \( x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \), dann \( \text{Re} x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \), \( \text{Im} x = 0 \) und es gilt \( \text{rez}(x) \in \{0, \text{nan}\} \). Aussagen über \(-x\) folgen in 104-4:

**104-3(Satz)**

*Es gelte:*

\[ \rightarrow \quad x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}. \]

*Dann folgt:*

a) \( \text{Re} x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \).

b) \( \text{Im} x = 0 \).

c) \( \text{rez}(x) = 0 \) oder \( \text{rez}(x) = \text{nan} \).

---

**REIM-Notation.**

Beweis 104-3 ab)

1: Aus \( \rightarrow \) \( \rightarrow \quad x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \)"
folgt via 5-3:

\[ x \in \mathbb{T}. \]

2: Aus 1" \( x \in \mathbb{T} \)"
folgt via FST:

\[ (\text{Im} x = 0) \land (x = \text{Re} x). \]

3.a): Aus 2"... x = \text{Re} x" und
aus \( \rightarrow \) " \( x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \)"
folgt:

\[ \text{Re} x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}. \]

3.b): Aus 2
folgt:

\[ \text{Im} x = 0. \]
Beweis 104-3 c)

1: Aus $\rightarrow "x \in T \setminus \mathbb{R}"$ folgt via 104-1: $(x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty)$.

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1. Fall</th>
<th>$x = \text{nan}$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.1. Fall $&quot;x = \text{nan}&quot;$ und aus $\text{AAVI} \ &quot;\text{rez(nan)} = \text{nan}&quot;$ folgt:</td>
<td>rez$(x) = \text{nan}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 folgt:</td>
<td>$(\text{rez}(x) = 0) \lor (\text{rez}(x) = \text{nan})$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2. Fall</th>
<th>$x = +\infty$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.2. Fall $&quot;x = +\infty&quot;$ und aus $\text{AAVI} \ &quot;\text{rez}(+\infty) = 0&quot;$ folgt:</td>
<td>rez$(x) = 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 folgt:</td>
<td>$(\text{rez}(x) = 0) \lor (\text{rez}(x) = \text{nan})$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.3. Fall</th>
<th>$x = -\infty$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.3. Fall $&quot;x = -\infty&quot;$ und aus $\text{AAVI} \ &quot;\text{rez}(-\infty) = 0&quot;$ folgt:</td>
<td>rez$(x) = 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 folgt:</td>
<td>$(\text{rez}(x) = 0) \lor (\text{rez}(x) = \text{nan})$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In allen Fällen gilt: $(\text{rez}(x) = 0) \lor (\text{rez}(x) = \text{nan})$. □
104-4. Es gilt \( p \in T \setminus \mathbb{R} \) genau dann, wenn \(-p \in T \setminus \mathbb{R}\) und dies ist genau dann der Fall, wenn \(-(-p) \in T \setminus \mathbb{R}\):

\[
\begin{align*}
\textbf{104-4(Satz)} \\
Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent: \\
i) & \ p \in T \setminus \mathbb{R}.
\text{ii)} & \ -p \in T \setminus \mathbb{R}.
\text{iii)} & \ -(-p) \in T \setminus \mathbb{R}.
\end{align*}
\]

RECH-Notation.
Beweis 104.4 \(i) \Rightarrow ii)\) 

VS gleich \(p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}\).

1: Aus VS gleich \(p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}\) folgt via 5-3: 
\((p \in \mathbb{T}) \land (p \notin \mathbb{R})\).

2.1: Aus 1 “\(p \in \mathbb{T} \ldots\)” folgt via 100-6: 
\(-p \in \mathbb{T}\).

2.2: Es gilt: 
\((-p \in \mathbb{R}) \lor (-p \notin \mathbb{R})\).

Fallunterscheidung

2.2.1. Fall

3: Aus 2.2.1. Fall “\(-p \in \mathbb{R}\)” folgt via 100-6: 
\(-p \in \mathbb{R}\).

4: Es gilt 3 “\(p \in \mathbb{R}\).”
Es gilt 1 “\(\ldots p \notin \mathbb{R}\).”
Ex falso quodlibet folgt: 
\(-p \notin \mathbb{R}\).

2.2.2. Fall

\(-p \notin \mathbb{R}\).

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: \(\text{A1} \quad \neg p \notin \mathbb{R}\).

3: Aus 2.1 “\(-p \in \mathbb{T}\)” und aus A1 gleich “\(-p \notin \mathbb{R}\)” folgt via 5-3: 
\(-p \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}\).
Beweis 104-4 [ii) ⇒ iii)] VS gleich $-p \in T \setminus \mathbb{R}$.

1: Aus VS gleich $-p \in T \setminus \mathbb{R}$ folgt via 5-3:

$(-p \in T) \land (-p \notin \mathbb{R})$.

2.1: Aus 1$-p \in T...$ folgt via 100-6:

$-(−p) \in T$.

2.2: Es gilt:

$(-(−p) \in \mathbb{R}) \lor (−(−p) \notin \mathbb{R})$.

Fallunterscheidung

2.2.1. Fall

3: Aus 2.2.1. Fall $-(-p) \in \mathbb{R}$ folgt via 100-6:

$-p \in \mathbb{R}$.

4: Es gilt 3$-p \in \mathbb{R}$.

Es gilt 1$-p \notin \mathbb{R}$.

Ex falso quodlibet folgt:

$-(-p) \notin \mathbb{R}$.

2.2.2. Fall

$-(-p) \notin \mathbb{R}$.

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: A1 $-(-p) \notin \mathbb{R}$.

3: Aus 2.1 $-(-p) \in T$ und aus A1 gleich $-(-p) \notin \mathbb{R}$ folgt via 5-3:

$-(-p) \in T \setminus \mathbb{R}$.
Beweis \(104-4\) \(\text{iii) } \Rightarrow \text{i) }\) VS gleich

1: Aus VS gleich "\(-(-p) \in T \setminus \mathbb{R}\)" folgt via 5-3:
\((-(-p) \in T) \land (-(-p) \notin \mathbb{R})\).

2.1: Aus 1"\(-(-p) \in T\)..." folgt via 100-6:
\(p \in T\).

2.2: Es gilt:
\((p \in \mathbb{R}) \lor (p \notin \mathbb{R})\).

Fallunterscheidung

2.2.1. Fall

3: Aus 2.2.1. Fall "\(p \in \mathbb{R}\)" folgt via 100-6:
\(-(-p) \in \mathbb{R}\).

4: Es gilt 3"\(-(-p) \in \mathbb{R}\)."
Es gilt 1"\(-(-p) \notin \mathbb{R}\)."
Ex falso quodlibet folgt:
\(p \notin \mathbb{R}\).

2.2.2. Fall

\(p \notin \mathbb{R}\).

Ende Fallunterscheidung
In beiden Fällen gilt:
\(\text{A1 } \text{"} p \notin \mathbb{R} \text{"} \)

3: Aus 2.1"\(p \in T\)" und aus A1 gleich "\(p \notin \mathbb{R}\)" folgt via 5-3:
\(p \in T \setminus \mathbb{R}\).

\(\square\)
104-5. Falls \( x, y \in T \setminus \mathbb{R} \), dann \( x + y, x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R} \) und \( x : y = 0 \) oder \( x : y = \text{nan} \):

\[
\begin{align*}
104-5(\text{Satz}) \\
Es \ gelte: \\
\rightarrow x \in T \setminus \mathbb{R}.
\rightarrow y \in T \setminus \mathbb{R}.
Dann folgt:
\begin{align*}
a) & \quad x + y \in T \setminus \mathbb{R}. \\
b) & \quad x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}. \\
c) & \quad "x : y = 0" \text{ oder } "x : y = \text{nan}". \\
\end{align*}
\]

Beweis 104-5 ab)

1.1: Aus \( \rightarrow "x \ldots \in T \setminus \mathbb{R}" \) folgt via 104-1:

\[
(x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty).
\]

1.2: Aus \( \rightarrow "\ldots y \in T \setminus \mathbb{R}" \) folgt via 104-1:

\[
(y = \text{nan}) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty).
\]

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

\[
\begin{align*}
(x = \text{nan}) \land (y = \text{nan}) \\
\lor (x = \text{nan}) \land (y = +\infty) \\
\lor (x = \text{nan}) \land (y = -\infty) \\
\lor (x = +\infty) \land (y = \text{nan}) \\
\lor (x = +\infty) \land (y = +\infty) \\
\lor (x = +\infty) \land (y = -\infty) \\
\lor (x = -\infty) \land (y = \text{nan}) \\
\lor (x = -\infty) \land (y = +\infty) \\
\lor (x = -\infty) \land (y = -\infty).
\end{align*}
\]

Fallunterscheidung...
Beweis 104-5 ab) ...

**Fallunterscheidung**

...  

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1. Fall</th>
<th>((x = \text{nan}) \land (y = \text{nan})).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1. Fall folgt:</td>
<td>(x = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.1. Fall folgt:</td>
<td>(y = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>4.1:</td>
<td>(x + y \stackrel{3.1}{=} \text{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \text{nan} + \text{nan} \stackrel{97-1}{=} \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>4.2:</td>
<td>(x \cdot y \stackrel{3.1}{=} \text{nan} \cdot y \stackrel{3.2}{=} \text{nan} \cdot \text{nan} \stackrel{97-5}{=} \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>5.1: Aus 4.1“(x + y = \ldots = \text{nan})” und aus 104-2“(\text{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})” folgt:</td>
<td>(x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}).</td>
</tr>
<tr>
<td>5.2: Aus 4.2“(x \cdot y = \ldots = \text{nan})” und aus 104-2“(\text{nan} \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})” folgt:</td>
<td>(x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}).</td>
</tr>
<tr>
<td>6: Aus 5.1 und aus 5.2 folgt:</td>
<td>((x + y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}) \land (x \cdot y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R})).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

...
Beweis 104-5 ab) ...

Fallunterscheidung

\[ \text{2.2.Fall} \quad (x = \text{nan}) \land (y = +\infty). \]

3.1: Aus 2.2.Fall folgt: \( x = \text{nan}. \)

3.2: Aus 2.2.Fall folgt: \( y = +\infty. \)

4.1: \( x + y \stackrel{3.1}{=} \text{nan} + y \stackrel{3.2}{=} \text{nan} + (+\infty) \stackrel{97-1}{=} \text{nan}. \)

4.2: \( x \cdot y \stackrel{3.1}{=} \text{nan} \cdot y \stackrel{3.2}{=} \text{nan} \cdot (+\infty) \stackrel{97-5}{=} \text{nan}. \)

5.1: Aus 4.1“ \( x + y = \ldots = \text{nan} \)” und aus 104-2“ \text{nan} \in T \setminus R”
folgt: \( x + y \in T \setminus R. \)

5.2: Aus 4.2“ \( x \cdot y = \ldots = \text{nan} \)” und aus 104-2“ \text{nan} \in T \setminus R”
folgt: \( x \cdot y \in T \setminus R. \)

6: Aus 5.1 und aus 5.2 folgt: \((x + y \in T \setminus R) \land (x \cdot y \in T \setminus R).\)
Beweis 104-5 ab) ...

Fallunterscheidung

\[ \text{2.3. Fall} \quad (x = \text{nan}) \land (y = -\infty). \]

3.1: Aus 2.3. Fall
folgt:
\[ x = \text{nan}. \]

3.2: Aus 2.3. Fall
folgt:
\[ y = -\infty. \]

4.1:
\[ x + y \overset{3.1}{=} \text{nan} + y \overset{3.2}{=} \text{nan} + (-\infty) \overset{97-1}{=} \text{nan}. \]

4.2:
\[ x \cdot y \overset{3.1}{=} \text{nan} \cdot y \overset{3.2}{=} \text{nan} \cdot (-\infty) \overset{97-5}{=} \text{nan}. \]

5.1: Aus 4.1 "\( x + y = \ldots = \text{nan} \)" und
aus 104-2 "\( \text{nan} \in T \setminus \mathbb{R} \)"
folgt:
\[ x + y \in T \setminus \mathbb{R}. \]

5.2: Aus 4.2 "\( x \cdot y = \ldots = \text{nan} \)" und
aus 104-2 "\( \text{nan} \in T \setminus \mathbb{R} \)"
folgt:
\[ x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}. \]

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt:
\[ (x + y \in T \setminus \mathbb{R}) \land (x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}). \]
Beweis 104-5 ab)...

Fallunterscheidung

... 

### 2.4. Fall

\[(x = +\infty) \land (y = \text{nan})\].

#### 3.1: Aus 2.4. Fall folgt:
\[x = +\infty\].

#### 3.2: Aus 2.4. Fall folgt:
\[y = \text{nan}\].

#### 4.1:
\[x + y \overset{3.1}{=} (+\infty) + y \overset{3.2}{=} (+\infty) + \text{nan} \overset{97^{-1}}{=} \text{nan}\].

#### 4.2:
\[x \cdot y \overset{3.1}{=} (+\infty) \cdot y \overset{3.2}{=} (+\infty) \cdot \text{nan} \overset{97^{-5}}{=} \text{nan}\].

#### 5.1: Aus 4.1 "\(x + y = \ldots = \text{nan}\)" und aus 104-2 "\(\text{nan} \in T \setminus \mathbb{R}\)" folgt:
\[x + y \in T \setminus \mathbb{R}\].

#### 5.2: Aus 4.2 "\(x \cdot y = \ldots = \text{nan}\)" und aus 104-2 "\(\text{nan} \in T \setminus \mathbb{R}\)" folgt:
\[x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}\].

#### 6: Aus 5.1 und aus 5.2 folgt:
\[(x + y \in T \setminus \mathbb{R}) \land (x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R})\].

...
Beweis 104-5 ab) ... 

Fallunterscheidung

... 

2.5. Fall 

3.1: Aus 2.5. Fall folgt: $x = +\infty$.

3.2: Aus 2.5. Fall folgt: $y = +\infty$.

4.1: $x + y \overset{3.1}{=} (+\infty) + y \overset{3.2}{=} (+\infty) + (+\infty) \overset{AAVI}{=} +\infty$.

4.2: $x \cdot y \overset{3.1}{=} (+\infty) \cdot y \overset{3.2}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \overset{AAVI}{=} +\infty$.

5.1: Aus 4.1" $x + y = \ldots = +\infty$" und aus 104-2" $+\infty \in T \setminus R$" folgt: $x + y \in T \setminus R$.

5.2: Aus 4.2" $x \cdot y = \ldots = +\infty$" und aus 104-2" $+\infty \in T \setminus R$" folgt: $x \cdot y \in T \setminus R$.

6: Aus 5.1 und aus 5.2 folgt: $(x + y \in T \setminus R) \land (x \cdot y \in T \setminus R)$. 

...
Beweis 104-5 ab)...

Fallunterscheidung

...  

\textbf{2.6.Fall} \quad \quad \quad (x = +\infty) \wedge (y = -\infty).

3.1: Aus 2.6.Fall
    folgt: \quad x = +\infty.

3.2: Aus 2.6.Fall
    folgt: \quad y = -\infty.

4.1: \quad x + y \overset{3.1}{=} \overset{3.2}{=} (+\infty) + (-\infty) \overset{AAVI}{=} \text{nan}.

4.2: \quad x \cdot y \overset{3.1}{=} \overset{3.2}{=} (+\infty) \cdot (-\infty) \overset{AAVI}{=} -\infty.

5.1: Aus 4.1" $x + y = \ldots = \text{nan}$" und
    aus 104-2" $\text{nan} \in T \setminus \mathbb{R}$"  
    folgt: \quad x + y \in T \setminus \mathbb{R}.

5.2: Aus 4.2" $x \cdot y = \ldots = -\infty$" und
    aus 104-2" $-\infty \in T \setminus \mathbb{R}$"  
    folgt: \quad x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}.

6: Aus 5.1 und
    aus 5.2
    folgt: \quad (x + y \in T \setminus \mathbb{R}) \wedge (x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}).

...
Beweis 104-5 ab) ... 

**Fallunterscheidung**

... 

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.7. Fall</th>
<th>((x = -\infty) \land (y = \text{nan})).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.7. Fall folgt:</td>
<td>(x = -\infty).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.7. Fall folgt:</td>
<td>(y = \text{nan}).</td>
</tr>
<tr>
<td>4.1: (x + y = (-\infty) + y = (-\infty) + \text{nan} = \text{nan})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4.2: (x \cdot y = (-\infty) \cdot y = (-\infty) \cdot \text{nan} = \text{nan})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>5.1: Aus 4.1 “(x + y = \ldots = \text{nan})” und aus 104-2 “(\text{nan} \in T \setminus R)” folgt:</td>
<td>(x + y \in T \setminus R).</td>
</tr>
<tr>
<td>5.2: Aus 4.2 “(x \cdot y = \ldots = \text{nan})” und aus 104-2 “(\text{nan} \in T \setminus R)” folgt:</td>
<td>(x \cdot y \in T \setminus R).</td>
</tr>
<tr>
<td>6: Aus 5.1 und aus 5.2 folgt:</td>
<td>((x + y \in T \setminus R) \land (x \cdot y \in T \setminus R)).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

...
Fallunterscheidung

2.8. Fall \((x = -\infty) \land (y = +\infty)\).

3.1: Aus 2.8. Fall
folgt:

\[x = -\infty.\]

3.2: Aus 2.8. Fall
folgt:

\[y = +\infty.\]

4.1:
\[x + y \overset{3.1}{=} (-\infty) + y \overset{3.2}{=} (-\infty) + (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} \text{nan}.\]

4.2:
\[x \cdot y \overset{3.1}{=} (-\infty) \cdot y \overset{3.2}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty.\]

5.1: Aus 4.1\("x + y = \ldots = \text{nan}"\) und
aus 104-2\(\text{"nan} \in T \setminus \mathbb{R}\)
folgt:

\[x + y \in T \setminus \mathbb{R}.\]

5.2: Aus 4.2\("x \cdot y = \ldots = -\infty"\) und
aus 104-2\(\text{"}-\infty \in T \setminus \mathbb{R}\)
folgt:

\[x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}.\]

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt:

\[(x + y \in T \setminus \mathbb{R}) \land (x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}).\]
Beweis 104-5 ab) ...  

Fallunterscheidung

\[ \begin{array}{|c|}
\hline
2.9.\text{Fall} & (x = -\infty) \land (y = -\infty). \\
3.1: & \text{Aus 2.9.\text{Fall}} \\
& \text{folgt:} \\
& x = -\infty. \\
3.2: & \text{Aus 2.9.\text{Fall}} \\
& \text{folgt:} \\
& y = -\infty. \\
4.1: & x + y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty. \\
4.2: & x \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} +\infty. \\
5.1: & \text{Aus 4.1" } x + y = \ldots = -\infty" \text{ und} \\
& \text{aus 104-2" } -\infty \in T \setminus \mathbb{R}" \\
& \text{folgt:} \\
& x + y \in T \setminus \mathbb{R}. \\
5.2: & \text{Aus 4.2" } x \cdot y = \ldots = +\infty" \text{ und} \\
& \text{aus 104-2" } +\infty \in T \setminus \mathbb{R}" \\
& \text{folgt:} \\
& x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}. \\
6: & \text{Aus 5.1 und} \\
& \text{aus 5.2} \\
& \text{folgt:} \\
& (x + y \in T \setminus \mathbb{R}) \land (x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}). \\
\hline
\end{array} \]

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt:  

\[ A1 \right \text{"} (x + y \in T \setminus \mathbb{R}) \land (x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}) \right \text{"} \]

3.a): Aus A1 \\
folgt:  

\[ x + y \in T \setminus \mathbb{R}. \]

3.b): Aus A1 \\
folgt:  

\[ x \cdot y \in T \setminus \mathbb{R}. \]
Beweis 104-5 c)

1.1: Aus $\to \text{“} x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \text{“}$
folgt via 5-3:

\[ x \in \mathbb{T}. \]

1.2: Es gilt:

\[ (x = 0) \lor (0 \neq x). \]

1.3: Aus $\to \text{“} y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R} \text{“}$
folgt via 104-3:

\[ (\operatorname{rez}(y) = 0) \lor (\operatorname{rez}(y) = \text{nan}). \]

2: Aus 1.2 und

aus 1.3
folgt:

\[
(x = 0) \land (\operatorname{rez}(y) = 0) \\
\lor (0 \neq x) \land (\operatorname{rez}(y) = 0) \\
\lor (x = 0) \land (\operatorname{rez}(y) = \text{nan}) \\
\lor (0 \neq x) \land (\operatorname{rez}(y) = \text{nan}).
\]

Fallunterscheidung

\begin{tabular}{|l|}
\hline
2.1. Fall \\
\hline
3.1: Aus 2.1. Fall \\
folgt: \\
\hline
3.2: Aus 2.1. Fall \\
folgt: \\
\hline
4: \\
\hline
5: Aus 4“$x : y = \ldots = 0$” \\
folgt: \\
\hline
\end{tabular}

\[
(x = 0) \land (\operatorname{rez}(y) = 0).
\]

\begin{tabular}{|l|}
\hline
2.2. Fall \\
\hline
3.1: Aus 1.1“$x \in \mathbb{T}$” \\
folgt via $\in \mathbb{SZ}$: \\
\hline
3.2: Aus 2.2. Fall \\
folgt: \\
\hline
4: Aus 3.1“$x \text{ Zahl}$” \\
folgt via $\mathbb{FSM0}$: \\
\hline
5: \\
\hline
6: Aus 5“$x : y = \ldots = 0$” \\
folgt: \\
\hline
\end{tabular}

\[
(0 \neq x) \land (\operatorname{rez}(y) = 0).
\]

...
Beweis 104-5 c) ...

Fallunterscheidung

...
104-6. Falls \( x \in T \setminus \mathbb{R} \) und \( y \in T \), dann \( x + y \in T \setminus \mathbb{R} \):

---

**104-6(Satz)**

Aus “\( x \in T \setminus \mathbb{R} \)” und “\( y \in T \)” folgt “\( x + y \in T \setminus \mathbb{R} \)”.

---

**RECH-Notation.**

---

Beweis **104-6** VS gleich

\[ (x \in T \setminus \mathbb{R}) \land (y \in T) \]

1: Aus VS gleich “\( x \in T \setminus \mathbb{R} \)...”
folgt via **104-1**:

\[ (x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty) \]

---

**Fallunterscheidung**

1.1.Fall

\[ x = \text{nan} \]

2: Aus VS gleich “...\( y \in T \)”
folgt via **AAVI**:

\[ \text{nan} + y = \text{nan} \]

3: Aus 3“\( x + y = \ldots = \text{nan} \)” und
aus **104-2**“\( \text{nan} \in T \setminus \mathbb{R} \)”
folgt:

\[ x + y \equiv \text{nan} \]

\[ x + y \equiv \text{nan} \] de

\[ x + y \in T \setminus \mathbb{R} \]

...
Fallunterscheidung

1.2. Fall

2: Es gilt: 

\[ x = +\infty. \]

\( (y \in \mathbb{R}) \lor (y \notin \mathbb{R}) \).

2.1. Fall

3: Aus 2.1. Fall \( "y \in \mathbb{R}" \) folgt via AAV1: 

\[ (+\infty) + y = +\infty. \]

4: 

\[ x + y \stackrel{\text{1.2. Fall}}{=} (+\infty) + y = +\infty. \]

5: Aus 4\( "x + y = \ldots = +\infty" \) und aus 104-2 \( "+\infty \in T \setminus R" \) folgt: 

\[ x + y \in T \setminus R. \]

2.2. Fall

3: Aus VS gleich \( "\ldots y \in T" \) und aus 2.2. Fall \( "y \notin \mathbb{R}" \) folgt via 5-3: 

\[ y \in T \setminus R. \]

4: Aus VS gleich \( "x \in T \setminus R" \) und aus 3\( "y \in T \setminus R" \) folgt via 104-5: 

\[ x + y \in T \setminus R. \]

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:

\[ x + y \in T \setminus R. \]
Beweis 104-6 ... 

**Fallunterscheidung**

---

**1.3. Fall** \( x = -\infty \).

2: Es gilt: \( (y \in \mathbb{R}) \lor (y \notin \mathbb{R}) \).

**Fallunterscheidung**

---

**2.1. Fall** \( y \in \mathbb{R} \).

3: Aus 2.1. Fall "\( y \in \mathbb{R} \)"

folgt via AAVI: \( (-\infty) + y = -\infty \).

4: \( x + y \overset{1.2. \text{Fall}}{=} (-\infty) + y \overset{3}{=} -\infty \).

5: Aus 4 "\( x + y = \ldots = -\infty \)" und

aus 104-2 "\( -\infty \in T \setminus \mathbb{R} \)"

folgt: \( x + y \in T \setminus \mathbb{R} \).

---

**2.2. Fall** \( y \notin \mathbb{R} \).

3: Aus VS gleich "\( \ldots y \in T \)" und

aus 2.2. Fall "\( y \notin \mathbb{R} \)"

folgt via 5-3: \( y \in T \setminus \mathbb{R} \).

4: Aus VS gleich "\( x \in T \setminus \mathbb{R} \)" und

aus 3 "\( y \in T \setminus \mathbb{R} \)"

folgt via 104-5: \( x + y \in T \setminus \mathbb{R} \).

---

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:

\( x + y \in T \setminus \mathbb{R} \).

---

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt:

\( x + y \in T \setminus \mathbb{R} \).
104-7. Falls \( x \in T \), dann gilt \( x - x = \text{nan} \) genau dann, wenn \( x \in T \setminus \mathbb{R} \):

**104-7(Satz)**

Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:

i) "\( x \in T \)" und "\( x - x = \text{nan} \)."

ii) \( x \in T \setminus \mathbb{R} \).

**RECH-Notation.**

Beweis 104-7 \([i] \Rightarrow [ii]\) VS gleich \((x \in T) \land (x - x = \text{nan})\).

1: Es gilt: \((x \in \mathbb{R}) \lor (x \notin \mathbb{R})\).

**Fallunterscheidung**

1.1. Fall \( x \in \mathbb{R} \).

2: Aus 1.1. Fall "\( x \in \mathbb{R} \)"
folgt via \( \in \text{SZ} \):

\[ x \in \mathbb{C} \]

3: Aus 2 "\( x \in \mathbb{C} \)"
folgt via 102-5:

\[ x - x = 0 \]

4: Aus VS gleich "...x - x = nan" und
aus 3 "\( x - x = 0 \)"
folgt:

\[ \text{nan} = 0 \]

5: Es gilt 4 "\( \text{nan} = 0 \)".

Via 95-7 gilt "\( 0 \neq \text{nan} \)"
Ex falso quodlibet folgt:

\[ x \in T \setminus \mathbb{R} \]

1.2. Fall \( x \notin \mathbb{R} \).

Aus VS gleich "\( x \in T \ldots \)" und
aus 1.2. Fall "\( x \notin \mathbb{R} \)"
folgt via 5-3:

\[ x \in T \setminus \mathbb{R} \]

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: \( x \in T \setminus \mathbb{R} \).
Beweis 104-7 \(\text{ii) } \Rightarrow \text{i) }\) VS gleich \(x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}\).

1.1: Aus VS gleich \(x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}\) folgt via 5-3: \(x \in \mathbb{T}\).

1.2: Aus VS gleich \(x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}\) folgt via 104-1:

\[(x = \text{nan}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty).\]

**Fallunterscheidung**

1.2.1. Fall \(x = \text{nan}\).

2: Via 97-4 gilt: \(\text{nan} - \text{nan} = \text{nan}\).

3: Aus 1.2.1. Fall “\(x = \text{nan}\)” und aus 2”\(\text{nan} - \text{nan} = \text{nan}\)” folgt: \(x - x = \text{nan}\).

1.2.2. Fall \(x = +\infty\).

2: Via 97-4 gilt: \((+\infty) - (+\infty) = \text{nan}\).

3: Aus 1.2.2. Fall “\(x = +\infty\)” und aus 2”\((+\infty) - (+\infty) = \text{nan}\)” folgt: \(x - x = \text{nan}\).

1.2.3. Fall \(x = -\infty\).

2: Via 97-4 gilt: \((-\infty) - (-\infty) = \text{nan}\).

3: Aus 1.2.2. Fall “\(x = -\infty\)” und aus 2”\((-\infty) - (-\infty) = \text{nan}\)” folgt: \(x - x = \text{nan}\).

**Ende Fallunterscheidung**

In allen Fällen gilt: \(A1 \mid “x - x = \text{nan}”\)

2: Aus 1.1 “\(x \in \mathbb{T}\)” und aus A1 gleich “\(x - x = \text{nan}\)” folgt:

\[(x \in \mathbb{T}) \land (x - x = \text{nan}).\]

\(\square\)
A \ C.

Ersterstellung: 02/02/06                      Letzte Änderung: 29/01/12
105-1. Es gilt $x \in A \setminus C$ genau dann, wenn $\Re x \in T \setminus R$ oder $\Im x \in T \setminus R$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $x$ eine Zahl ist, die nicht in $C$ ist:

\begin{quote}
\textbf{105-1(Satz)}

Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent:

i) $x \in A \setminus C$.

ii) "$\Re x \in T \setminus R$" oder "$\Im x \in T \setminus R$".

iii) "$x$ Zahl" und "$x \notin C$".
\end{quote}

--

\textbf{REIM-Notation.}
Beweis 105-1 \[ (i) \implies (ii) \] VS gleich

1: Aus VS gleich "\( x \in A \setminus C \)"
folgt via 5-3:
\[ (x \in A) \land (x \notin C). \]

2: Aus 1"\( x \in A \ldots \)"
folgt via 95-4(Def):
\( x \) Zahl.

3.1: Aus 2"\( x \) Zahl"
folgt via 96-9:
\( \text{Re} x \in T. \)

3.2: Aus 2"\( x \) Zahl"
folgt via 96-9:
\( \text{Im} x \in T. \)

4: Aus 1"\( \ldots x \notin C \)"
folgt via 101-2:
\( (\text{Re} x \notin \mathbb{R}) \lor (\text{Im} x \notin \mathbb{R}). \)

**Fallunterscheidung**

**4.1. Fall**

5: Aus 3.1"\( \text{Re} x \in T \)" und
aus 4.1. Fall"\( \text{Re} x \notin \mathbb{R} \)"
folgt via 5-3:
\( \text{Re} x \in T \setminus \mathbb{R}. \)

6: Aus 5
folgt:
\( (\text{Re} x \in T \setminus \mathbb{R}) \lor (\text{Im} x \in T \setminus \mathbb{R}). \)

**4.2. Fall**

5: Aus 3.2"\( \text{Im} x \in T \)" und
aus 4.2. Fall"\( \text{Im} x \notin \mathbb{R} \)"
folgt via 5-3:
\( \text{Im} x \in T \setminus \mathbb{R}. \)

6: Aus 5
folgt:
\( (\text{Re} x \in T \setminus \mathbb{R}) \lor (\text{Im} x \in T \setminus \mathbb{R}). \)

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:
\( (\text{Re} x \in T \setminus \mathbb{R}) \lor (\text{Im} x \in T \setminus \mathbb{R}). \)
Beweis 105-1 \([\text{ii}) \Rightarrow \text{iii}\]) VS gleich \((\Re x \in T \setminus \mathbb{R}) \lor (\Im x \in T \setminus \mathbb{R})\).

1: Nach VS gilt:
\((\Re x \in T \setminus \mathbb{R}) \lor (\Im x \in T \setminus \mathbb{R})\).

**Fallunterscheidung**

### 1.1. Fall

2.1: Aus 1.1. Fall \(\Re x \in T \setminus \mathbb{R}\) folgt via **ElementAxiom**: \(\Re x \in \text{Menge}\).

2.2: Aus 1.1. Fall \(\Re x \in T \setminus \mathbb{R}\) folgt via **5-3**: \(\Re x \notin \mathbb{R}\).

3.1: Aus 2.1 \(\Re x \text{ Menge}\) folgt via **96-9**: \(x \text{ Zahl}\).

3.2: Aus 2.2 \(\Re x \notin \mathbb{R}\) folgt via **101-2**: \(x \notin \mathbb{C}\).

4: Aus 3.1 und aus 3.2 folgt:
\((x \text{ Zahl}) \land (x \notin \mathbb{C})\).

### 1.2. Fall

2.1: Aus 1.2. Fall \(\Im x \in T \setminus \mathbb{R}\) folgt via **ElementAxiom**: \(\Im x \in \text{Menge}\).

2.2: Aus 1.2. Fall \(\Im x \in T \setminus \mathbb{R}\) folgt via **5-3**: \(\Im x \notin \mathbb{R}\).

3.1: Aus 2.1 \(\Im x \text{ Menge}\) folgt via **96-9**: \(x \text{ Zahl}\).

3.2: Aus 2.2 \(\Im x \notin \mathbb{R}\) folgt via **101-2**: \(x \notin \mathbb{C}\).

4: Aus 3.1 und aus 3.2 folgt:
\((x \text{ Zahl}) \land (x \notin \mathbb{C})\).

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: \((x \text{ Zahl}) \land (x \notin \mathbb{C})\).
Beweis 105-1: \( \text{(iii) } \Rightarrow \text{i) } \) VS gleich

1: Aus VS gleich “\( x \) Zahl...”
folgt via 95-4(Def):

\[ x \in A. \]

2: Aus 1 “\( x \in A \)” und
aus VS gleich “...\( x \notin C \)”
folgt via 5-3:

\[ x \in A \setminus C. \]

\[\square\]
105-2. Es wird eine “einparametige Liste” von Elementen aus $A \setminus C$ angegeben:

<table>
<thead>
<tr>
<th>105-2(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Es gelte:</td>
</tr>
<tr>
<td>$\rightarrow x \in T$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dann folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>a) $\text{nan} + i \cdot x \in A \setminus C$.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $(+\infty) + i \cdot x \in A \setminus C$.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $(-\infty) + i \cdot x \in A \setminus C$.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $x + i \cdot \text{nan} \in A \setminus C$.</td>
</tr>
<tr>
<td>e) $x + i \cdot (+\infty) \in A \setminus C$.</td>
</tr>
<tr>
<td>f) $x + i \cdot (-\infty) \in A \setminus C$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

RECH-Notation.
Beweis 105-2 abc)

1.1: Aus 95-12 "nan ∈ T" und
aus → "x ∈ T"
ofglt via AAIIV:
Re(nan + i · x) = nan.

1.2: Aus 95-12 "+∞ ∈ T" und
aus → "x ∈ T"
ofglt via AAIIV:
Re((+∞) + i · x) = +∞.

1.3: Aus 95-12 "−∞ ∈ T" und
aus → "x ∈ T"
ofglt via AAIIV:
Re((−∞) + i · x) = −∞.

2.1: Aus 1.1 "Re(nan + i · x) = nan" und
aus 104-2 "nan ∈ T \ R"
ofglt:
Re(nan + i · x) ∈ T \ R.

2.2: Aus 1.2 "Re((+∞) + i · x) = +∞" und
aus 104-2 "+∞ ∈ T \ R"
ofglt:
Re((+∞) + i · x) ∈ T \ R.

2.3: Aus 1.3 "Re((−∞) + i · x) = −∞" und
aus 104-2 "−∞ ∈ T \ R"
ofglt:
Re((−∞) + i · x) ∈ T \ R.

3. a): Aus 2.1 "Re(nan + i · x) ∈ T \ R"
ofglt via 105-1:
nan + i · x ∈ A \ C.

3. b): Aus 2.2 "Re((+∞) + i · x) ∈ T \ R"
ofglt via 105-1:
(+∞) + i · x ∈ A \ C.

3. c): Aus 2.3 "Re((−∞) + i · x) ∈ T \ R"
ofglt via 105-1:
(−∞) + i · x ∈ A \ C.
Beweis 105-2 def)

1.1: Aus $\rightarrow "x \in T"$ und aus $95-12 "\text{nan} \in T"$ folgt via AAIV:
$$\text{Im}(x + i \cdot \text{nan}) = \text{nan}.$$

1.2: Aus $\rightarrow "x \in T"$ und aus $95-12 "+\infty \in T"$ folgt via AAIV:
$$\text{Im}(x + i \cdot (+\infty)) = +\infty.$$

1.3: Aus $\rightarrow "x \in T"$ und aus $95-12 "-\infty \in T"$ folgt via AAIV:
$$\text{Im}(x + i \cdot (-\infty)) = -\infty.$$

2.1: Aus 1.1" $\text{Im}(x + i \cdot \text{nan}) = \text{nan}$" und aus $104-2 "\text{nan} \in T \setminus \mathbb{R}"$ folgt:
$$\text{Im}(x + i \cdot \text{nan}) \in T \setminus \mathbb{R}.$$  

2.2: Aus 1.2" $\text{Im}(x + i \cdot (+\infty)) = +\infty$" und aus $104-2 " +\infty \in T \setminus \mathbb{R}"$ folgt:
$$\text{Im}(x + i \cdot (+\infty)) \in T \setminus \mathbb{R}.$$  

2.3: Aus 1.3" $\text{Im}(x + i \cdot (-\infty)) = -\infty$" und aus $104-2 " -\infty \in T \setminus \mathbb{R}"$ folgt:
$$\text{Im}(x + i \cdot (-\infty)) \in T \setminus \mathbb{R}.$$  

3.d): Aus 2.1" $\text{Im}(x + i \cdot \text{nan}) \in T \setminus \mathbb{R}$" folgt via 105-1:
$$x + i \cdot \text{nan} \in A \setminus \mathbb{C}. $$

3.e): Aus 2.2" $\text{Im}(x + i \cdot (+\infty)) \in T \setminus \mathbb{R}$" folgt via 105-1:
$$x + i \cdot (+\infty) \in A \setminus \mathbb{C}. $$

3.f): Aus 2.3" $\text{Im}(x + i \cdot (-\infty)) \in T \setminus \mathbb{R}$" folgt via 105-1:
$$x + i \cdot (-\infty) \in A \setminus \mathbb{C}. $$
105-3. Die folgende Liste resultiert aus 105-2, indem in 105-2 die Variable $x$ durch $\text{nan}, +\infty, -\infty \in \mathbb{T}$ ersetzt wird:

<table>
<thead>
<tr>
<th>105-3(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) $\text{nan} + i \cdot \text{nan} \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $\text{nan} + i \cdot (+\infty) \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $\text{nan} + i \cdot (-\infty) \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $(+\infty) + i \cdot \text{nan} \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>e) $(+\infty) + i \cdot (+\infty) \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>f) $(+\infty) + i \cdot (-\infty) \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>g) $(-\infty) + i \cdot \text{nan} \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>h) $(-\infty) + i \cdot (+\infty) \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>i) $(-\infty) + i \cdot (-\infty) \in A \setminus \mathbb{C}$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

RECH-Notation.
Beweis 105-3 a) 
Aus 95-12 \( \text{nan} \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( \text{nan} + i \cdot \text{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

b) 
Aus 95-12 \( +\infty \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( \text{nan} + i \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

c) 
Aus 95-12 \( -\infty \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( \text{nan} + i \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

d) 
Aus 95-12 \( \text{nan} \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( (+\infty) + i \cdot \text{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

e) 
Aus 95-12 \( +\infty \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( (+\infty) + i \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

f) 
95-12 \( -\infty \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( (+\infty) + i \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

g) 
Aus 95-12 \( \text{nan} \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( (-\infty) + i \cdot \text{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

h) 
Aus 95-12 \( +\infty \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( (-\infty) + i \cdot (+\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).

i) 
Aus 95-12 \( -\infty \in \mathbb{T} \) folgt via 105-2: 
\( (-\infty) + i \cdot (-\infty) \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C} \).
105-4. Es gilt $T \setminus \mathbb{R} \subseteq A \setminus \mathbb{C}$ und via 104-2 folgt hieraus nan, $+\infty$, $-\infty \in A \setminus \mathbb{C}$:

\[
\begin{align*}
105-4(\text{Satz}) \\
\text{a) } & T \setminus \mathbb{R} \subseteq A \setminus \mathbb{C}.
\text{b) } & \text{nan} \in A \setminus \mathbb{C}.
\text{c) } & +\infty \in A \setminus \mathbb{C}.
\text{d) } & -\infty \in A \setminus \mathbb{C}.
\end{align*}
\]

Beweis 105-4

REIM-Notation.

a)

\[
\begin{align*}
\text{Thema1} \\
2: & \text{ Aus Thema1" } \alpha \in T \setminus \mathbb{R} \text{" folgt via 5-3: } \alpha \in T.
3: & \text{ Aus } 2\text{" } \alpha \in T \text{" folgt via } \text{FST: } \alpha = \text{Re}\alpha.
4: & \text{ Aus Thema1" } \alpha \in T \setminus \mathbb{R} \text{" und aus } 3\text{" } \alpha = \text{Re}\alpha \text{" folgt: } \text{Re}\alpha \in T \setminus \mathbb{R}.
5: & \text{ Aus } 4\text{" } \text{Re}\alpha \in T \setminus \mathbb{R} \text{" folgt via 105-1: } \alpha \in A \setminus \mathbb{C}.
\end{align*}
\]

\begin{align*}
\text{Ergo Thema1: } & \forall \alpha : (\alpha \in T \setminus \mathbb{R}) \Rightarrow (\alpha \in A \setminus \mathbb{C}).
\text{Konsequenz via 0-2(Def): } & T \setminus \mathbb{R} \subseteq A \setminus \mathbb{C}.
\end{align*}
Beweis 105-4 bcd)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: \( T \setminus \mathbb{R} \subseteq A \setminus \mathbb{C} \).

2.b): Aus 104-2 “\( \text{nan} \in T \setminus \mathbb{R} \)” und aus 1 “\( T \setminus \mathbb{R} \subseteq A \setminus \mathbb{C} \)” folgt via 0-4: \( \text{nan} \in A \setminus \mathbb{C} \).

2.c): Aus 104-2 “\( +\infty \in T \setminus \mathbb{R} \)” und aus 1 “\( T \setminus \mathbb{R} \subseteq A \setminus \mathbb{C} \)” folgt via 0-4: \( +\infty \in A \setminus \mathbb{C} \).

2.d): Aus 104-2 “\( -\infty \in T \setminus \mathbb{R} \)” und aus 1 “\( T \setminus \mathbb{R} \subseteq A \setminus \mathbb{C} \)” folgt via 0-4: \( -\infty \in A \setminus \mathbb{C} \).

\( \square \)
105-5. Es gilt $p \in A \setminus C$ genau dann, wenn $-p \in A \setminus C$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-(p) \in A \setminus C$:

\begin{framed}
105-5(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent:

i) $p \in A \setminus C$.

ii) $-p \in A \setminus C$.

iii) $-(p) \in A \setminus C$.

\end{framed}
Beweis 105-5 [i] ⇒ [ii]) VS gleich

1: Aus VS gleich “\( p \in A \setminus C \)” folgt via 105-1:
\[ p \in A \setminus C. \]

2.1: Aus 1 “\( p \) Zahl...” folgt via 100-6:
\[ \neg p \text{ Zahl} \]

2.2: Es gilt:
\[ (\neg p \in C) \lor (\neg p \notin C) \]

Fallunterscheidung

2.2.1. Fall

3: Aus 2.2.1. Fall “\( \neg p \in C \)” folgt via 101-9:
\[ p \in C. \]

4: Es gilt 3 “\( p \in C \)”.
Es gilt 1 “\( \ldots p \notin C \)”.
Ex falso quodlibet folgt:
\[ \neg p \notin C. \]

2.2.2. Fall

\[ \neg p \notin C. \]

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:
\[ A1 \mid "\neg p \notin C" \]

3: Aus 2.1 “\( \neg p \) Zahl” und aus A1 gleich “\( \neg p \notin C \)” folgt via 105-1:
\[ \neg p \in A \setminus C. \]
Beweis: 105-5 \((\text{ii)} \Rightarrow \text{iii})\) VS gleich

1: Aus VS gleich \(−p \in A \setminus C\)
folgt via 105-1:
\((-p \text{ Zahl}) \land (-p \notin C).\)

2.1: Aus 1\(−p \text{ Zahl...}\)
folgt via 100-6:
\((-(-p) \text{ Zahl}).\)

2.2: Es gilt:
\((-(-p) \in C) \lor (-(-p) \notin C).\)

\[\text{Fallunterscheidung}\]

\begin{align*}
\text{2.2.1.Fall} & \quad \neg(-p) \in C. \\
3: & \quad \text{Aus 2.2.1.Fall} \("-p \in C"\)
\quad \text{folgt via 101-9:} \quad -p \in C. \\
4: & \quad \text{Es gilt 3\("-p \in C"\).}
\quad \text{Es gilt 1\(\ldots -p \notin C".}
\quad \text{Ex falso quodlibet folgt:} \quad -(-p) \notin C. \\
\end{align*}

\begin{align*}
\text{2.2.2.Fall} & \quad \neg(-p) \notin C. \\
\end{align*}

\[\text{Ende Fallunterscheidung}\]

In beiden Fällen gilt:

\[\text{A1} \quad \neg(-p) \notin C.\]

3: Aus 2.1\(--(-p) \text{ Zahl}"\) und
aus A1 gleich \(--(-p) \notin C"\)
folgt via 105-1:
\((-(-p) \in A \setminus C).\)
Beweis 105-5  

1: Aus VS gleich $\neg(-p) \in A \setminus C$ 
folgt via 105-1: 
$(\neg(-p) \text{ Zahl}) \land (\neg(-p) \notin C)$.

2.1: Aus 1$\neg(-p) \text{ Zahl...}$
folgt via 100-6:
$p \text{ Zahl}.$

2.2: Es gilt:
$(p \in C) \lor (p \notin C)$.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fallunterscheidung</th>
</tr>
</thead>
</table>

2.2.1. Fall

3: Aus 2.2.1. Fall$\ p \in C$
folgt via 101-9:
$\neg(-p) \in C$.

4: Es gilt 3$\neg(-p) \in C$.
Es gilt 1$\ldots\neg(-p) \notin C$.
Ex falso quodlibet folgt:
$p \notin C$.

2.2.2. Fall

$p \notin C$.

Ende Fallunterscheidung
In beiden Fällen gilt:

| A1 |$p \notin C$ |

3: Aus 2.1$p \text{ Zahl...}$ und
aus A1 gleich $p \notin C$
folgt via 105-1:
$p \in A \setminus C$. 

\[\square\]
105-6. Die Summe von \( x \in A \setminus C \) und \( y \) Zahl ist stets in \( A \setminus C \):

**105-6(Satz)**

\[ \text{Aus } \{x \in A \setminus C \} \text{ und } \{y \text{ Zahl}\} \text{ folgt } \{x + y \in A \setminus C\}. \]

**RECH-Notation.**

Beweis 105-6 VS gleich \((x \in A \setminus C) \land (y \text{ Zahl})\).

**REIM-Notation.**

1: Aus VS gleich “\( x \in A \setminus C \)” folgt via 105-1: \((x \text{ Zahl}) \land (x \notin C)\).

2: Aus 1“\( x \) Zahl” und aus VS gleich “\( \ldots y \) Zahl” folgt via 96-13: \( x + y \) Zahl.

3: Es gilt:

\[(x + y \in C) \lor (x + y \notin C).\]

**Fallunterscheidung**

**3.1.Fall**

4: Aus 4.1.Fall“\( x + y \in C \)” folgt via 102-3: \( x \in C \).

5: Es gilt 4“\( x \in C \)”. Es gilt 1“\( \ldots x \notin C \)”. Ex falso quodlibet folgt: \( x + y \in A \setminus C \).

**3.2.Fall**

Aus 2“\( x + y \) Zahl” und aus 3.2.Fall“\( x + y \notin C \)” folgt via 105-1: \( x + y \in A \setminus C \).

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: \( x + y \in A \setminus C \).
105-7. Es gilt \( \text{Re}(x - x) = \text{nan} \) oder \( \text{Im}(x - x) = \text{nan} \) genau dann, wenn \( x \in A \setminus \mathbb{C} \):

\[
105-7(\text{Satz})
\]

Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:

i) “\( \text{Re}(x - x) = \text{nan} \)” oder “\( \text{Im}(x - x) = \text{nan} \)”.

ii) \( x \in A \setminus \mathbb{C} \).

\[
\text{RECH-Notation}
\]

Beweis 105-7

\[
\text{REIM-Notation}
\]
Beweis 105-7 \( i \Rightarrow ii \) VS gleich \(((\text{Re}(x - x) = \text{nan}) \lor (\text{Im}(x - x) = \text{nan}))\).

1: Nach VS gilt: \(((\text{Re}(x - x) = \text{nan}) \lor (\text{Im}(x - x) = \text{nan}))\).

**Fallunterscheidung**

\[1.1.\text{Fall}\]

\[\begin{align*}
2: & \text{ Aus } 1.1.\text{Fall} "\text{Re}(x - x) = \text{nan}" \text{ und aus } 95-12 "\text{nan} \in \mathbb{T}" \text{ folgt: } \text{Re}(x - x) \in \mathbb{T}. \\
3: & \text{ Aus } 2 "\text{Re}(x - x) \in \mathbb{T}" \text{ folgt via } 96-9: x - x \text{ Zahl.} \\
4: & \text{ Aus } 3 \text{ folgt: } x + (-x) \text{ Zahl.} \\
5: & \text{ Aus } 4 "x + (-x) \text{ Zahl}" \text{ folgt via } 96-13: x \text{ Zahl.} \\
6: & \text{ Es gilt: } (x \in \mathbb{C}) \lor (x \notin \mathbb{C}).
\[\end{align*}\]

**Fallunterscheidung**

\[6.1.\text{Fall}\]

\[\begin{align*}
7: & \text{ Aus } 6.1.\text{Fall} "x \in \mathbb{C}" \text{ folgt via } 102-5: x - x = 0. \\
8: & \text{ Aus } 7 "x - x = 0" \text{ und aus } AAIII "\text{Re} = 0" \text{ folgt: } \text{Re}(x - x) = 0. \\
9: & \text{ Aus } 8 "\text{Re}(x - x) = 0" \text{ und aus } 1.1.\text{Fall} "\text{Re}(x - x) = \text{nan}" \text{ folgt: } 0 = \text{nan.} \\
10: & \text{ Es gilt } 9 "0 = \text{nan}". \\
& \text{ Es gilt } 95-7 "0 \neq \text{nan}". \\
& \text{Ex falso quodlibet folgt: } x \in A \setminus \mathbb{C}.
\[\end{align*}\]

\[6.2.\text{Fall}\]

\[\begin{align*}
& \text{Aus } 5 "x \text{ Zahl}" \text{ und aus } 6.2.\text{Fall} "x \notin \mathbb{C}" \text{ folgt via } 105-1: x \in A \setminus \mathbb{C}.
\[\end{align*}\]

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: \(x \in A \setminus \mathbb{C} \).
Beweis 105-7 \([i] \Rightarrow [ii]\) VS gleich \(((\text{Re}(x - x) = \text{nan}) \lor (\text{Im}(x - x) = \text{nan}))\).

\[\begin{align*}
\text{Fallunterscheidung} \\
\end{align*}\]

1.2. Fall

2: Aus 1.2. Fall \(\text{Im}(x - x) = \text{nan}\) und
aus 95-12 \(\text{nan} \in \mathbb{T}\)
folgt:
\(\text{Im}(x - x) \in \mathbb{T}\).

3: Aus 2 \(\text{Im}(x - x) \in \mathbb{T}\)
folgt via 96-9:
\(x - x \text{ Zahl}\).

4: Aus 3
folgt:
\(x + (-x) \text{ Zahl}\).

5: Aus 4 \(x + (-x) \text{ Zahl}\)
folgt via 96-13:
\(x \text{ Zahl}\).

6: Es gilt:
\((x \in \mathbb{C}) \lor (x \notin \mathbb{C})\).

\[\begin{align*}
\text{Fallunterscheidung} \\
\end{align*}\]

6.1. Fall

7: Aus 6.1. Fall \(x \in \mathbb{C}\)
folgt via 102-5:
\(x - x = 0\).

8: Aus 7 \(x - x = 0\) und
aus AAIll \(\text{Im}0 = 0\)
folgt:
\(\text{Im}(x - x) = 0\).

9: Aus 8 \(\text{Im}(x - x) = 0\) und
aus 1.2. Fall \(\text{Im}(x - x) = \text{nan}\)
folgt:
\(0 = \text{nan}\).

10: Es gilt 9 \(0 = \text{nan}\).
Es gilt 95-7 \(0 \neq \text{nan}\).
Ex falso quodlibet folgt:
\(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}\).

6.2. Fall

\(x \notin \mathbb{C}\).

Aus 5 \(x \text{ Zahl}\) und
aus 6.2. Fall \(x \notin \mathbb{C}\)
folgt via 105-1:
\(x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}\).

\[\begin{align*}
\text{Ende Fallunterscheidung} \\
\text{In beiden Fällen gilt:} \quad x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}.
\end{align*}\]
Beweis 105-7 \([i] \Rightarrow [ii]\) VS gleich \((\text{Re}(x - x) = \text{nan}) \lor (\text{Im}(x - x) = \text{nan})\).

\[\]

Fallunterscheidung

\[\]

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: \(x \in A \setminus C\).

\([ii] \Rightarrow [i]\) VS gleich \(x \in A \setminus C\).

1: Aus VS gleich "\(x \in A \setminus C\)"

folgt via 105-1:

\((\text{Re} x \in T \setminus \mathbb{R}) \lor (\text{Im} x \in T \setminus \mathbb{R})\).

Fallunterscheidung

\[\]

1.1. Fall

\[\]

2: Aus 1.1. Fall "\(\text{Re} x \in T \setminus \mathbb{R}\)"

folgt via 104-7:

\((\text{Re} x) - (\text{Re} x) = \text{nan}\).

3: \(\text{Re}(x-x) = \text{Re}(x+(-x)) 96=25 (\text{Re} x)+(\text{Re}(-x)) 96=27 (\text{Re} x)+(-\text{Re} x)\)

\[\]

4: Aus 3 "\(\text{Re}(x-x) = \ldots = \text{nan}\)"

folgt: \((\text{Re}(x-x) = \text{nan}) \lor (\text{Im}(x-x) = \text{nan})\).

1.2. Fall

\[\]

2: Aus 1.2. Fall "\(\text{Im} x \in T \setminus \mathbb{R}\)"

folgt via 104-7:

\((\text{Im} x) - (\text{Im} x) = \text{nan}\).

3: \(\text{Im}(x-x) = \text{Im}(x+(-x)) 96=25 (\text{Im} x)+(\text{Im}(-x)) 96=27 (\text{Im} x)+(-\text{Im} x)\)

\[\]

4: Aus 3 "\(\text{Im}(x-x) = \ldots = \text{nan}\)"

folgt: \((\text{Re}(x-x) = \text{nan}) \lor (\text{Im}(x-x) = \text{nan})\).

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt:

\((\text{Re}(x-x) = \text{nan}) \lor (\text{Im}(x-x) = \text{nan})\).
FundamentalSatz in $\mathbb{R}$.

NTF$\mathbb{R}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{R}$.
106-1. Mit diesem folgenden Satz wird der erste Schritt in Richtung des später zu beweisenden FundamentalSatz getan:

106-1(Satz)

Es gelte:

\[ \to x \in \mathbb{R} \]

\[ \to y \in \mathbb{R} \]

Dann folgt:

a) \((-x) \cdot y = -x \cdot y. \]

b) \(x \cdot (-y) = -x \cdot y. \]

c) \((-x) \cdot (-y) = x \cdot y. \]

RECH-Notation.
Beweis 106-1 a)

1.1: Aus \( x \in \mathbb{R} \) folgt via \( \in \mathbb{SZ} \):
\[ x \in \mathbb{C}. \]

1.2: Aus \( x \in \mathbb{R} \) folgt via 100-6:
\[ -x \in \mathbb{R}. \]

1.3: Aus \( y \in \mathbb{R} \) folgt via \( \in \mathbb{SZ} \):
\[ y \text{ Zahl}. \]

1.4: Aus \( x \in \mathbb{R} \) und aus \( y \in \mathbb{R} \) folgt via AAV:
\[ x \cdot y = y \cdot x. \]

2.1: Aus 1.1\( x \in \mathbb{C} \) folgt via 102-5:
\[ x - x = 0. \]

2.2: Aus 1.3 \( y \text{ Zahl} \) folgt via FSM0:
\[ y \cdot 0 = 0. \]

2.3: Aus \( y \in \mathbb{R} \) und aus 1.2 \( -x \in \mathbb{R} \) folgt via AAV:
\[ y \cdot (-x) = (-x) \cdot y. \]

2.4: Aus \( y \in \mathbb{R} \), aus \( x \in \mathbb{R} \) und aus 1.2 \( -x \in \mathbb{R} \) folgt via AAV:
\[ y \cdot (x + (-x)) = y \cdot x + y \cdot (-x). \]

3: \( 0 \)
\[ \overset{\text{2.2}}{=} y \cdot 0 \]
\[ \overset{\text{2.1}}{=} y \cdot (x - x) \]
\[ = y \cdot (x + (-x)) \]
\[ \overset{\text{2.4}}{=} y \cdot x + y \cdot (-x) \]
\[ \overset{\text{1.4}}{=} x \cdot y + y \cdot (-x) \]
\[ \overset{\text{2.3}}{=} x \cdot y + (-x) \cdot y. \]

4: Aus 3\( 0 = \ldots = x \cdot y + (-x) \cdot y \) folgt via FS−:
\[ (-x) \cdot y = -x \cdot y. \]
Beweis 106-1 b)

1.1: Aus $\rightarrow$ "$y \in \mathbb{R}$" und
    aus $\rightarrow$ "$x \in \mathbb{R}$"
    folgt via AAV: $y \cdot x = x \cdot y$.

1.2: Aus $\rightarrow$ "$y \in \mathbb{R}$"
    folgt via 100-6: $-y \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus $\rightarrow$ "$y \in \mathbb{R}$" und
    aus $\rightarrow$ "$x \in \mathbb{R}$"
    folgt via des bereits bewiesenen a): $(-y) \cdot x = -y \cdot x$.

2: Aus $\rightarrow$ "$x \in \mathbb{R}$" und
    aus 1.2 "$-y \in \mathbb{R}$"
    folgt via AAV: $x \cdot (-y) = (-y) \cdot x$.

3: $x \cdot (-y) = (-y) \cdot x = -y \cdot x = -(y \cdot x) = -x \cdot y$.

4: Aus 3
    folgt: $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

c)

1: Aus $\rightarrow$ "$y \in \mathbb{R}$"
    folgt via 100-6: $-y \in \mathbb{R}$.

2: Aus $\rightarrow$ "$x \in \mathbb{R}$" und
    aus 1 "$-y \in \mathbb{R}$"
    folgt via des bereits bewiesenen a): $(-x) \cdot (-y) = -x \cdot (-y)$.

3: Aus $\rightarrow$ "$x \in \mathbb{R}$" und
    aus $\rightarrow$ "$y \in \mathbb{R}$"
    folgt via des bereits bewiesenen b): $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

4: $(-x) \cdot (-y) = -x \cdot (-y) = -(-x \cdot y) = x \cdot y$.

5: Aus 4
    folgt: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. 

\[\square\]
106-2. In \( \mathbb{R} \) gibt es NullTeilerFreiheit:

\[
\begin{align*}
106-2(\text{Satz}) & \quad (\text{NTF}_{\mathbb{R}}: \text{NullTeilerFreiheit in } \mathbb{R}) \\
\text{Unter den Voraussetzungen} & \ldots \\
\Rightarrow & \ x \in \mathbb{R}. \\
\Rightarrow & \ y \in \mathbb{R}. \\
\ldots & \text{sind die Aussagen i), ii) äquivalent:} \\
i) & \ x \cdot y = 0. \\
ii) & \ "x = 0" \text{ oder } "y = 0".
\end{align*}
\]

---

RECH-Notation.
Beweis 106-2 \([i) \Rightarrow ii)\] VS gleich

1: Es gilt:

\[(0 \neq x) \land (0 \neq y) \lor (x = 0) \lor (y = 0).\]

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1. Fall</th>
<th>((0 \neq x) \land (0 \neq y)).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2.1: Aus (\rightarrow &quot;x \in \mathbb{R}&quot;) folgt via <strong>AAV</strong>:</td>
<td>(rez(x) \in \mathbb{R}).</td>
</tr>
<tr>
<td>2.2: Aus 1.1. Fall &quot;(0 \neq x) ...&quot; und aus (\rightarrow &quot;x \in \mathbb{R}&quot;) folgt via <strong>96-37</strong>:</td>
<td>(rez(x) \cdot x = 1).</td>
</tr>
<tr>
<td>2.3: Aus (\rightarrow &quot;y \in \mathbb{R}&quot;) folgt via <strong>AAV</strong>:</td>
<td>(1 \cdot y = y).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.1 &quot;(rez(x) \in \mathbb{R})&quot; folgt via <strong>SZ</strong>:</td>
<td>(rez(x)) Zahl.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.1 &quot;(rez(x) \in \mathbb{R})&quot;, aus (\rightarrow &quot;x \in \mathbb{R}&quot;) und aus (\rightarrow &quot;y \in \mathbb{R}&quot;) folgt via <strong>AAV</strong>:</td>
<td>(rez(x) \cdot (x \cdot y) = (rez(x) \cdot x) \cdot y).</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 3.1 &quot;(rez(x)) Zahl&quot; folgt via <strong>FSM0</strong>:</td>
<td>(rez(x) \cdot 0 = 0).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

| 5: \(0 \equiv rez(x) \cdot 0 \equiv rez(x) \cdot (x \cdot y) \equiv (rez(x) \cdot x) \cdot y \equiv 1 \cdot y \equiv y\). |
|-----------------|-----------------|
| 6: Aus 4 folgt: | \(0 = y\). |
| 7: Es gilt 6 "\(0 = y\)\". Es gilt 1.1. Fall "... \(0 \neq y\)". Ex falso quodlibet folgt: | \((x = 0) \lor (y = 0)\). |

| 1.2. Fall | \((x = 0) \lor (y = 0)\). |

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: \((x = 0) \lor (y = 0)\).
Beweis 106-2 \( \text{(ii) } \Rightarrow \text{i) } \)

VS gleich \((x = 0) \lor (y = 0)\).

1: Nach VS gilt:
\((x = 0) \lor (y = 0)\).

**Fallunterscheidung**

1.1. Fall \( x = 0 \).

2: Aus \( \rightarrow \text{"} y \in \mathbb{R} \text{"} \)
   folgt via \(\in \text{SZ}: \)
   \( y \text{ Zahl.} \)

3: Aus \( 2\text{"} y \text{ Zahl"} \)
   folgt via \(\text{FSM0}: \)
   \( 0 \cdot y = 0. \)

4: Aus 1.1. Fall \( \text{"} x = 0 \text{"} \) und
   aus \( 2\text{"} 0 \cdot y = 0 \text{"} \)
   folgt:
   \( x \cdot y = 0. \)

1.2. Fall \( y = 0 \).

2: Aus \( \rightarrow \text{"} x \in \mathbb{R} \text{"} \)
   folgt via \(\in \text{SZ}: \)
   \( x \text{ Zahl.} \)

3: Aus \( 2\text{"} x \text{ Zahl"} \)
   folgt via \(\text{FSM0}: \)
   \( x \cdot 0 = 0. \)

4: Aus 1.2. Fall \( \text{"} y = 0 \text{"} \) und
   aus \( 2\text{"} x \cdot 0 = 0 \text{"} \)
   folgt:
   \( x \cdot y = 0. \)

**Ende Fallunterscheidung**

In beiden Fällen gilt:
\( x \cdot y = 0. \)
\( \square \)
106-3. Via Negation folgt aus NTF\(\mathbb{R}\) das vorliegende Kriterium:

**106-3(Satz)**

Unter den Voraussetzungen . . .

\[ \rightarrow x \in \mathbb{R}. \]

\[ \rightarrow y \in \mathbb{R}. \]

. . . sind die Aussagen i), ii) äquivalent:

i) \(0 \neq x \cdot y.\)

ii) “0 \neq x” und “0 \neq y”.

RECH-Notation.

Beweis 106-3

1: Aus \(\rightarrow \) “\(x \in \mathbb{R}\)” und

aus \(\rightarrow \) “\(y \in \mathbb{R}\)”

folgt via NTF\(\mathbb{R}\):

\[ x \cdot y = 0 \iff (x = 0) \lor (y = 0). \]

2: Aus 1

folgt:

\( \neg(x \cdot y = 0) \iff \neg((x = 0) \lor (y = 0)). \)

3: Aus 2

folgt:

\( \neg(x \cdot y = 0) \iff \neg(x = 0) \land \neg(y = 0). \)

4: Aus 3

folgt:

\(0 \neq x \cdot y \iff (0 \neq x) \land (0 \neq y).\)
Parameter Axiom III. \( \leq \).
\( \leq \)-Notation.
FS\( \leq \) : FundamentalSatz \( \leq \).
KGM: Kommutativ Gesetz Multiplikation.

Ersterstellung: 20/07/05 Letzte Änderung: 03/02/12
ParameterAxiom III. Die klassische KleinerGleich-Relation betritt in axi- matischer Weise die Essays. Im Folgenden wird ParameterAxiom III ohne explizite Referenz verwendet, i.e. es wird im Folgenden $\leq$ ohne expliziten Bezug auf ParameterAxiom III als Klasse angesehen:

\[
\text{ParameterAxiom III} \quad \exists \Omega : \Omega = \leq.
\]
107-1. Bei der im ParameterAxiom III in die Essays eingebrachten Klasse \( \leq \) handelt es sich um die KleinerGleich-Relation. Die Klasse \( \leq \) ist die Kleiner-Relation und wird mit einem eigenen, an die HOIR-Notation angelehnten Symbol bezeichnet:

\[
\begin{align*}
107-1(\text{Definition}) \\
\text{a) } & < = \text{ir} \leq. \\
\text{b) } & \text{“}\mathcal{C} \text{ KleinerGleich-Relation” genau dann, wenn gilt:} \\
& \mathcal{C} = \leq. \\
\text{c) } & \text{“}\mathcal{C} \text{ Kleiner-Relation” genau dann, wenn gilt:} \\
& \mathcal{C} = <.
\end{align*}
\]
107-2. Die vorliegenden Aussagen verstehen sich fast von selbst:

**107-2(Satz)**

a) \( \leq \) KleinerGleich-Relation.

b) Aus “\( \mathcal{C} \) KleinerGleich-Relation” und “\( \mathcal{D} \) KleinerGleich-Relation” folgt “\( \mathcal{C} = \mathcal{D} \)”.

c) < KleinerRelation.

d) Aus “\( \mathcal{C} \) Kleiner-Relation” und “\( \mathcal{D} \) Kleiner-Relation” folgt “\( \mathcal{C} = \mathcal{D} \)”.

**Beweis 107-2 a)**

Aus “\( \leq = \leq \)” folgt via **107-1(Def)**: \( \leq \) KleinerGleichRelation.

b) VS gleich \((\mathcal{C} \text{ KleinerGleich-Relation}) \land (\mathcal{D} \text{ KleinerGleich-Relation})\).

1.1: Aus VS gleich “\( \mathcal{C} \) KleinerGleich-Relation…” folgt via **107-1**: \( \mathcal{C} = \leq \).

1.2: Aus VS gleich “…\( \mathcal{D} \) KleinerGleich-Relation” folgt via **107-1**: \( \mathcal{D} = \leq \).

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt: \( \mathcal{C} = \mathcal{D} \).

c)

Aus “\( < = < \)” folgt via **107-1(Def)**: < KleinerRelation.

d) VS gleich \((\mathcal{C} \text{ Kleiner-Relation}) \land (\mathcal{D} \text{ Kleiner-Relation})\).

1.1: Aus VS gleich “\( \mathcal{C} \) Kleiner-Relation…” folgt via **107-1**: \( \mathcal{C} = < \).

1.2: Aus VS gleich “…\( \mathcal{D} \) Kleiner-Relation” folgt via **107-1**: \( \mathcal{D} = < \).

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt: \( \mathcal{C} = \mathcal{D} \).
≤-Notation. Eine der Standard-Notationen der Mathematik wird hiermit in die Essays übernommen:

\[
\begin{array}{l}
\text{≤-Notation} \\
1) \quad \text{"} p \leq q \text{" genau dann, wenn gilt:} \\
\quad (p, q) \in \leq . \\
2) \quad \text{"} p < q \text{" genau dann, wenn gilt:} \\
\quad (p, q) \in \leq .
\end{array}
\]
Arithmetisches Axiom VII. Hiermit werden die grundlegenden Aussagen über ≤ und über die Zusammenhänge elementaren Rechnens mit der Kleiner-Relation getroffen. Mit “$-\infty < x < +\infty$” von d) ist die Aussage “$(-\infty < x) \land (x < +\infty)$” gemeint:

**AAVII: Arithmetisches Axiom VII**

a) $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $S$.
b) $S$ ist $\leq$Kette.
c) $\leq$ Total Vollständig.
d) Aus “$x \in \mathbb{R}$” folgt “$-\infty < x < +\infty$.”
e) Aus “$x \in \mathbb{R}$” und “$y \in \mathbb{R}$” und “$x < y$” folgt “$0 < y - x$”.
f) Aus “$x \in \mathbb{R}$” und “$y \in \mathbb{R}$” und “$0 < y - x$” folgt “$x < y$”.
g) Aus “$x \in \mathbb{R}$” und “$y \in \mathbb{R}$” und “$0 < x$” und “$0 < y$”

folgt “$0 < x \cdot y$”.
h) Aus “$x \in \mathbb{R}$” und “$0 < x$” folgt “$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$”.
i) Aus “$x \in \mathbb{R}$” und “$0 < x$” folgt “$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$”.
j) Aus “$x \in \mathbb{R}$” und “$x < 0$” folgt “$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$”.
k) Aus “$x \in \mathbb{R}$” und “$x < 0$” folgt “$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$”.

**RECH. $\leq$-Notation.**
107-3. Die unscheinbar wirkende Aussage “$x \leq y$” hat mannigfaltige Konsequenzen, die alle in den axiomatisch fest gelegten Eigenschaften von $\leq$ begründet sind:

**107-3(Satz)**

*Es gelte:*

$\rightarrow x \leq y$.

*Dann folgt:*

a) $x \in S$.

b) $y \in S$.

c) $x \leq x$.

d) $y \leq y$.

e) $x = \text{Re}x$.

f) $y = \text{Re}y$.

g) $\text{Re}x \leq y$.

h) $x \leq \text{Re}y$.

i) $\text{Re}x \leq \text{Re}y$.

---

REIM. $\leq$-Notation.

**Beweis 107-3**

1: Via AA VII gilt: $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $S$.

2: Aus 1 “$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $S$” folgt via 34-13: $(\leq \text{Relation in } S) \land (\leq \text{reflexiv in } S)$.

...
Beweis 107-3

... 

3.a): Aus 2“≤ Relation in $\mathbb{S}$...” und aus $\rightarrow$ “$x \leq y$”
folgt via 34-1: $x \in \mathbb{S}$.

3.b): Aus 2“≤ Relation in $\mathbb{S}$...” und aus $\rightarrow$ “$x \leq y$”
folgt via 34-1: $y \in \mathbb{S}$.

3.c): Aus 2“≤ Relation in $\mathbb{S}$...”, aus 2“... ≤ reflexiv in $\mathbb{S}$” und aus $\rightarrow$ “$x \leq y$”
folgt via 34-11: $x \leq x$.

3.d): Aus 2“≤ Relation in $\mathbb{S}$...”, aus 2“... ≤ reflexiv in $\mathbb{S}$” und aus $\rightarrow$ “$x \leq y$”
folgt via 34-11: $y \leq y$.

4.1: Aus 3.a) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$: $x \in \mathbb{T}$.

4.2: Aus 3.b) “$y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$: $y \in \mathbb{T}$.

5.e): Aus 4.1“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via $\text{FST}$: $x = \text{Re}x$.

5.f): Aus 4.2“$y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\text{FST}$: $y = \text{Re}y$.

6.g): Aus 5.e) “$x = \text{Re}x$” und aus $\rightarrow$ “$x \leq y$”
folgt: $\text{Re}x \leq y$.

6.h): Aus $\rightarrow$ “$x \leq y$” und aus 5.f) “$y = \text{Re}y$”
folgt: $x \leq \text{Re}y$.

7.i): Aus 6.g) “$\text{Re}x \leq y$” und aus 5.f) “$y = \text{Re}y$”
folgt: $\text{Re}x \leq \text{Re}y$. 

$\square$
107-4. Interessanter Weise ist über AAVII hinaus gehend $x \in \mathbb{R}$ äquivalent zu $-\infty < x < +\infty$:

\begin{center}
\begin{tabular}{ll}
\hline
107-4(Satz) & \\
Die Aussagen \textit{i)}, \textit{ii)} sind äquivalent: & \\
\textit{i)} $x \in \mathbb{R}$. & \\
\textit{ii)} $-\infty < x < +\infty$. & \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}

\begin{itemize}
\item \textbf{Beweis 107-4} \hspace{1cm} \textbf{VS gleich} \hspace{1cm} $x \in \mathbb{R}$.
\item Aus \textbf{VS gleich} "$x \in \mathbb{R}$" folgt via AAVII: $-\infty < x < +\infty$.
\item \textbf{VS gleich} "$-\infty < x \ldots$" folgt via \textbf{41-3}: $-\infty \leq x$.
\item \textbf{VS gleich} "$-\infty < x \ldots$" folgt via \textbf{41-3}: $-\infty \neq x$.
\item \textbf{VS gleich} "$\ldots x < +\infty$" folgt via \textbf{41-3}: $x \neq +\infty$.
\item Aus 1.1 "$-\infty \leq x$" folgt via \textbf{107-3}: $x \in \mathbb{S}$.
\item Aus 1.2 folgt: $x \neq -\infty$.
\item Aus 2.1 "$x \in \mathbb{S}$", aus 1.3 "$x \neq +\infty$" und aus 2.2 "$x \neq -\infty$" folgt via \textbf{95-17}: $x \in \mathbb{R}$.
\end{itemize}
107-5. Die Aussage \( x \in S \) ist - unter anderem - äquivalent zu \( x \leq x \):

\[
\begin{align*}
107-5&\text{(Satz)} \\
Die Aussagen &i), ii), iii), iv), v) sind äquivalent:
\end{align*}
\]

i) \( x \in S \).

ii) \( x \leq x \).

iii) \(-\infty \leq x \).

iv) \( x \leq +\infty \).

v) \(-\infty \leq x \leq +\infty \).

\( \leq \)\text{:Notation.}

\textbf{Beweis 107-5} \[1) \Rightarrow ii)] \text{VS gleich} \quad x \in S . \]

1: Aus \text{AAVII}“\( \leq \) antiSymmetrische Halbordnung in \( S \)”\nfolgt via \text{34-13}: \( \leq \text{reflexiv in } S \).

2: Aus 1“\( \leq \) reflexiv in \( S \)” und
aus \text{VS gleich} “\( x \in S \)”\nfolgt via \text{30-17(Def)}: \( x \leq x \).
Beweis 107-5 \[ \text{ii) } \Rightarrow \text{ iii)} \]

1: Aus VS gleich "\( x \leq x \)"
folgt via 107-3:
\[ x \in S. \]

2: Aus 1"\( x \in S \)"
folgt via 95-15:
\[ (x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty). \]

\[ \text{Fallunterscheidung} \]

\[ \begin{array}{ll}
\text{2.1.Fall} & x \in \mathbb{R}. \\
3: & \text{Aus 2.1.Fall } "x \in \mathbb{R}"
\text{ folgt via AAVII: } -\infty < x. \\
4: & \text{Aus 3" } -\infty < x"
\text{ folgt via 41-3: } -\infty \leq x.
\end{array} \]

\[ \begin{array}{ll}
\text{2.2.Fall} & x = +\infty. \\
3.1: & \text{Via AAVII gilt: } \leq \text{ antiSymmetrische Halbordnung in } S.
3.2: & \text{Via AAI gilt: } 0 \in \mathbb{R}.
4.1: & \text{Aus 3.1" } \leq \text{ antiSymmetrische Halbordnung in } S"
\text{ folgt via 34-13: } \leq \text{ transitiv.} \\
4.2: & \text{Aus 3.2" } 0 \in \mathbb{R}"
\text{ folgt via AAVII: } -\infty < 0 < +\infty.
5: & \text{Aus 4.1" } \leq \text{ transitiv" ,}
\text{ aus 4.2" } -\infty < 0 \ldots " \text{ und}
\text{ aus 4.2" } \ldots 0 < +\infty" 
\text{ folgt via 44-1: } -\infty \leq +\infty.
6: & \text{Aus 5" } -\infty \leq +\infty" \text{ und}
\text{ aus 2.2.Fall } "x = +\infty"
\text{ folgt: } -\infty \leq x.
\end{array} \]

...
Beweis 107-5 \( \text{ii)} \Rightarrow \text{iii)} \) VS gleich \( x \leq x. \)

Fallunterscheidung

\[
\begin{align*}
2.3. \text{Fall} \\
\text{3.1:} & \text{ Via 95-11 gilt: } -\infty \in \mathbb{S}. \\
\text{3.2:} & \text{ Via AA VII gilt: } -\infty \leq \text{ antiSymmetrische Halbordnung in } \mathbb{S}. \\
\text{4:} & \text{ Aus 3.2“} \leq \text{ antiSymmetrische Halbordnung in } \mathbb{S}” \\
& \text{ folgt via 34-13: } \leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S}. \\
\text{5:} & \text{ Aus 4“} \leq \text{ reflexiv in } \mathbb{S}” \text{ und } \\
& \text{ aus 3.2“} -\infty \in \mathbb{S}” \\
& \text{ folgt via 30-17(Def): } -\infty \leq -\infty. \\
\text{6:} & \text{ Aus 5“} -\infty \leq -\infty” \text{ und } \\
& \text{ aus 2.3.} \text{Fall“} x = -\infty” \\
& \text{ folgt: } -\infty \leq x.
\end{align*}
\]

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: \( -\infty \leq x. \)

\[
\begin{align*}
\text{iii)} \Rightarrow \text{iv)} \) VS gleich \( -\infty \leq x. \)
\]

\[
\begin{align*}
\text{1:} & \text{ Aus VS gleich “} -\infty \leq x” \\
& \text{ folgt via 107-3: } x \in \mathbb{S}. \\
\text{2:} & \text{ Aus 1“} x \in \mathbb{S}” \\
& \text{ folgt via 95-15: } (x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty). \\
\end{align*}
\]

Fallunterscheidung

\[
\begin{align*}
2.1. \text{Fall} \\
\text{3:} & \text{ Aus 2.1.} \text{Fall“} x \in \mathbb{R}” \\
& \text{ folgt via AA VII: } x < +\infty. \\
\text{4:} & \text{ Aus 3“} x < +\infty” \\
& \text{ folgt via 41-3: } x \leq +\infty.
\end{align*}
\]

...
Beweis 107-5 \([iii) \Rightarrow iv]\) VS gleich \(-\infty \leq x\).

...  

**Fallunterscheidung**

...  

2.2. Fall  

3.1: Via 95-11 gilt: \(+\infty \in S\).  

3.2: Via AAVII gilt: \(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(S\).  

4: Aus 3.2“\(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(S\)”  
folgt via 34-13: \(\leq\) reflexiv in \(S\).  

5: Aus 4“\(\leq\) reflexiv in \(S\)” und  
aus 3.2“\(+\infty \in S\)”  
folgt via 30-17(Def): \(+\infty \leq +\infty\).  

6: Aus 2.2.Fall“\(x = +\infty\)” und  
aus 5“\(+\infty \leq +\infty\)”  
folgt: \(x \leq +\infty\).  

2.3. Fall  

3.1: Via AAVII gilt: \(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(S\).  

3.2: Via AAII gilt: \(0 \in \mathbb{R}\).  

4.1: Aus 3.1“\(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(S\)”  
folgt via 34-13: \(\leq\) transitiv.  

4.2: Aus 3.2“\(0 \in \mathbb{R}\)”  
folgt via AAVII: \(-\infty < 0 < +\infty\).  

5: Aus 4.1“\(\leq\) transitiv”,  
aus 4.2“\(-\infty < 0\)” und  
aus 4.2“\(0 < +\infty\)”  
folgt via 44-1: \(-\infty \leq +\infty\).  

6: Aus 2.2.Fall“\(x = -\infty\)” und  
aus 5“\(-\infty \leq +\infty\)”  
folgt: \(x \leq +\infty\).  

**Ende Fallunterscheidung** In allen Fällen gilt: \(x \leq +\infty\).
Beweis 107-5 \( (iv) \Rightarrow v \) VS gleich

1: Aus VS gleich "\( x \leq +\infty \)"
   folgt via 107-3:
   \[ x \in \mathbb{S}. \]

2: Aus 1 "\( x \in \mathbb{S} \)"
   folgt via 95-15:
   \[ (x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty). \]

\begin{tabular}{|l|}
\hline
\textbf{Fallunterscheidung} \\
\hline
\hline
\textbf{2.1.Fall} & \( x \in \mathbb{R}. \) \\
\hline
3: Aus 2.1.Fall "\( x \in \mathbb{R} \)"
   folgt via AAVII: & \( -\infty < x. \) \\
4: Aus 3 "\( -\infty < x \)"
   folgt via 41-3: & \( -\infty \leq x. \) \\
5: Aus 4 "\( -\infty \leq x \)" und
   aus VS gleich "\( x \leq +\infty \)"
   folgt: & \( -\infty \leq x \leq +\infty. \) \\
\hline
\hline
\textbf{2.2.Fall} & \( x = +\infty. \) \\
\hline
3.1: Via AAVII gilt: & \( \leq \) antiSymmetrische Halbordnung in \( \mathbb{S}. \) \\
3.2: Via AAI gilt: & \( 0 \in \mathbb{R}. \) \\
4.1: Aus 3.1 "\( \leq \) antiSymmetrische Halbordnung in \( \mathbb{S} \)"
   folgt via 34-13: & \( \leq \) transitiv. \\
4.2: Aus 3.2 "\( 0 \in \mathbb{R} \)"
   folgt via AAVII: & \( -\infty < 0 < +\infty. \) \\
5: Aus 4.1 "\( \leq \) transitiv",
   aus 4.2 "\( -\infty < 0 \ldots \)" und
   aus 4.2 "\( \ldots 0 < +\infty \)"
   folgt via 44-1: & \( -\infty \leq +\infty. \) \\
6: Aus 5 "\( -\infty \leq +\infty \)" und
   aus 2.2.Fall "\( x = +\infty \)"
   folgt: & \( -\infty \leq x. \) \\
7: Aus 6 "\( -\infty \leq x \)" und
   aus VS gleich "\( x \leq +\infty \)"
   folgt: & \( -\infty \leq x \leq +\infty. \) \\
\hline
\end{tabular}
Beweis 107-5 \( \{ iv \} \Rightarrow v \) \( \operatorname{VS} \) gleich \( x \leq +\infty \).

...Fallunterscheidung...

2.3. Fall

3.1: Via 95-11 gilt: \( -\infty \in S \).

3.2: Via AAVII gilt: \( \leq \) antiSymmetrische Halbordnung in \( S \).

4: Aus 3.2\( \leq \) antiSymmetrische Halbordnung in \( S \)"
folgt via 34-13: \( \leq \) reflexiv in \( S \).

5: Aus 4\( \leq \) reflexiv in \( S \) und
aus 3.2\( -\infty \in S \)"
folgt via 30-17(Def): \( -\infty \leq -\infty \).

6: Aus 5\( -\infty \leq -\infty \) und
aus 2.3. Fall“\( x = -\infty \)"
folgt: \( -\infty \leq x \).

7: Aus 6\( -\infty \leq x \) und
aus VS gleich “\( x \leq +\infty \)"
folgt: \( -\infty \leq x \leq +\infty \).

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: \( -\infty \leq x \leq +\infty \).

\( \{ v \} \Rightarrow i \) \( \operatorname{VS} \) gleich \( -\infty \leq x \leq +\infty \).

Aus \( \operatorname{VS} \) gleich “\( -\infty \leq x \ldots \)
folgt via 107-3: \( x \in S \).

\( \square \)
107-6. Hier werden einige wenig verblüffende Aussagen über die Kleiner(Gleich)-Relation und 0, 1, +∞, −∞ getroffen:

**107-6(Satz)**

a) $0 \leq 0$.

b) $1 \leq 1$.

c) $+\infty \leq +\infty$.

d) $-\infty \leq -\infty$.

e) $0 < 1$.

f) $-\infty < 0 < +\infty$.

g) $-\infty < 1 < +\infty$.

h) $-\infty < +\infty$.

i) $-\infty \neq +\infty$.

**Beweis 107-6**

1: Via 95-11 gilt: $(0 \in S) \land (1 \in S) \land (+\infty \in S) \land (-\infty \in S)$.

2. a): Aus 1“$0 \in S$...”
folgt via 107-5: $0 \leq 0$.

2. b): Aus 1“...1 $\in S$...”
folgt via 107-5: $1 \leq 1$.

2. c): Aus 1“...+$\infty \in S$...”
folgt via 107-5: $+\infty \leq +\infty$.

2. d): Aus 1“...$-\infty \in S$...”
folgt via 107-5: $-\infty \leq -\infty$. 
Beweis 107-6 e)

1.1: Via AAVII gilt: \( S \text{ ist } \leq \text{-Kette.} \)

1.2: Via 95-11 gilt: \( 0 \in S. \)

1.3: Via 95-11 gilt: \( 1 \in S. \)

2: Aus 1.1“\( S \text{ ist } \leq \text{-Kette} \),
   aus 1.2“\( 0 \in S \)” und
   aus 1.3“\( 1 \in S \)”
folgt via 41-9: \( (0 < 1) \lor (0 = 1) \lor (1 < 0). \)

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fallunterscheidung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td><strong>2.1.Fall</strong></td>
</tr>
<tr>
<td><strong>2.2.Fall</strong></td>
</tr>
</tbody>
</table>

Es gilt 2.2. Fall“\( 0 = 1 \)”.
Via 95-2 gilt “\( 0 \neq 1 \)”.
Ex falso quodlibet folgt: \( 0 < 1. \)

...
Beweis 107-6 e)

... 

Fallunterscheidung

... 

2.3. Fall

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>1 &lt; 0.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3</td>
<td>Via AAI gilt: ((0 \in \mathbb{R}) \land (1 \in \mathbb{R})).</td>
</tr>
</tbody>
</table>
| 4 | Aus 3 “...1 ∈ \mathbb{R}” und  
aus 3 “0 ∈ \mathbb{R}...” und  
aus 2.3.Fall “1 < 0”  
folgt via AAVII: 0 < 0 - 1. |
| 5.1 | Via 98-12 gilt: 0 - 1 = -1. |
| 5.2 | Via 100-7 gilt: -1 ∈ \mathbb{R}. |
| 6 | Aus 4 “0 < 0 - 1” und  
aus 5.1 “0 - 1 = -1”  
folgt: 0 < -1. |
| 7 | Aus 5.2 “-1 ∈ \mathbb{R}”,  
aus 5.2 “-1 ∈ \mathbb{R}”,  
aus 6 “0 < -1” und  
aus 6 “0 < -1”  
folgt via AAVII: 0 < (-1) · (-1). |
| 8 | Aus 3 “...1 ∈ \mathbb{R}” und  
aus 3 “...1 ∈ \mathbb{R}”  
folgt via 106-1: (-1) · (-1) = 1 · 1. |
| 9 | Via 98-19 gilt: 1 · 1 = 1. |
| 10 | Aus 7 “0 < (-1) · (-1)” und  
aus 8 “(-1) · (-1) = 1 · 1”  
folgt: 0 < 1 · 1. |
| 11 | Aus 10 “0 < 1 · 1” und  
aus 9 “1 · 1 = 1”  
folgt: 0 < 1. |

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt: 0 < 1.
Beweis 107-6 fghi)

1.1: Via **AAI** gilt: \((0 \in \mathbb{R}) \land (1 \in \mathbb{R})\).

1.2: Via **AAVII** gilt: \(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(\mathbb{S}\).

2.f): Aus 1.1“0 \in \mathbb{R}...”
folgt via **AAVII**: \(-\infty < 0 < +\infty\).

2.g): Aus 1.1“...1 \in \mathbb{R}”
folgt via **AAVII**: \(-\infty < 1 < +\infty\).

2.1: Aus 1.2“\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(\mathbb{S}\)”
folgt via **34-13**: \((\leq\) transitiv) \(\land\) \((\leq\) antiSymmetrisch).

3.h): Aus 2.1“\leq\) transitiv...”
   aus 2.1“... \leq\) antiSymmetrisch”
   aus 2.f)“\(-\infty < 0...” und
   aus 2.f)“...0 < +\infty”
folgt via **46-16**: \(-\infty < +\infty\).

4.i): Aus 3.h)“\(-\infty < +\infty”
folgt via **41-3**: \(-\infty \neq +\infty\).

\(\square\)
107-7. Keine Klasse ist echt größer als $+\infty$ oder echt kleiner als $-\infty$:

107-7(Satz)

a) Aus "$+\infty \leq x$" folgt "$x = +\infty$".

b) $\neg (+\infty < x)$.

c) Aus "$x \leq -\infty$" folgt "$x = -\infty$".

d) $\neg (x < -\infty)$.

\[\leq\text{-Notation.}\]

Beweis 107-7 a) VS gleich $+\infty \leq x$.

1.1: Aus AAVII "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $S$" folgt via 34-13: $\leq$ antiSymmetrisch.

1.2: Aus VS gleich "$+\infty \leq x$" folgt via 107-3: $x \in S$.

2: Aus 1.2 "$x \in S$" folgt via 107-5: $x \leq +\infty$.

3: Aus 1.1 "$\leq$ antiSymmetrisch", aus 2 "$x \leq +\infty$" und aus VS gleich "$+\infty \leq x$" folgt via 30-47: $x = +\infty$. 
Beweis 107-7 b)

1: Es gilt: 
\[ (+\infty < x) \lor (-(+\infty < x)). \]

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1.Fall</th>
<th>(+\infty &lt; x.)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.1.Fall (+\infty &lt; x) folgt via 41-3: ((+\infty \leq x) \land (+\infty \neq x).)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2(^{&quot;}+\infty \leq x)...&quot; folgt via des bereits bewiesenen a): (x = +\infty.)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>4: Es gilt 3(^{&quot;}x = +\infty). Es gilt 2(^{&quot;}+\infty \neq x). Ex falso quodlibet folgt: (\neg(+\infty &lt; x).)</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

1.2.Fall \(\neg(+\infty < x).\)

Ende Fallunterscheidung

In beiden Fällen gilt: \(\neg(+\infty < x).\)

c) VS gleich

1.1: Aus AAVII\(^{"}\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(S\) folgt via 34-13: \(\leq\) antiSymmetrisch.

1.2: Aus VS gleich \("x \leq -\infty\) folgt via 107-3: \(x \in S.\)

2: Aus 1.2\(^{"}x \in S\) folgt via 107-5: \(-\infty \leq x.\)

3: Aus 1.1\(^{"}\leq\) antiSymmetrisch", aus VS gleich \("x \leq -\infty\) und aus 2\(^{"}-\infty \leq x\) folgt via 30-47: \(x = -\infty.\)
Beweis 107-7 d)

1: Es gilt:

\[(x < -\infty) \lor (\neg(x < -\infty)).\]

\[\text{Fallunterscheidung}\]

\begin{tabular}{|l|}
\hline
1.1. Fall & \(x < -\infty\). \\
\hline
2: Aus 1.1. Fall "\(x < -\infty\)"
folgt via 41-3:
\(x \leq -\infty \land (x \neq -\infty).\) \\
3: Aus 2 "\(x \leq -\infty \ldots\)"
folgt via des bereits bewiesenen c):
\(x = -\infty.\) \\
4: Es gilt 3 "\(x = -\infty\)."
\(\text{Es gilt 2"\ldots x \neq -\infty."}\)
\(\text{Ex falso quodlibet folgt:}\)
\(\neg(x < -\infty).\) \\
\hline
1.2. Fall & \(\neg(x < -\infty).\) \\
\hline
\end{tabular}

\[\text{Ende Fallunterscheidung}\]

In beiden Fällen gilt: \(\neg(x < -\infty).\) \(\square\)
107-8. Für $\leq$ gelten die “starken Versionen” der Transitivität:

<table>
<thead>
<tr>
<th>107-8(Satz)</th>
</tr>
</thead>
</table>
| a) Aus “$x \leq y$” und “$y \leq z$” folgt “$x \leq z$”.
| b) Aus “$x < y$” und “$y < z$” folgt “$x < z$”.
| c) Aus “$x < y$” und “$y \leq z$” folgt “$x < z$”.
| d) Aus “$x \leq y$” und “$y < z$” folgt “$x < z$”.

$\leq$-Notation.
Beweis 107-8 a) VS gleich  
\((x \leq y) \land (y \leq z)\).

1: Aus AAVII \(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(\mathbb{S}\)
folgt via 34-13: \(\leq\) transitiv.

2: Aus 1 \(\leq\) transitiv",
   aus VS gleich “\(x \leq y\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots y \leq z\)”
folgt via 30-38: \(x \leq z\).

b) VS gleich  
\((x < y) \land (y < z)\).

1: Aus AAVII \(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(\mathbb{S}\)
folgt via 34-13: \((\leq\) transitiv) \(\land\) (\(\leq\) antiSymmetrisch).

2: Aus 1 \(\leq\) transitiv . . . ”,
   aus 1 “\(\ldots \leq\) antiSymmetrisch”,
   aus VS gleich “\(x < y\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots y < z\)”
folgt via 46-16: \(x < z\).

c) VS gleich  
\((x < y) \land (y \leq z)\).

1: Aus AAVII \(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(\mathbb{S}\)
folgt via 34-13: \((\leq\) transitiv) \(\land\) (\(\leq\) antiSymmetrisch).

2: Aus 1 “\(\leq\) transitiv . . . ”,
   aus 1 “\(\ldots \leq\) antiSymmetrisch”,
   aus VS gleich “\(x \leq y\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots y \leq z\)”
folgt via 46-16: \(x < z\).

d) VS gleich  
\((x \leq y) \land (y < z)\).

1: Aus AAVII \(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in \(\mathbb{S}\)
folgt via 34-13: \((\leq\) transitiv) \(\land\) (\(\leq\) antiSymmetrisch).

2: Aus 1 “\(\leq\) transitiv . . . ”,
   aus 1 “\(\ldots \leq\) antiSymmetrisch”,
   aus VS gleich “\(x \leq y\)” und
   aus VS gleich “\(\ldots y < z\)”
folgt via 46-16: \(x < z\).

\(\square\)
107-9. Zur Vereinfachung späterer Argumentationslinien wird hier eine erweiterte "<-Version" von 107-3 angegeben. Die Beweis-Reihenfolge ist a) - b) - c) - f) - g) - h) - k) - l) - d) - i) - m) - e) - j):

### 107-9(Satz)

**Es gelte:**

→ \( x < y \).

**Dann folgt:**

a) \( x \in S \).

b) \( x \leq x \).

c) \( x = \Re x \).

d) \( x < +\infty \).

e) "\( x \in \mathbb{R} \) oder "\( x = -\infty \)".

f) \( y \in S \).

g) \( y \leq y \).

h) \( y = \Re y \).

i) \( -\infty < y \).

j) "\( y \in \mathbb{R} \) oder "\( y = +\infty \)".

k) \( \Re x < y \).

l) \( x < \Re y \).

m) \( \Re x < \Re y \).

\[\leq\text{-}\text{Notation}\]
Beweis 107-9

1: Aus $\rightarrow "x < y"$ folgt via 41-3: $(x \leq y) \land (x \neq y)$.

2.a): Aus 1"$x \leq y..." folgt via 107-3: $x \in S$.

2.b): Aus 1"$x \leq y..." folgt via 107-3: $x \leq x$.

2.c): Aus 1"$x \leq y..." folgt via 107-3: $x = \Re x$.

2.f): Aus 1"$x \leq y..." folgt via 107-3: $y \in S$.

2.g): Aus 1"$x \leq y..." folgt via 107-3: $y \leq y$.

2.h): Aus 1"$x \leq y..." folgt via 107-3: $y = \Re y$.

3.1: Aus 2.a)"$x \in S$ folgt via 95-15: $(x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty)$.

3.2: Aus 2.a)"$x \in S$ folgt via 107-5: $-\infty \leq x$.

3.3: Aus 2.f)"$y \in S$ folgt via 107-5: $y \leq +\infty$.

3.4: Aus 2.f)"$y \in S$ folgt via 95-15: $(y \in \mathbb{R}) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty)$.

3.k): Aus $\rightarrow "x < y"$ und aus 2.c)"$x = \Re x"$ folgt: $\Re x < y$.

3.1): Aus $\rightarrow "x < y"$ und aus 2.h)"$y = \Re y"$ folgt: $x < \Re y$.

...
Beweis 107-9

... 

4.d): Aus $\rightarrow \quad x < y$ und 
    aus 3.3 $y \leq +\infty$ 
    folgt via 107-8: $x < +\infty$.

4.i): Aus 3.2 $-\infty \leq x$ und 
    aus $\rightarrow \quad x < y$ 
    folgt via 107-8: $-\infty < y$.

4.m): Aus 3.k) $\text{Re} x < y$ und 
    aus 2.h) $y = \text{Re} y$ 
    folgt: $\text{Re} x < \text{Re} y$.

5.1: Aus 4.d) $x < +\infty$ 
    folgt via 41-3: $x \neq +\infty$.

5.2: Aus 4.i) $-\infty < y$ 
    folgt via 41-3: $-\infty \neq y$.

6.e): Aus 3.1 $(x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty)$ und 
    aus 5.1 $x \neq +\infty$ 
    folgt: $(x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty)$.

6.j): Aus 3.4 $(y \in \mathbb{R}) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty)$ und 
    aus 5.2 $-\infty \neq y$ 
    folgt: $(y \in \mathbb{R}) \lor (y = +\infty)$. 

$\square$
107-10. Es gilt $-\infty < x$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R}$ oder $x = +\infty$ - und dies ist äquivalent zu $x \in S$ und $x \neq -\infty$:

\begin{center}
\textbf{107-10(Satz)}

\textit{Die Aussagen i), ii), iii) sind äquivalent:}

\begin{enumerate}
  \item i) $-\infty < x$.
  \item ii) “$x \in S$” und “$x \neq -\infty$”.
  \item iii) “$x \in \mathbb{R}$” oder “$x = +\infty$”.
\end{enumerate}

\end{center}
Beweis 107-10 \( i) \Rightarrow ii) \) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “\(-\infty < x\)”
folgt via 107-9: \( x \in S \).

1.2: Aus VS gleich “\(-\infty < x\)”
folgt via 41-3: \(-\infty \neq x\).

2: Aus 1.2
folgt:
\( x \neq -\infty \).

3: Aus 1.1 “\(x \in S\)” und
aus 2 “\(x \neq -\infty\)”
folgt:
\((x \in S) \land (x \neq -\infty)\).

\( ii) \Rightarrow iii) \) VS gleich

1: Aus VS gleich “\(x \in S\)”
folgt via 95-15:
\((x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty)\).

2: Aus 1 “\((x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty)\)” und
aus VS gleich “\(\ldots x \neq -\infty\)”
folgt:
\((x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty)\).

\( iii) \Rightarrow i) \) VS gleich

1: Nach VS gilt:
\((x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty)\).

**Fallunterscheidung**

1.1.Fall \( x \in \mathbb{R} \).
Aus 1.1.Fall “\(x \in \mathbb{R}\)”
folgt via AAVII:
\(-\infty < x\).

1.2.Fall \( x = +\infty \).
2: Via 107-6 gilt:
\(-\infty < +\infty\).
3: Aus 2 “\(-\infty < +\infty\)” und
aus 1.2.Fall “\(x = +\infty\)”
folgt:
\(-\infty < x\).

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: \(-\infty < x\).
107-11. Es gilt $x < +\infty$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R}$ oder $x = -\infty$ und dies ist äquivalent zu $x \in S$ und $x \neq +\infty$:

Rede im übersetzten Text.
Beweis 107-11 \( i \Rightarrow ii \) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “\( x < +\infty \)”
folgt via 107-9:
\( x \in \mathbb{S} \).

1.2: Aus VS gleich “\( x < +\infty \)”
folgt via 41-3:
\( x \neq +\infty \).

2: Aus 1.2 und
aus 1.3
folgt:
\( (x \in \mathbb{S}) \land (x \neq +\infty) \).

\( ii \Rightarrow iii \) VS gleich

1: Aus VS gleich “\( x \in \mathbb{S} \)…”
folgt via 95-15:
\( (x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty) \).

2: Aus 1“(\( x \in \mathbb{R} \) \lor (x = +\infty) \lor (x = -\infty))” und
aus VS gleich “\( \ldots x \neq +\infty \)”
folgt:
\( (x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty) \).

\( iii \Rightarrow i \) VS gleich

1: Nach VS gilt:
\( (x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty) \).

\textbf{Fallunterscheidung}

1.1.Fall

Aus 1.1.Fall “\( x \in \mathbb{R} \)”
folgt via AAVII:
\( x < +\infty \).

1.2.Fall

2: Via 107-6 gilt:
\( -\infty < +\infty \).

3: Aus 1.2.Fall “\( x = -\infty \)” und
aus 2“(\( -\infty < +\infty \))”
folgt:
\( x < +\infty \).

\textbf{Ende Fallunterscheidung} In beiden Fällen gilt:
\( x < +\infty \).
107-12. Nun wird eine bestechend einfache Aussage präsentiert:

\[ \begin{align*}
107-12 \text{(Satz)} \\
\text{Aus } u &< x < o \text{ folgt } x \in \mathbb{R}.
\end{align*} \]

\[ \leq \text{-Notation.} \]

Beweis 107-12 VS gleich \[ u < x < o. \]

1: Aus VS gleich \[ u < x \ldots \]
folgt via 107-9:
\[ (x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty). \]

\[ \text{Fallunterscheidung} \]

\[ \begin{align*}
1.1. \text{Fall} & \quad x \in \mathbb{R}.
1.2. \text{Fall} & \quad x = +\infty.
\end{align*} \]

2: Aus 1.2. Fall \[ x = +\infty \] und
aus VS gleich \[ \ldots x < o \]
folgt:
\[ +\infty < o. \]

3: Es gilt 2\[ +\infty < o \].
\[ \text{Via 107-7 gilt } \neg(+\infty < o). \]
\[ \text{Ex falso quodlibet folgt: } x \in \mathbb{R}. \]

\[ \text{Ende Fallunterscheidung} \]

In beiden Fällen gilt:
\[ x \in \mathbb{R}. \]

□
107-13. Die nunmehrige Liste von Aussagen über \( \leq \) und \( < \) folgt aus dem Umstand, dass \( \leq \) eine antiSymmetrische Halbordnung (in \( S \)) ist:

<table>
<thead>
<tr>
<th>107-13(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) Aus &quot;( x \leq y )“ und &quot;( y \leq x )“ folgt &quot;( x = y )“.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Aus &quot;( x &lt; y )“ folgt &quot;( \neg(y &lt; x) )“.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) Aus &quot;( x \leq y )“ folgt &quot;( \neg(y &lt; x) )“.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) Aus &quot;( x &lt; y )“ folgt &quot;( \neg(y \leq x) )“.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\( \leq \)-Notation.
Beweis 107-13 a) VS gleich

1: Aus $\aleph$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{S}$
   folgt via $34\text{-}13$: $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$. 

2: Aus $1^\ell \leq$ antiSymmetrisch ,
   aus VS gleich “$x \leq y\ldots$” und
   aus VS gleich “$\ldots y \leq x$”
   folgt via $30\text{-}47$: $x = y$. 

b) VS gleich

1: Aus $\aleph$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{S}$
   folgt via $34\text{-}13$: $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$. 

2: Aus $1^\ell \leq$ antiSymmetrisch ” und
   aus VS gleich “$x < y$”
   folgt via $46\text{-}1$: $\neg(y < x)$. 

c) VS gleich

1: Aus $\aleph$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{S}$
   folgt via $34\text{-}13$: $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$. 

2: Aus $1^\ell \leq$ antiSymmetrisch ” und
   aus VS gleich “$x \leq y$”
   folgt via $46\text{-}1$: $\neg(y < x)$. 

d) VS gleich

1: Aus $\aleph$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathcal{S}$
   folgt via $34\text{-}13$: $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$. 

2: Aus $1^\ell \leq$ antiSymmetrisch ” und
   aus VS gleich “$x < y$”
   folgt via $46\text{-}1$: $\neg(y \leq x)$. 

\[\square\]
107-14. Die vorliegende Liste von Aussagen über $\leq$ und $<$ folgt aus dem Umstand, dass $S$ eine $\leq$-Kette ist:

\begin{center}
\begin{tabular}{|l|}
\hline
107-14(Satz) \\
\hline
Es gelte:

$\rightarrow x \in S$. \\
$\rightarrow y \in S$. \\

Dann folgt:

a) “$x \leq y$” oder “$y \leq x$”. \\
b) “$x < y$” oder “$x = y$” oder “$y < x$”. \\
c) “$x \leq y$” oder “$y < x$”. \\
d) “$x < y$” oder “$y \leq x$”. \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}

$\leq$-Notation.
Beweis 107-14

1: Via AAVII gilt: $S$ ist $\leq$ Kette.

2.a): Aus 1 "$S$ ist $\leq$ Kette", aus $\rightarrow$ "$x \in S$" und aus $\rightarrow$ "$y \in S$" folgt via 30-68 (Def): $(x \leq y) \lor (y \leq x)$.

2.b): Aus 1 "$S$ ist $\leq$ Kette", aus $\rightarrow$ "$x \in S$" und aus $\rightarrow$ "$y \in S$" folgt via 41-9: $(x < y) \lor (x = y) \lor (y < x)$.

2.c): Aus 1 "$S$ ist $\leq$ Kette", aus $\rightarrow$ "$x \in S$" und aus $\rightarrow$ "$y \in S$" folgt via 41-9: $(x \leq y) \lor (y < x)$.

2.1: Aus 1 "$S$ ist $\leq$ Kette", aus $\rightarrow$ "$y \in S$" und aus $\rightarrow$ "$x \in S$" folgt via 41-9: $(y \leq x) \lor (x < y)$.

3.d): Aus 2.1 folgt: $(x < y) \lor (y \leq x)$. □
107-15. Die nunmehrigen Aussagen sind gut bei einigen “Ex-falso-quodlibet”-Beweisen einsetzbar:

<table>
<thead>
<tr>
<th>107-15(Satz)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a) $\neg (+\infty \leq 0)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $\neg (+\infty &lt; 0)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>c) $\neg (0 \leq -\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>d) $\neg (0 &lt; -\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>e) $\neg (+\infty \leq -\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>f) $\neg (+\infty &lt; -\infty)$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Beweis 107-15

1.1: Via 107-6 gilt: $0 < +\infty$.

1.2: Via 107-6 gilt: $-\infty < 0$.

1.3: Via 107-6 gilt: $-\infty < +\infty$.

2. a): Aus 1.1“$0 < +\infty$” folgt via 107-13: $\neg (+\infty \leq 0)$.

2. b): Aus 1.1“$0 < +\infty$” folgt via 107-13: $\neg (+\infty < 0)$.

2. c): Aus 1.2“$-\infty < 0$” folgt via 107-13: $\neg (0 \leq -\infty)$.

2. d): Aus 1.2“$-\infty < 0$” folgt via 107-13: $\neg (0 < -\infty)$.

2. e): Aus 1.3“$-\infty < +\infty$” folgt via 107-13: $\neg (+\infty \leq -\infty)$.

2. f): Aus 1.3“$-\infty < +\infty$” folgt via 107-13: $\neg (+\infty < -\infty)$.

□
107-16. Die nunmehrigen Aussagen sind Anwendungen von 107-9:

107-16(Satz)

a) Aus \(0 < x\) folgt \(−∞ ≠ x\).

b) Aus \(0 < x\) folgt \((x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = +∞)\).

c) Aus \(x < 0\) folgt \(x ≠ +∞\).

d) Aus \(x < 0\) folgt \((x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = −∞)\).

\[\leq\text{-Notation.}\]

Beweis 107-16 a) VS gleich 0 < x.

1: Aus VS gleich “0 < x” folgt via 107-9: \(−∞ < x\).

2: Aus 1“−∞ < x” folgt via 41-3: \(−∞ ≠ x\).

b) Aus VS gleich “0 < x” folgt via 107-9: \((x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = +∞)\).

c) VS gleich \(x < 0\).

1: Aus VS gleich “x < 0” folgt via 107-9: \(x < +∞\).

2: Aus 1“x < +∞” folgt via 41-3: \(x ≠ +∞\).

d) VS gleich \(x < 0\).

Aus VS gleich “x < 0” folgt via 107-9: \((x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = −∞)\). □
107-17. Unter Mitwirkung von 107-16 kann 107-16 zur vorliegenden Aussage verschärft werden:

**107-17(Satz)**

a) *Aus* “0 ≤ x” *folgt* “−∞ ≠ x”.

b) *Aus* “0 ≤ x” *folgt* “(x ∈ ℝ) ∨ (x = +∞)”.

c) *Aus* “x ≤ 0” *folgt* “x ≠ +∞”.

d) *Aus* “x ≤ 0” *folgt* “(x ∈ ℝ) ∨ (x = −∞)”.

≤-Notation.
Beweis 107-17 ab) VS gleich 0 ≤ x.

1.1: Aus VS gleich “0 ≤ x” folgt via 41-5: (0 < x) ∨ (0 = x).

**Fallunterscheidung**

1.1.1. Fall 0 < x.

Aus 1.1.1. Fall “0 < x” folgt via 107-16:

\[-\infty \neq x \land ((x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty))\].

1.1.2. Fall 0 = x.

2.1: Aus 95-7 “0 ≠ −∞” und 1.1.2. Fall “0 = x” folgt: x ≠ −∞.

2.2: Aus AAI “0 ∈ \mathbb{R}” und 1.1.2. Fall “0 = x” folgt: x ∈ \mathbb{R}.

3.1: Aus 2.1 folgt: −∞ ≠ x.

3.2: Aus 2.2 folgt: (x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = +∞).

4: Aus 3.1 und aus 3.2 folgt: (−∞ ≠ x) ∧ ((x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = +∞)).

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:

A1 “(−∞ ≠ x) ∧ ((x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = +∞))”

1.a): Aus A1 folgt: −∞ ≠ x.

1.b): Aus A1 folgt: (x ∈ \mathbb{R}) ∨ (x = +∞).
Beweis 107-17 cd) VS gleich \(x \leq 0\).

1.1: Aus VS gleich \("x \leq 0\"
folgt via 41-5:
\[(x < 0) \vee (x = 0).\]

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1.1.Fall</th>
<th>(x &lt; 0).</th>
</tr>
</thead>
</table>
| Aus 1.1.1.Fall \("x < 0\"
folgt via 107-16:
\[(x \neq +\infty) \land ((x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty)).\]| |

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1.2.Fall</th>
<th>(x = 0).</th>
</tr>
</thead>
</table>
| 2.1: Aus 1.1.2.Fall \("x = 0\"
und
aus 95-7 \("0 \neq +\infty\"
folgt:
\(x \neq +\infty\). |
| 2.2: Aus 1.1.2.Fall \("x = 0\"
und
aus AA1 \("0 \in \mathbb{R}\"
folgt:
\(x \in \mathbb{R}\). |
| 3: Aus 2.2
folgt:
\((x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty).\) |
| 4: Aus 2.1 und
aus 3
folgt:
\((x \neq +\infty) \land ((x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty)).\) |

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt:

| A1 | \("(x \neq +\infty) \land ((x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty))\)" |

1.c): Aus A1
folgt:
\(x \neq +\infty\).

1.d): Aus A1
folgt:
\((x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty).\)
107-18. Via $0 \in \mathbb{S}$ ergibt sich ohne viel Mühe auch unter Einbeziehung von 107-14 das vorliegende Kriterium für $x \in \mathbb{S}$:

\begin{center}
\begin{tabular}{|l|}
\hline
\textbf{107-18(Satz)}

\textit{Die Aussagen i), ii), iii), iv), v) sind äquivalent:}

i) $x \in \mathbb{S}$.

ii) “$x \leq 0$“ oder “$0 \leq x$“.

iii) “$x < 0$“ oder “$x = 0$“ oder “$0 < x$“.

iv) “$x \leq 0$“ oder “$0 < x$“.

v) “$x < 0$“ oder “$0 \leq x$“.

\hline
\end{tabular}
\end{center}

\textless;-Notation.

\textbf{Beweis 107-18 [i] $\Rightarrow$ ii]} VS gleich $x \in \mathbb{S}$.

Aus VS gleich “$x \in \mathbb{S}$“ und aus 95-11 “$0 \in \mathbb{S}$“ folgt via 107-14: $(x \leq 0) \lor (0 \leq x)$.
Beweis 107-18 \([\text{ii} \Rightarrow \text{iii}]\) VS gleich \((x \leq 0) \lor (0 \leq x)\).

1: Nach VS gilt: \((x \leq 0) \lor (0 \leq x)\).

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1. Fall</th>
<th>(x \leq 0)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.1. Fall “(x \leq 0)” folgt via 41-5:</td>
<td>((x &lt; 0) \lor (x = 0))</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 folgt:</td>
<td>((x &lt; 0) \lor (x = 0) \lor (0 &lt; x))</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2. Fall</th>
<th>(0 \leq x)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2: Aus 1.2. Fall “(0 \leq x)” folgt via 41-5:</td>
<td>((0 &lt; x) \lor (0 = x))</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 folgt:</td>
<td>((x = 0) \lor (0 &lt; x))</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 3 folgt:</td>
<td>((x &lt; 0) \lor (x = 0) \lor (0 &lt; x))</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: \((x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x)\).
Der Beweis von $107-18$ zeigt, dass gilt: $(x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x)$.

1. Nach VS gilt:
   
   \[
   (x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x).
   \]

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1. Fall</th>
<th>$x &lt; 0$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2. Aus 1.1. Fall $x &lt; 0$ folgt via 41-3:</td>
<td>$x \leq 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Aus 2 folgt:</td>
<td>$(x \leq 0) \lor (0 &lt; x)$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2. Fall</th>
<th>$x = 0$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2. Aus 1.2. Fall $x = 0$ und aus 107-6 $0 \leq 0$ folgt:</td>
<td>$x \leq 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Aus 2 folgt:</td>
<td>$(x \leq 0) \lor (0 &lt; x)$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.3. Fall</th>
<th>$0 &lt; x$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 1.3. Fall folgt:</td>
<td>$(x \leq 0) \lor (0 &lt; x)$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung**

In allen Fällen gilt: $(x \leq 0) \lor (0 < x)$. 

Beweis 107-18 (iv) $\Rightarrow$ v) VS gleich ($x \leq 0) \vee (0 < x$).

1: Nach VS gilt:

\[
(x \leq 0) \vee (0 < x).
\]

Fallunterscheidung

**1.1.Fall** \(x \leq 0\).

2: Aus 1.1.Fall “\(x \leq 0\)” folgt via 41-5:

\[
(x < 0) \vee (x = 0).
\]

Fallunterscheidung

**2.1.Fall** \(x < 0\).

Aus 2.1.Fall folgt:

\[
(x < 0) \vee (0 \leq x).
\]

**2.2.Fall** \(x = 0\).

3: Aus 107-6 “\(0 \leq 0\)” und aus 2.2.Fall “\(x = 0\)” folgt:

\[
0 \leq x.
\]

4: Aus 3 folgt:

\[
(x < 0) \vee (0 \leq x).
\]

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

\[
(x < 0) \vee (0 \leq x).
\]

**1.2.Fall** \(0 < x\).

2: Aus 1.2.Fall “\(0 < x\)” folgt via 41-3:

\[
0 \leq x.
\]

3: Aus 2 folgt:

\[
(x < 0) \vee (0 \leq x).
\]

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

\[
(x < 0) \vee (0 \leq x).
\]
Beweis \textbf{107-18} \((v) \Rightarrow i)\) VS gleich 

\((x < 0) \lor (0 \leq x)\).

1: Nach VS gilt:

\((x < 0) \lor (0 \leq x)\).

\textbf{Fallunterscheidung}

\begin{center}

\begin{tabular}{|c|c|}
\hline
\textbf{1.1.Fall} & \(x < 0\). \\
\hline
\textbf{1.2.Fall} & \(0 \leq x\). \\
\hline
\end{tabular}

\end{center}

Aus 1.1.Fall "\(x < 0\)"
folgt via \textbf{107-9}:
\(x \in S\).

Aus 1.2.Fall "\(0 \leq x\)"
folgt via \textbf{107-3}:
\(x \in S\).

\textbf{Ende Fallunterscheidung} In beiden Fällen gilt: 
\(x \in S\).

\(\square\)
107-19. Via 107-18 folgt aus 95-16 die folgende, auch an sich interessante Charakterisierung der Elemente von \( T \):

107-19(Satz)

Die Aussagen i), ii) sind äquivalent:

i) \( x \in T \).

ii) “\( x < 0 \) oder “\( x = 0 \) oder “\( 0 < x \) oder “\( x = \text{nan} \)”.

\[ \leq \text{-Notation.} \]

Beweis 107-19 \( [\text{[i] } \Rightarrow \text{[ii]}] \) VS gleich \( x \in T \).

1: Aus VS gleich “\( x \in T \)” folgt via 95-16:

\( (x \in S) \lor (x = \text{nan}). \)

Fallunterscheidung

2.1.Fall \( x \in S \).

3: Aus 2.1.Fall “\( x \in S \)” folgt via 107-18:

\( (x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x). \)

4: Aus 3 folgt:

\( (x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x) \lor (x = \text{nan}). \)

2.2.Fall \( x = \text{nan} \).

Aus 2.2.Fall folgt:

\( (x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x) \lor (x = \text{nan}). \)

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:

\( (x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x) \lor (x = \text{nan}). \)
Beweis 107-19 \( \Rightarrow \) \( \Rightarrow \) VS gleich \( (x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x) \lor (x = \text{nan}) \).

1: Nach VS gilt: \( (x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x) \lor (x = \text{nan}) \).

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fallunterscheidung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1.1. Fall ( (x &lt; 0) \lor (x = 0) \lor (0 &lt; x) ).</td>
</tr>
<tr>
<td>2: Aus 1.1. Fall ( (x &lt; 0) \lor (x = 0) \lor (0 &lt; x) ) folgt via 107-18: ( x \in S ).</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2 ( x \in S ) folgt via ( \in S ): ( x \in T ).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2. Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 1.2. Fall ( x = \text{nan} ) folgt via 95-16: ( x \in T ).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: \( x \in T \).
107-20. Nun wird fest gestellt, dass keine reelle Zahl kleiner gleich $-\infty$ oder größergleich $+\infty$ ist:

\begin{center}
\begin{tabular}{|c|}
\hline
\textbf{107-20(Satz)}
\hline
Es gelte:

$\rightarrow$ $x \in \mathbb{R}$.

\textit{Dann folgt:}

a) $\neg(x \leq -\infty)$.

b) $\neg(+\infty \leq x)$.

\hline
\end{tabular}
\end{center}

\hline
\textit{$\leq$-Notation.}
\hline

\textbf{Beweis 107-20 a)}

1: Aus $\rightarrow$ “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via \textbf{AAVII}:

$-\infty < x$.

2: Aus 1 “$-\infty < x$”
folgt via \textbf{107-13}:

$\neg(x \leq -\infty)$.

\textbf{b)}

1: Aus $\rightarrow$ “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via \textbf{AAVII}:

$x < +\infty$.

2: Aus 1 “$x < +\infty$”
folgt via \textbf{107-13}:

$\neg(+\infty \leq x)$.

$\square$
107-21. Da ≤ eine Relation in S ist, kann für \( x \notin S \) natürlich weder \( x \leq y \) noch \( x < y \) noch \( y \leq x \) noch \( y < x \) gelten. Die Beweis-Reihenfolge ist a) - c) - b) - d):

**107-21(Satz)**

*Es gelte:*

\[ \rightarrow x \notin S. \]

*Dann folgt:*

a) \( \neg (x \leq y) \).

b) \( \neg (x < y) \).

c) \( \neg (y \leq x) \).

d) \( \neg (y < x) \).

---

**≤-Notation.**

**Beweis 107-21**

1.: Aus AA VI\(^{7}\)\(\leq\) antiSymmetrische Halbordnung in S\(\) folgt via 34-13: \(\leq\) Relation in S.

2. a): Aus 1\(\leq\) Relation in S\(\) und aus \(\rightarrow\) ”\(x \notin S\)” folgt via 34-1: \(\neg (x \leq y)\).

2. c): Aus 1\(\leq\) Relation in S\(\) und aus \(\rightarrow\) ”\(x \notin S\)” folgt via 34-1: \(\neg (y \leq x)\).

3. b): Aus 2. a) ”\(\neg (x \leq y)\)” folgt via 41-5: \(\neg (x < y)\).

3. d): Aus 2. c) ”\(\neg (y \leq x)\)” folgt via 41-5: \(\neg (y < x)\).

\(\square\)
107-22. Falls $0 < x$, dann ist $x$ multipliziert mit $\pm \infty$ gleich $\pm \infty$. Falls $x < 0$, dann ist $x$ multipliziert mit $\pm \infty$ gleich $\mp \infty$:

### 107-22 (Satz)

a) Aus "$x < 0$" folgt "$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$".

b) Aus "$0 < x$" folgt "$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$".

c) Aus "$x < 0$" folgt "$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$".

d) Aus "$0 < x$" folgt "$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$".

RECH. $\leq$-Notation.

**Beweis 107-22** a) VS gleich $x < 0$.

1: Aus VS gleich "$x < 0$" folgt via 107-9: $(x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty)$.

#### Fallunterscheidung

**1.1. Fall**

Aus 1.1. Fall "$x \in \mathbb{R}$" und aus VS gleich "$x < 0$" folgt via AA VII: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.

**1.2. Fall**

2.1: $x \cdot (+\infty) \overset{1.2 \text{ Fall}}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty$.

2.2: $(+\infty) \cdot x \overset{1.2 \text{ Fall}}{=} (+\infty) \cdot (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty$.

3: Aus 2.1"$x \cdot (+\infty) = \ldots = -\infty$" und aus 2.2"$(+\infty) \cdot x = \ldots = -\infty$" folgt: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.

**Ende Fallunterscheidung** In beiden Fällen gilt: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$.
Beweis 107-22 b) VS gleich

1: Aus VS gleich “0 < x”
folgt via 107-9:

\[ (x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty). \]

\[
\begin{array}{|c|}
\hline
\text{Fallunterscheidung} \\
\hline
\textbf{1.1. Fall} & x \in \mathbb{R} . \\
\hline
\text{Aus 1.1. Fall} “x \in \mathbb{R}” \text{ und} \\
aus VS gleich “0 < x” \\
folgt via AAVII: \\
x \cdot ( +\infty ) = ( +\infty ) \cdot x = +\infty . \\
\hline
\textbf{1.2. Fall} & x = +\infty . \\
\hline
2.1: & x \cdot ( +\infty ) \overset{1.2. \text{Fall1} }{=} ( +\infty ) \cdot ( +\infty ) \overset{\text{AAVI} }{=} +\infty . \\
2.2: & ( +\infty ) \cdot x \overset{1.2. \text{Fall1} }{=} ( +\infty ) \cdot ( +\infty ) \overset{\text{AAVI} }{=} +\infty . \\
3: & \text{Aus 2.1 “} x \cdot ( +\infty ) = \ldots = +\infty \text{” und} \\
aus 2.2 “( +\infty ) \cdot x = \ldots = +\infty” \\
folgt: & x \cdot ( +\infty ) = ( +\infty ) \cdot x = +\infty . \\
\hline
\end{array}
\]

\[
\text{Ende Fallunterscheidung} \quad \text{In beiden Fällen gilt:} \\
x \cdot ( +\infty ) = ( +\infty ) \cdot x = +\infty .
\]
Beweis 107-22 c) VS gleich $x < 0$.

1: Aus VS gleich “$x < 0$” folgt via 107-9: $(x \in \mathbb{R}) \lor (x = -\infty)$.

**Fallunterscheidung**

1.1. Fall

$x \in \mathbb{R}$.

Aus 1.1. Fall “$x \in \mathbb{R}$” und aus VS gleich “$x < 0$” folgt via AAVII:

\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty. \]

1.2. Fall

$x = -\infty$.

2.1: \[ x \cdot (-\infty)^{1,2,\text{FaII}} (-\infty) \cdot (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} +\infty. \]

2.2: \[ (-\infty) \cdot x^{1,2,\text{FaII}} (-\infty) \cdot (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} +\infty. \]

3: Aus 2.1 “$x \cdot (-\infty) = \ldots = +\infty$” und aus 2.2 “$(-\infty) \cdot x = \ldots = +\infty$” folgt:

\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty. \]

**Ende Fallunterscheidung**

In beiden Fällen gilt:

\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty. \]
Beweis 107-22 d) VS gleich 

1: Aus VS gleich “0 < x” folgt via 107-9: 

\( (x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \).

\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty. \]

**Fallunterscheidung**

**1.1.Fall** 

Aus 1.1.Fall “\( x \in \mathbb{R} \)” und aus VS gleich “0 < x” folgt via AAVII: 

\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty. \]

**1.2.Fall** 

\( x = +\infty \).

2.1: 

\[ x \cdot (-\infty) \overset{1.2.\text{Fall}}{=} (+\infty) \cdot (-\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty. \]

2.2: 

\[ (-\infty) \cdot x \overset{1.2.\text{Fall}}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) \overset{\text{AAVI}}{=} -\infty. \]

3: Aus 2.1 “\( x \cdot (-\infty) = \ldots = -\infty \)” und aus 2.2 “\( (-\infty) \cdot x = \ldots = -\infty \)” folgt: 

\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty. \]

Ende Fallunterscheidung 

In beiden Fällen gilt: 

\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty. \]

\( \square \)
107-23. Im FundamentalSatz $\leq \cdot$ wird die in AAVII g) für reelle Zahlen formulierte Rechenregel via 107-22, teilweise unter unter schwächeren, teilweise unter anderen Voraussetzungen re-formuliert. Die Beweis-Reihenfolge ist a) - d) - b) - c):

$\begin{array}{l}
\textbf{107-23(Satz) (FS}$ $\leq \cdot$: FundamentalSatz $\leq \cdot$) \\
a) \text{Aus } "0 < x" \text{ und } "0 < y" \text{ folgt } "0 < x \cdot y". \\
b) \text{Aus } "0 < x" \text{ und } "0 \leq y" \text{ folgt } "0 \leq x \cdot y". \\
c) \text{Aus } "0 \leq x" \text{ und } "0 < y" \text{ folgt } "0 \leq x \cdot y". \\
d) \text{Aus } "0 \leq x" \text{ und } "0 \leq y" \text{ folgt } "0 \leq x \cdot y".
\end{array}$

**RECH.$\leq$-Notation.**

Beweis 107-23 a) VS gleich

$\begin{align*}
(0 < x) & \land (0 < y). \\
1.1: \text{Aus VS gleich "0 < x" } & \text{ folgt via 107-16: } (x \in \mathbb{R}) \lor (x = +\infty). \\
1.2: \text{Aus VS gleich "...0 < y" } & \text{ folgt via 107-16: } (y \in \mathbb{R}) \lor (y = +\infty). \\
2: \text{Aus 1.1 und } & \text{ aus 1.2 folgt: }\\n& (x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R}) \\
& \lor (x \in \mathbb{R}) \land (y = +\infty) \\
& \lor (x = +\infty) \land (y = +\infty) \\
& \lor (x = +\infty) \land (y = +\infty).
\end{align*}$

**Fallunterscheidung**

$\begin{align*}
2.1.\text{Fall } (x \in \mathbb{R}) & \land (y \in \mathbb{R}). \\
\text{Aus 2.1. Fall } \text{"x } \in \mathbb{R} \ldots", & \text{ aus 2.1. Fall } \text{"...y } \in \mathbb{R} \ldots", \\
\text{aus VS gleich } \text{"0 < x" } & \text{ und } \\
\text{aus VS gleich } \text{"...0 < y" } & \text{ folgt via AAVII: } 0 < x \cdot y.
\end{align*}$
Beweis 107-23  a) VS gleich  

(0 < x) ∧ (0 < y).

...  

Fallunterscheidung  

...  

2.2. Fall  

(x ∈ R) ∧ (y = +∞).

3: Aus VS gleich "0 < x..."  

folgt via 107-22:  

x · (+∞) = +∞.

4: Aus 3”x · (+∞) = +∞” und  

aus 2.2. Fall...y = +∞  

folgt:  

x · y = +∞.

5: Aus 107-6“0 < +∞” und  

aus 4”x · y = +∞”  

folgt:  

0 < x · y.

2.3. Fall  

(x = +∞) ∧ (y ∈ R).

3: Aus →“0 < y”  

folgt via 107-22:  

(+∞) · y = +∞.

4: Aus 2.3. Fall“x = +∞...” und  

aus 3”(+∞) · y = +∞”  

folgt:  

x · y = +∞.

5: Aus 107-6“0 < +∞” und  

aus 4”x · y = +∞”  

folgt:  

0 < x · y.

2.4. Fall  

(x = +∞) ∧ (y = +∞).

3.1: Aus 2.4. Fall  

folgt:  

x = +∞.

3.2: Aus 2.4. Fall  

folgt:  

y = +∞.

4:  

x · y ³ 1 = (+∞) · y ³ 2 = (+∞) · (+∞) ³ AAVI = +∞.

5: Aus 107-6 “0 < +∞” und  

aus 4”x · y = ... = +∞”  

folgt:  

0 < x · y.

Ende Fallunterscheidung  

In allen Fällen gilt:  

0 < x · y.
Beweis 107-23 d) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “0 ≤ x...”
folgt via 41-5: 
(0 ≤ x) ∧ (0 ≤ y).

1.2: Aus VS gleich “...0 ≤ y”
folgt via 41-5: 
(0 < x) ∨ (0 = x).

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:
(0 < x) ∧ (0 < y)


\[\begin{align*}
\text{Fallunterscheidung} \\
\text{2.1.Fall} & \quad (0 < x) \land (0 < y). \\
3: & \quad \text{Aus 2.1.Fall “0 < x...” und} \\
& \quad \text{aus 2.1. Fall “...0 < y”} \\
& \quad \text{folgt via des bereits bewiesenen a):} \\
4: & \quad 0 < x \cdot y.
\end{align*}\]

\[\begin{align*}
\text{2.2.Fall} & \quad (0 < x) \land (0 = y). \\
3: & \quad \text{Aus 2.2. Fall “0 < x...”} \\
& \quad \text{folgt via 107-9:} \\
4: & \quad x \in S. \\
5: & \quad 0 \in \mathbb{Z}. \\
6: & \quad \text{Aus 5 “x \cdot 0 = 0” und} \\
& \quad \text{aus 2.2. Fall “...0 = y”} \\
& \quad \text{folgt:} \\
7: & \quad x \cdot y = 0.
\end{align*}\]
Beweis 107-23 d) VS gleich \((0 \leq x) \land (0 \leq y)\).

... 

Fallunterscheidung

... 

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.3. Fall</th>
<th>((0 = x) \land (0 &lt; y)).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3: Aus 2.3. Fall “...0 &lt; y” folgt via 107-9:</td>
<td>(y \in S).</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 3 “(y \in S)” folgt via (\in SZ):</td>
<td>(y) Zahl.</td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 4 “(y) Zahl” folgt via FSM0:</td>
<td>(0 \cdot y = 0).</td>
</tr>
<tr>
<td>6: Aus 2.3. Fall “(0 = x)” und aus 5 “(0 \cdot y = 0)” folgt:</td>
<td>(x \cdot y = 0).</td>
</tr>
<tr>
<td>7: Aus 107-6 “(0 \leq 0)” und aus 5 “(x \cdot y = 0)” folgt:</td>
<td>(0 \leq x \cdot y).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.4. Fall</th>
<th>((0 = x) \land (0 = y)).</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3.1: Aus 2.4. Fall folgt:</td>
<td>(x = 0).</td>
</tr>
<tr>
<td>3.2: Aus 2.4. Fall folgt:</td>
<td>(y = 0).</td>
</tr>
<tr>
<td>4:</td>
<td>(x \cdot y \overset{1}{=} 0 \cdot y \overset{2}{=} 0 \cdot 0^{98-16} = 0).</td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 107-6 “(0 \leq 0)” und aus 4 “(x \cdot y = \ldots = 0)” folgt:</td>
<td>(0 \leq x \cdot y).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: \(0 \leq x \cdot y\).
Beweis 107-23 b) VS gleich

1: Aus VS gleich “0 < x…”
   folgt via 41-3: 0 ≤ x.

2: Aus 1 “0 ≤ x” und
   aus VS gleich “…0 ≤ y”
   folgt via des bereits bewiesenen d): 0 ≤ x · y.

c) VS gleich

1: Aus VS gleich “…0 < y”
   folgt via 41-3: 0 ≤ y.

2: Aus VS gleich “0 ≤ x…” und
   aus 1 “0 ≤ y”
   folgt via des bereits bewiesenen d): 0 ≤ x · y.

☐
107-24. Nun wird der erste von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum Kommutativgesetz Multiplikation bewiesen:

\textbf{107-24(Satz)}

\textit{Es gelte:}

\[
\rightarrow x \in S.
\]

\textit{Dann folgt:}

\begin{enumerate}
  \item \( x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x.\)
  \item \( x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x.\)
  \item \( x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x.\)
\end{enumerate}

\textbf{RECH-Notation.}

\textbf{Beweis 107-24}

\textbf{<-Notation.}
Beweis 107-24 a)

1: Es gilt: \((x = 0) \lor (0 \neq x)\).

\[
\begin{array}{|c|}
\hline
\text{Fallunterscheidung} \\
\hline
\text{1.1.Fall} & x = 0. \\
1: & x \cdot \text{nan} \overset{1.1.\text{Fall}}{=} 0 \cdot \text{nan} \overset{\text{AAVI}}{=} 0 \overset{\text{AAVI}}{=} \text{nan} \cdot 0 \overset{1.1.\text{Fall}}{=} \text{nan} \cdot x. \\
2: & \text{Aus } 2 \\
& \text{folgt: } x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x.
\hline
\text{1.2.Fall} & 0 \neq x. \\
1: & \text{Aus } \rightarrow \text{“} x \in S \text{”} \\
& \text{folgt via } \in \text{SZ: } x \in T. \\
2: & \text{Aus 1.2.\text{Fall} “} 0 \neq x \text{” und} \\
& \text{aus 1 “} x \in T \text{”} \\
& \text{folgt via } \text{AAVI: } x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x.
\hline
\end{array}
\]

\text{Ende Fallunterscheidung} In beiden Fällen gilt: \(x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x\).
Beweis 107-24 b)

1: Aus $\rightarrow \text{“} x \in S \text{”}$
folgt via 107-18:
$(x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x)$.

\begin{center}
\begin{tabular}{|c|}
\hline
\textbf{Fallunterscheidung} \hline
\begin{tabular}{|l|}
\hline
\textbf{1.1.Fall} \hspace{2cm} $x < 0$. \\
Aus 1.1.Fall “$x < 0$” \hspace{1cm} folgt via 107-22: \\
$x \cdot (\cdot \infty) = (\cdot \infty) \cdot x$. \hline
\end{tabular} \\
\begin{tabular}{|l|}
\hline
\textbf{2.2.Fall} \hspace{2cm} $x = 0$. \\
$0 \cdot (\cdot \infty) = (\cdot \infty) \cdot 0 $ \hline
\end{tabular} \\
\begin{tabular}{|l|}
\hline
\textbf{2.2.Fall} \hspace{2cm} $0 \cdot (\cdot \infty) = (\cdot \infty) \cdot 0 $ \hline
\end{tabular} \\
\begin{tabular}{|l|}
\hline
\textbf{1.3.Fall} \hspace{2cm} $0 < x$. \\
Aus 1.3.Fall “$0 < x$” \hspace{1cm} folgt via 107-22: \\
$x \cdot (\cdot \infty) = (\cdot \infty) \cdot x$. \hline
\end{tabular} \\
\begin{tabular}{|l|}
\hline
\textbf{Ende Fallunterscheidung} \hspace{2cm} In allen Fällen gilt: $x \cdot (\cdot \infty) = (\cdot \infty) \cdot x$. \hline
\end{tabular}
\end{tabular}
\end{center}
Beweis 107-24 c)

1: Aus \( x \in S \) folgt via 107-18: 
\[(x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x).\]

### Fallunterscheidung

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fall</th>
<th>Bedingung</th>
<th>Regelvertretung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1.1. Fall</td>
<td>( x &lt; 0 )</td>
<td>via 107-22: ( x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x ).</td>
</tr>
<tr>
<td>1.2. Fall</td>
<td>( x = 0 )</td>
<td>via 107-22: ( x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x ).</td>
</tr>
<tr>
<td>1.3. Fall</td>
<td>( 0 &lt; x )</td>
<td>via 107-22: ( x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x ).</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt: 
\[ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x. \]
107-25. Nun wird als zweiter von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum Kommutativgesetz Multiplikation bewiesen, dass für \( x \in S \) und \( y \in \mathbb{R} \) stets \( x \cdot y = y \cdot x \) gilt:

\[
\begin{align*}
\textbf{107-25(Satz)} \quad \\
Es \ gelte: \quad \\
\rightarrow) x \in S. \\
\rightarrow) y \in \mathbb{R}. \\
Dann \ folgt \ "x \cdot y = y \cdot x". \\
\end{align*}
\]

RECH-Notation.
Beweis 107-25

1: Aus $→ "x ∈ S"$ folgt via 95-15: $(x ∈ R) ∨ (x = +∞) ∨ (x = −∞)$.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Fallunterscheidung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td><strong>1.1.Fall</strong> $x ∈ R$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Aus 1.1.Fall $&quot;x ∈ R&quot;$ und aus $→ &quot;y ∈ R&quot;$ folgt via AAV: $x · y = y · x$.</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>1.2.Fall</strong> $x = +∞$.</td>
</tr>
<tr>
<td>2: Aus $→ &quot;y ∈ R&quot;$ folgt via $∈ SZ$: $y ∈ S$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2$&quot;y ∈ S&quot;$ folgt via 107-24: $(+∞) · y = y · (+∞)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 3$&quot;(+∞) · y = y · (+∞)&quot;$ und aus 1.2.Fall $&quot;x = +∞&quot;$ folgt: $x · y = y · x$.</td>
</tr>
<tr>
<td><strong>1.3.Fall</strong> $x = −∞$.</td>
</tr>
<tr>
<td>2: Aus $→ &quot;y ∈ R&quot;$ folgt via $∈ SZ$: $y ∈ S$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus 2$&quot;y ∈ S&quot;$ folgt via 107-24: $(-∞) · y = y · (-∞)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 3$&quot;(-∞) · y = y · (-∞)&quot;$ und aus 1.3.Fall $&quot;x = −∞&quot;$ folgt: $x · y = y · x$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In allen Fällen gilt: $x · y = y · x$. 
107-26. Im dritten von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum Kommutativgesetz Multiplikation wird nun bewiesen, dass in \(S\) ein Kommutativgesetz Multiplikation gilt:

\[
\begin{align*}
\text{107-26(Satz)} \\
\text{Es gelte:} \\
&\quad \rightarrow x \in S. \\
&\quad \rightarrow y \in S. \\
\text{Dann folgt } "x \cdot y = y \cdot x". \\
\end{align*}
\]
Beweis 107-26

1: Aus \(\rightarrow\) \(\ldots y \in S\)“ folgt via 95-15: 
\((y \in \mathbb{R}) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty)\).

**Fallunterscheidung**

1.1. Fall

\(y \in \mathbb{R}\).

Aus \(\rightarrow\) \(x \in S\)“ und 

aus 1.1. Fall \(y \in \mathbb{R}\)

folgt via 107-25:

\(x \cdot y = y \cdot x\).

1.2. Fall

\(y = +\infty\).

2: Aus \(\rightarrow\) \(x \in S\)“ 

folgt via 107-24:

\(x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x\).

3: Aus 2 \(x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x\)“ und 

aus 1.2. Fall \(y = +\infty\)

folgt:

\(x \cdot y = y \cdot x\).

1.3. Fall

\(y = -\infty\).

2: Aus \(\rightarrow\) \(x \in S\)“ 

folgt via 107-24:

\(x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x\).

3: Aus 2 \(x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x\)“ und 

aus 1.3. Fall \(y = -\infty\)

folgt:

\(x \cdot y = y \cdot x\).

**Ende Fallunterscheidung**

In allen Fällen gilt: 

\(x \cdot y = y \cdot x\).
107-27. Im nun vorliegenden vierten von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum KommutativGesetz Multiplikation wird nachgewiesen, dass \( x \cdot y = y \cdot x \) für alle \( x, y \in T \) gilt:

**107-27(Satz)**

*Es gelte:*

\[
\begin{align*}
\to) & \ x \in T. \\
\to) & \ y \in T.
\end{align*}
\]

*Dann folgt “\( x \cdot y = y \cdot x \)”.*

---

**RECH-Notation.**

**Beweis 107-27**

1.1: Aus \( \to) \ “x\ldots \in T” \) folgt via 95-16:

\[
(x \in S) \lor (x = \text{nan}).
\]

1.2: Aus \( \to) \ “\ldots y \in T” \) folgt via 95-16:

\[
(y \in S) \lor (y = \text{nan}).
\]

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

\[
\begin{align*}
(x \in S) \land (y \in S) \\
\lor (x \in S) \land (y = \text{nan}) \\
\lor (x = \text{nan}) \land (y \in S) \\
\lor (x = \text{nan}) \land (y = \text{nan}).
\end{align*}
\]

**Fallunterscheidung**

...
Beweis 107-27

Fallunterscheidung

2.1. Fall

$x \in S$ und $y \in S$

Aus 2.1. Fall "x \in S..." und aus 2.1. Fall "...y \in S"

folgt via 107-26:

$x \cdot y = y \cdot x.$

2.2. Fall

$x \in S$ und $y = \text{nan}$

Aus 2.2. Fall "x \in S..." folgt via 107-24:

$x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x.$

4: Aus 3"$x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x$" und aus 2.2. Fall "...y = nan"

folgt:

$x \cdot y = y \cdot x.$

2.3. Fall

$x = \text{nan}$ und $y \in S$

Aus 2.3. Fall "...y \in S"

folgt via 107-24:

$\text{nan} \cdot y = y \cdot \text{nan}.$

4: Aus 3"$\text{nan} \cdot y = y \cdot \text{nan}$" und aus 2.3. Fall "x = nan"

folgt:

$x \cdot y = y \cdot x.$

2.4. Fall

$x = \text{nan}$ und $y = \text{nan}$

Aus "$\text{nan} \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot \text{nan}$" und aus 2.4. Fall "x = nan"

folgt:

$x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x.$

4: Aus 3"$x \cdot \text{nan} = \text{nan} \cdot x$" und aus 2.4. Fall "...y = nan"

folgt:

$x \cdot y = y \cdot x.$

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt:

$x \cdot y = y \cdot x.$
107-28. Interessanter Weise ist der fünfte von fünf Hilfs-Sätzen auf dem Weg zum KommutativGesetz Multiplikation nicht gleich dem KommutativGesetz Multiplikation:

107-28(Satz)

*Es gelte:*

$\rightarrow x$ Zahl.

$\rightarrow y$ Zahl.

*Dann folgt “$x \cdot y = y \cdot x”$.*
Beweis 107-28

1.1: Aus \( \rightarrow \) “\( x \) Zahl”
folgt via \( \text{96-9} \):
\[
(\operatorname{Re} x \in \mathbb{T}) \land (\operatorname{Im} x \in \mathbb{T}).
\]

1.2: Aus \( \rightarrow \) “\( y \) Zahl”
folgt via \( \text{96-9} \):
\[
(\operatorname{Re} y \in \mathbb{T}) \land (\operatorname{Im} y \in \mathbb{T}).
\]

2.1: Aus 1.1 “\( \operatorname{Re} x \in \mathbb{T} \ldots \)” und
aus 1.2 “\( \operatorname{Re} y \in \mathbb{T} \ldots \)”
folgt via \( \text{107-27} \):
\[
(\operatorname{Re} x) \cdot (\operatorname{Re} y) = (\operatorname{Re} y) \cdot (\operatorname{Re} x).
\]

2.2: Aus 1.1 “\( \operatorname{Re} x \in \mathbb{T} \ldots \)” und
aus 1.2 “\( \operatorname{Im} y \in \mathbb{T} \ldots \)”
folgt via \( \text{107-27} \):
\[
(\operatorname{Re} x) \cdot (\operatorname{Im} y) = (\operatorname{Im} y) \cdot (\operatorname{Re} x).
\]

2.3: Aus 1.1 “\( \operatorname{Im} x \in \mathbb{T} \ldots \)” und
aus 1.2 “\( \operatorname{Re} y \in \mathbb{T} \ldots \)”
folgt via \( \text{107-27} \):
\[
(\operatorname{Im} x) \cdot (\operatorname{Re} y) = (\operatorname{Re} y) \cdot (\operatorname{Im} x).
\]

2.4: Aus 1.1 “\( \operatorname{Im} x \in \mathbb{T} \ldots \)” und
aus 1.2 “\( \operatorname{Im} y \in \mathbb{T} \ldots \)”
folgt via \( \text{107-27} \):
\[
(\operatorname{Im} x) \cdot (\operatorname{Im} y) = (\operatorname{Im} y) \cdot (\operator{Im} x).
\]

3:
\[
0 \cdot 0 = ((\operator{Re} x) \cdot (\operator{Re} y) - (\operator{Im} x) \cdot (\operator{Im} y)) + i \cdot ((\operator{Re} x) \cdot (\operator{Im} y) + (\operator{Im} x) \cdot (\operator{Re} y)).
\]

4: Aus 3
folgt:
\[
x \cdot y = y \cdot x.
\]

\[\square\]
107-29. Gemäß Kommutativ Gesetz Multiplikation ist die Reihenfolge, in der Klassen multipliziert werden, irrelevant:

\[
x \cdot y = y \cdot x.
\]

Beweis 107-29

1: Via 95-6 gilt: \((x \cdot y \text{ Zahl}) \lor (x \cdot y \notin \mathbb{A})\).

\textbf{Fallunterscheidung}

1.1. Fall \(x \cdot y \text{ Zahl}\)

\begin{itemize}
  \item 2: Aus 1.1. Fall \(x \cdot y \text{ Zahl}\) folgt via 96-15: \((x \text{ Zahl}) \land (y \text{ Zahl})\).
  \item 3: Aus 2.“\(x \text{ Zahl} \ldots \)” und aus 2.“\(\ldots y \text{ Zahl} \)” folgt via 107-28: \(x \cdot y = y \cdot x\).
\end{itemize}

1.2. Fall \(x \cdot y \notin \mathbb{A}\)

\begin{itemize}
  \item 2.1: Aus 1.2. Fall \(x \cdot y \notin \mathbb{A}\) folgt via 96-16: \(x \cdot y = U\).
  \item 2.2: Aus 1.2. Fall \(x \cdot y \notin \mathbb{A}\) folgt via 96-16: \(y \cdot x = U\).
  \item 3: Aus 2.1.“\(x \cdot y = U \ldots \)” und aus 2.2.“\(\ldots y \cdot x = U \)” folgt: \(x \cdot y = y \cdot x\).
\end{itemize}

\textbf{Ende Fallunterscheidung} In beiden Fällen gilt: \(x \cdot y = y \cdot x\).
SZ: Satz Zahlen.

Ersterstellung: 20/07/05                     Letzte Änderung: 08/02/12
108-1. Das vorliegende Resultat ist beim Beweis von -SZ hilfreich:

\[108-1\text{(Satz)}\]

*Es gelte:*

\[-\) \ x \in \mathbb{S}. \]

\[-\) \ “y = 0” oder “y = +\infty” oder “y = -\infty”.\]

*Dann folgt:*

a) “x \cdot y = 0” oder “x \cdot y = +\infty” oder “x \cdot y = -\infty”.

b) x \cdot y \in \mathbb{S}.

\[\text{RECH-Notation.}\]

**Beweis 108-1 a)**

1: Aus \(-\) ”x \in \mathbb{S}”

folgt via 107-18:

\[(x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x).\]

2: Aus 1 “(x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x)” und

aus \(-\) ”(y = 0) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty)”

folgt: \((x < 0) \lor (x = 0) \lor (0 < x)) \land ((y = 0) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty)).\]

3: Aus 2

folgt:

\[(x < 0) \land (y = 0) \lor (x < 0) \land (y = +\infty) \lor (x < 0) \land (y = -\infty) \lor (x = 0) \land (y = 0) \lor (x = 0) \land (y = +\infty) \lor (x = 0) \land (y = -\infty) \lor (0 < x) \land (y = 0) \lor (0 < x) \land (y = +\infty) \lor (0 < x) \land (y = -\infty).\]

\[\text{Fallunterscheidung}\]

...
108-1 a) 

**Fallunterscheidung**

### 2.1. Fall

\[(x < 0) \land (y = 0).\]

3: Aus \(\rightarrow "x \in S"\) folgt via \(cSZ\):

\[x \text{ Zahl}.\]

4: Aus 3 "x Zahl" folgt via \(FSM0\):

\[x \cdot 0 = 0.\]

5: Aus 4 "\(x \cdot 0 = 0"\) und aus 2.1. Fall "\(y = 0"\) folgt:

\[x \cdot y = 0.\]

6: Aus 5 folgt:

\[(x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty).\]

### 2.2. Fall

\[(x < 0) \land (y = +\infty).\]

3: Aus 2.2. Fall "\(x < 0..."\) folgt via **107-22**:

\[x \cdot (+\infty) = -\infty.\]

4: Aus 3 "\(x \cdot (+\infty) = -\infty"\) und aus 2.2. Fall "\(y = +\infty"\) folgt:

\[x \cdot y = -\infty.\]

5: Aus 4 folgt:

\[(x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty).\]

### 2.3. Fall

\[(x < 0) \land (y = -\infty).\]

3: Aus 2.3. Fall "\(x < 0..."\) folgt via **107-22**:

\[x \cdot (-\infty) = +\infty.\]

4: Aus 3 "\(x \cdot (-\infty) = +\infty"\) und aus 2.3. Fall "\(y = -\infty"\) folgt:

\[x \cdot y = +\infty.\]

5: Aus 4 folgt:

\[(x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty).\]
Beweis 108-1 a)

...
Beweis 108-1 a)

...  

Fallunterscheidung

...  

2.7. Fall  \( (0 < x) \wedge (y = 0) \)

3: Aus \( \rightarrow \) “\( x \in \mathbb{S} \)”  
   folgt via \( \in \mathbb{SZ} \): \( x \) Zahl.  

4: Aus 3 “\( x \) Zahl”  
   folgt via \( \text{FSM0} \): \( x \cdot 0 = 0 \).  

5: Aus 4 “\( x \cdot 0 = 0 \)” und  
   aus 2.7. Fall “\( y = 0 \)”  
   folgt: \( x \cdot y = 0 \).  

6: Aus 5  
   folgt: \( (x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty) \).

2.8. Fall  \( (0 < x) \wedge (y = +\infty) \)

3: Aus 2.8. Fall “\( 0 < x \)”  
   folgt via \textbf{107-22} : \( x \cdot (+\infty) = +\infty \).  

4: Aus 3 “\( x \cdot (+\infty) = +\infty \)” und  
   aus 2.8. Fall “\( y = +\infty \)”  
   folgt: \( x \cdot y = +\infty \).  

5: Aus 4  
   folgt: \( (x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty) \).

2.9. Fall  \( (0 < x) \wedge (y = -\infty) \)

3: Aus 2.9. Fall “\( 0 < x \)”  
   folgt via \textbf{107-22} : \( x \cdot (-\infty) = -\infty \).  

4: Aus 3 “\( x \cdot (-\infty) = -\infty \)” und  
   aus 2.9. Fall “\( y = -\infty \)”  
   folgt: \( x \cdot y = -\infty \).  

5: Aus 4  
   folgt: \( (x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty) \).

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt:  
\[
(x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty).
\]
Beweis 108-1 b)

1: Aus $\rightarrow$ “$x \in \mathbb{S}$” und
aus $\rightarrow$ “$(y = 0) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty)$”
folgt via des bereits bewiesenen a):

$$(x \cdot y = 0) \lor (x \cdot y = +\infty) \lor (x \cdot y = -\infty).$$

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.1. Fall</th>
<th>$x \cdot y = 0$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus 1.1. Fall “$x \cdot y = 0$” und</td>
<td>$x \cdot y \in \mathbb{S}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>aus 95-11 “$0 \in \mathbb{S}$”</td>
<td>folgt:</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2. Fall</th>
<th>$x \cdot y = +\infty$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus $\forall y \in \mathbb{S}$ gleich “$x \cdot y = +\infty$”</td>
<td>$x \cdot y \in \mathbb{S}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt via 95-15:</td>
<td>$x \cdot y \in \mathbb{S}$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.3. Fall</th>
<th>$x \cdot y = -\infty$.</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Aus $\forall y \in \mathbb{S}$ gleich “$x \cdot y = -\infty$”</td>
<td>$x \cdot y \in \mathbb{S}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt via 95-15:</td>
<td>$x \cdot y \in \mathbb{S}$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung** In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{S}$. 

$\square$
108-2. Je nachdem, ob \(x\) in \(\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}\) und ob \(y\) in \(\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}\) liegt, liegt das Produkt \(x \cdot y\) in \(\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}\). Die Beweis-Reihenfolge ist a) - b) - c) - p) - d) - e) - f) - g) - h) - j) - i) - k) - l) - m) - n) - o) - q) - r) - s) - t) - u):

<p>| | |</p>
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>a)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{R}) und &quot;(y \in \mathbb{R})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{R}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{R}) und &quot;(y \in \mathbb{S})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{S}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>c)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{R}) und &quot;(y \in \mathbb{T})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{T}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>d)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{R}) und &quot;(y \in \mathbb{C})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{C}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>e)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{R}) und &quot;(y \in \mathbb{B})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{B}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>f)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{R}) und &quot;(y ) Zahl&quot; folgt &quot;(x \cdot y ) Zahl&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>g)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{S}) und &quot;(y \in \mathbb{S})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{S}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>h)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{S}) und &quot;(y \in \mathbb{T})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{T}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>i)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{S}) und &quot;(y \in \mathbb{C})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{B}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>j)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{S}) und &quot;(y \in \mathbb{B})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{B}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>k)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{S}) und &quot;(y ) Zahl&quot; folgt &quot;(x \cdot y ) Zahl&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>l)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{T}) und &quot;(y \in \mathbb{T})&quot; folgt &quot;(x \cdot y \in \mathbb{T}).&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>m)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{T}) und &quot;(y \in \mathbb{C})&quot; folgt &quot;(x \cdot y ) Zahl&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>n)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{T}) und &quot;(y \in \mathbb{B})&quot; folgt &quot;(x \cdot y ) Zahl&quot;.</td>
</tr>
<tr>
<td>o)</td>
<td>Aus &quot;(x \in \mathbb{T}) und &quot;(y ) Zahl&quot; folgt &quot;(x \cdot y ) Zahl&quot;.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

RECH-Notation.
### 108-2(Satz) ...

<p>| | |</p>
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
</table>
| p) | Aus $x \in \mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{C}$ folgt $x \cdot y \in \mathbb{C}$.
| q) | Aus $x \in \mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{B}$ folgt $x \cdot y$ Zahl.
| r) | Aus $x \in \mathbb{C}$ und $y$ Zahl folgt $x \cdot y$ Zahl.
| s) | Aus $x \in \mathbb{B}$ und $y \in \mathbb{B}$ folgt $x \cdot y$ Zahl.
| t) | Aus $x \in \mathbb{B}$ und $y$ Zahl folgt $x \cdot y$ Zahl.
| u) | Aus $x$ Zahl und $y$ Zahl folgt $x \cdot y$ Zahl.

---

**RECH-Notation.**

### Beweis 108-2

**REIM-Notation.**

<p>| | |</p>
<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th></th>
</tr>
</thead>
</table>
| a) | VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{R})$.

Aus VS gleich $x \in \mathbb{R}$ … und
aus VS gleich … $y \in \mathbb{R}$
folgt via AAV: $x \cdot y \in \mathbb{R}$. 
Beweis 108-2 b) VS gleich

1: Aus VS gleich “... y ∈ S”
folgt via 95-15:

\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in S).\]

\[(y \in \mathbb{R}) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty).\]

**Fallunterscheidung**

### 1.1.Fall

2: Aus VS gleich “... x ∈ R...” und
aus 1.1.Fall “y ∈ R”
folgt via \(\text{AAV}^\text{V}\):

\[x \cdot y \in \mathbb{R}.\]

3: Aus 2 “x \cdot y ∈ \mathbb{R}”
folgt via \(\in \mathbb{SZ}\):

\[x \cdot y \in S.\]

### 1.2.Fall

2: Aus VS gleich “... x ∈ R...”
folgt via \(\in \mathbb{SZ}\):

\[x \in S.\]

3: Aus 2 “x ∈ S” und
aus 1.2.Fall “y = +\infty”
folgt via 108-1:

\[x \cdot y \in S.\]

### 1.3.Fall

2: Aus VS gleich “... x ∈ R...”
folgt via \(\in \mathbb{SZ}\):

\[x \in S.\]

3: Aus 2 “x ∈ S” und
aus 1.3.Fall “y = -\infty”
folgt via 108-1:

\[x \cdot y \in S.\]

**Ende Fallunterscheidung**

In allen Fällen gilt:

\[x \cdot y \in S.\]
Beweis 108-2 c) VS gleich

1: Aus VS gleich “...y ∈ T”
folgt via 95-16:

\[ (x \in \mathbb{R}) \land (y \in T). \]

\[ (y \in S) \lor (y = \text{nan}). \]

\[ (y \in S). \]

\[ x \cdot y \in S. \]

\[ x \cdot y \in T. \]
Beweis 108-2 c) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{T})$.

... 

Fallunterscheidung

... 

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2. Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$y = \text{nan}$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

2: Es gilt: $(x = 0) \lor (0 \neq x)$.

Fallunterscheidung

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1. Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$x = 0$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

3: Aus $\text{AAVI}\cdot 0 \cdot \text{nan} = 0$ und
aus 2.1. Fall "$x = 0$"
folgt: $x \cdot \text{nan} = 0$.

4: Aus 3"$x \cdot \text{nan} = 0$" und
aus 1.2. Fall "$y = \text{nan}$"
folgt: $x \cdot y = 0$.

5: Aus 4"$x \cdot y = 0$" und
aus 95-12"$0 \in \mathbb{T}$"
folgt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.2. Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$0 \neq x$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

3: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R}$..."
folgt via $\in \text{SZ}$:
$x \in \mathbb{T}$.

4: Aus 2.2. Fall "$0 \neq x$" und
aus 3"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\text{AAVI}$:
$x \cdot \text{nan} = \text{nan}$.

5: Aus 1.2. Fall "$y = \text{nan}$" und
aus 4"$x \cdot \text{nan} = \text{nan}$"
folgt: $x \cdot y = \text{nan}$.

6: Aus 5"$x \cdot y = \text{nan}$"
folgt via 95-16:
$x \cdot y \in \mathbb{T}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \cdot y \in \mathbb{T}$. 
Beweis 108-2 p) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “x ∈ C...” folgt via 101-1: 
(Rx ∈ ℝ) ∧ (Imx ∈ ℝ).

1.2: Aus VS gleich “...y ∈ C” folgt via 101-1: 
(Rey ∈ ℝ) ∧ (Imy ∈ ℝ).

2.1: Aus 1.1 “Re x ∈ ℝ...” und
aus 1.2 “Re y ∈ ℝ...” folgt via AAV: 
(Re x) · (Re y) ∈ ℝ.

2.2: Aus 1.1 “Re x ∈ ℝ...” und
aus 1.2 “...Im y ∈ ℝ” folgt via AAV: 
(Re x) · (Im y) ∈ ℝ.

2.3: Aus 1.1 “...Im x ∈ ℝ” und
aus 1.2 “Im y ∈ ℝ...” folgt via AAV: 
(Im x) · (Re y) ∈ ℝ.

2.4: Aus 1.1 “...Im x ∈ ℝ” und
aus 1.2 “...Im y ∈ ℝ” folgt via AAV: 
(Im x) · (Im y) ∈ ℝ.

3: Aus 2.4 “(Im x) · (Im y) ∈ ℝ” folgt via 100-6: 
−(Im x) · (Im y) ∈ ℝ.

4.1: Aus 2.1 “(Re x) · (Re y) ∈ ℝ” und
aus 3 “−(Im x) · (Im y) ∈ ℝ” folgt via AAV: 
(Re x) · (Re y) + (−(Im x) · (Im y)) ∈ ℝ.

4.2: Aus 2.2 “(Re x) · (Im y) ∈ ℝ” und
aus 2.3 “(Im x) · (Re y) ∈ ℝ” folgt via AAV: 
(Re x) · (Im y) + (Im x) · (Re y) ∈ ℝ.

5: Aus 4.1 folgt:
(Re x) · (Re y) − (Im x) · (Im y) ∈ ℝ.

6.1: Via 96-26 gilt: 
Re(x · y) = (Re x) · (Re y) − (Im x) · (Im y).

6.2: Via 96-26 gilt: 
Im(x · y) = (Re x) · (Im y) + (Im x) · (Re y).
Beweis 108-2 p) VS gleich 

\[(x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{C})\].

\[\ldots\]

7.1: Aus 6.1 \(\text{Re}(x \cdot y) = (\text{Re}x) \cdot (\text{Re}y) - (\text{Im}x) \cdot (\text{Im}y)\) und 

aus 5 \((\text{Re}x) \cdot (\text{Re}y) - (\text{Im}x) \cdot (\text{Im}y) \in \mathbb{R}\)

folgt:

\[\text{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{R}\].

7.2: Aus 6.2 \(\text{Im}(x \cdot y) = (\text{Re}x) \cdot (\text{Im}y) + (\text{Im}x) \cdot (\text{Re}y)\) und 

aus 4.2 \((\text{Re}x) \cdot (\text{Im}y) + (\text{Im}x) \cdot (\text{Re}y) \in \mathbb{R}\)

folgt:

\[\text{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{R}\].

8: Aus 7.1 \(\text{Re}(x \cdot y) \in \mathbb{R}\) und 

aus 7.2 \(\text{Im}(x \cdot y) \in \mathbb{R}\)

folgt via 101-1:

\[x \cdot y \in \mathbb{C}\].

d) VS gleich 

\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{C})\].

1: Aus VS gleich \(\ldots x \in \mathbb{R}\ldots\)

folgt via \(\in \text{SZ}\):

\[x \in \mathbb{C}\].

2: Aus 1 \(x \in \mathbb{C}\) und 

aus VS gleich \(\ldots y \in \mathbb{C}\)

folgt via des bereits bewiesenen p):

\[x \cdot y \in \mathbb{C}\].

e) VS gleich 

\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{B})\].

1.1: Aus VS gleich \(\ldots x \in \mathbb{R}\ldots\)

folgt via \(\in \text{SZ}\):

\[x \in \mathbb{T}\].

1.2: Aus VS gleich \(\ldots y \in \mathbb{B}\)

folgt via 101-3:

\[(\text{Re}y \in \mathbb{S}) \land (\text{Im}y \in \mathbb{S})\].

2.1: Aus 1.1 \(x \in \mathbb{T}\)

folgt via \(\text{FST}\):

\[(x = \text{Re}x) \land (\text{Im}x = 0)\].

2.2: Aus 1.2 \(\text{Re}y \in \mathbb{S}\ldots\)

folgt via \(\in \text{SZ}\):

\[\text{Re}y\ \text{Zahl}\].

2.3: Aus 1.2 \(\ldots \text{Im}y \in \mathbb{S}\)

folgt via \(\in \text{SZ}\):

\[\text{Im}y\ \text{Zahl}\].

\[\ldots\]
Beweis 108-2 e) VS gleich

\[(x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{B}).\]

\[\ldots\]

3.1: Aus 2.1 “\(x = \text{Re} x\ldots\)” und aus VS gleich “\(x \in \mathbb{R}\ldots\)” folgt:
\[\text{Re} x \in \mathbb{R}.\]

3.2: Aus 2.2 “\(\text{Re} y\) Zahl” folgt via FSM0:
\[0 \cdot \text{Re} y = 0.\]

3.3: Aus 2.3 “\(\text{Im} y\) Zahl” folgt via FSM0:
\[0 \cdot \text{Im} y = 0.\]

4.1: Aus 3.1 “\(\text{Re} \in \mathbb{R}\)” und aus 1.2 “\(\text{Re} y \in \mathbb{S}\ldots\)” folgt via des bereits bewiesenen b):
\[(\text{Re} x) \cdot (\text{Re} y) \in \mathbb{S}.\]

4.2: Aus 3.1 “\(\text{Re} \in \mathbb{R}\)” und aus 1.2 “\(\ldots\) \(\text{Im} y \in \mathbb{S}\)” folgt via des bereits bewiesenen b):
\[(\text{Re} x) \cdot (\text{Im} y) \in \mathbb{S}.\]

4.3: Aus 2.1 “\(\ldots\) \(\text{Im} x = 0\)” und aus 3.3 “\(0 \cdot \text{Im} y = 0\)” folgt:
\[(\text{Im} x) \cdot (\text{Im} y) = 0.\]

4.4: Aus 2.1 “\(\ldots\) \(\text{Im} x = 0\)” und aus 3.2 “\(0 \cdot \text{Re} y = 0\)” folgt:
\[(\text{Im} x) \cdot (\text{Re} y) = 0.\]

5.1:
\[\text{Re}(x \cdot y)\]
\[\overset{96-26}{=} (\text{Re} x) \cdot (\text{Re} y) - (\text{Im} x) \cdot (\text{Im} y)\]
\[\overset{4.3}{=} (\text{Re} x) \cdot (\text{Re} y) - 0\]
\[\overset{98-15}{=} (\text{Re} x) \cdot (\text{Re} y) + 0\]
\[\overset{98-12}{=} (\text{Re} x) \cdot (\text{Re} y).\]

5.2:
\[\text{Im}(x \cdot y)\]
\[\overset{96-26}{=} (\text{Re} x) \cdot (\text{Im} y) + (\text{Im} x) \cdot (\text{Re} y)\]
\[\overset{4.4}{=} (\text{Re} x) \cdot (\text{Im} y) + 0\]
\[\overset{98-12}{=} (\text{Re} x) \cdot (\text{Im} y).\]

\[\ldots\]
Beweis 108-2 e) VS gleich  

\((x \in \mathbb{R}) \land (y \in \mathbb{B}).\)

\[\ldots\]

6.1: Aus 5.1 “\(\Re(x \cdot y) = \ldots = (\Re x) \cdot (\Re y)\)” und aus 4.1 “\((\Re x) \cdot (\Re y) \in \mathbb{S}\)” folgt:

\[\Re(x \cdot y) \in \mathbb{S}.\]

6.2: Aus 5.2 “\(\Im(x \cdot y) = \ldots = (\Re x) \cdot (\Im y)\)” und aus 4.2 “\((\Re x) \cdot (\Im y) \in \mathbb{S}\)” folgt:

\[\Im(x \cdot y) \in \mathbb{S}.\]

7: Aus 6.1 “\(\Re(x \cdot y) \in \mathbb{S}\)” und aus 6.2 “\(\Im(x \cdot y) \in \mathbb{S}\)” folgt via 101-3:

\[x \cdot y \in \mathbb{B}.\]

f) VS gleich  

\((x \in \mathbb{R}) \land (y \text{ Zahl}).\)

1: Aus VS gleich “\(x \in \mathbb{R}\ldots\)” folgt via \(\in\text{SZ}:\)

\[x \text{ Zahl}.\]

2: Aus 1 “\(x \text{ Zahl}\)” und aus VS gleich “\(\ldots y \text{ Zahl}\)” folgt via 96-15:

\[x \cdot y \text{ Zahl}.\]
Beweis 108-2 g) VS gleich

1: Aus VS gleich “... y ∈ S” folgt via 95-15:

\((x \in S) \land (y \in S)\) \lor (y \in R) \lor (y = +\infty) \lor (y = -\infty).

**Fallunterscheidung**

1:  1.1.Fall

2: Aus 1.1.Fall “y ∈ R” und aus VS gleich “x ∈ S...” folgt via des bereits bewiesenen b):

\(y \cdot x \in S\).

3: Via KGM gilt:

\(x \cdot y = y \cdot x\).

4: Aus 3 “x \cdot y = y \cdot x” und aus 2 “y \cdot x \in S” folgt:

\(x \cdot y \in S\).

1.2.Fall

Aus VS gleich “x ∈ S...” und aus 1.2.Fall “y = +\infty” folgt via 108-1:

\(x \cdot y \in S\).

1.3.Fall

Aus VS gleich “x ∈ S...” und aus 1.3.Fall “y = -\infty” folgt via 108-1:

\(x \cdot y \in S\).

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt:

\(x \cdot y \in S\).
Beweis 108-2 h) VS gleich

\( (x \in S) \land (y \in T). \)

1: Aus VS gleich “... y ∈ T” folgt via 95-16:
\( (y \in S) \lor (y = \text{nan}). \)

**Fallunterscheidung**

1.1. Fall

2: Aus VS gleich “x ∈ S...” und aus 1.1. Fall “y ∈ S” folgt via des bereits bewiesenen g):
\( x \cdot y \in S. \)

3: Aus 2 “x \cdot y ∈ S” folgt via \( \in \mathbb{S}\mathbb{Z}. \)
\( x \cdot y \in T. \)

...
Beweis 108-2 h) VS gleich

\[(x \in S) \land (y \in T).\]

\[\ldots\]

**Fallunterscheidung**

\[\ldots\]

<table>
<thead>
<tr>
<th>1.2. Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>(y = \text{nan}.)</td>
</tr>
<tr>
<td>2: Es gilt:</td>
</tr>
<tr>
<td>((x = 0) \lor (0 \neq x).)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Fallunterscheidung**

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.1. Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>(x = 0.)</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus AAVI &quot;0 \cdot \text{nan} = 0&quot; und</td>
</tr>
<tr>
<td>aus 2.1. Fall &quot;x = 0&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>(x \cdot \text{nan} = 0.)</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 3 &quot;x \cdot \text{nan} = 0&quot; und</td>
</tr>
<tr>
<td>aus 1.2. Fall &quot;y = \text{nan}&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>(x \cdot y = 0.)</td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 4 &quot;x \cdot y = 0&quot; und</td>
</tr>
<tr>
<td>aus 95-12 &quot;0 \in T&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>(x \cdot y \in T.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

<table>
<thead>
<tr>
<th>2.2. Fall</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>(0 \neq x.)</td>
</tr>
<tr>
<td>3: Aus VS gleich &quot;x \in S...&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt via (\in \text{SZ}:)</td>
</tr>
<tr>
<td>(x \in T.)</td>
</tr>
<tr>
<td>4: Aus 2.2. Fall &quot;0 \neq x&quot; und</td>
</tr>
<tr>
<td>aus 3 &quot;x \in T&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt via AAVI:</td>
</tr>
<tr>
<td>(x \cdot \text{nan} = \text{nan}.)</td>
</tr>
<tr>
<td>5: Aus 4 &quot;x \cdot \text{nan} = \text{nan}&quot; und</td>
</tr>
<tr>
<td>aus 1.2. Fall &quot;y = \text{nan}&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt:</td>
</tr>
<tr>
<td>(x \cdot y = \text{nan}.)</td>
</tr>
<tr>
<td>6: Aus 5 &quot;x \cdot y = \text{nan}&quot;</td>
</tr>
<tr>
<td>folgt via 95-16:</td>
</tr>
<tr>
<td>(x \cdot y \in \mathbb{T}.)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Ende Fallunterscheidung**

In beiden Fällen gilt: \(x \cdot y \in T.\)

**Ende Fallunterscheidung**

In beiden Fällen gilt: \(x \cdot y \in T.\)
Beweis 108-2 j) VS gleich

1.1: Aus VS gleich \( x \in S \ldots \)
folgt via \( \in \text{SZ} \):
\( x \in T \).

1.2: Aus VS gleich \( \ldots y \in B \)
folgt via 101-3:
\( (\Re y \in S) \land (\Im y \in S) \).

2.1: Aus 1.1\( x \in T \)
folgt via \( \text{FST} \):
\( (x = \Re x) \land (\Im x = 0) \).

2.2: Aus 1.2\( \Re y \in S \ldots \)
folgt via \( \in \text{SZ} \):
\( \Re y \text{ Zahl} \).

2.3: Aus 1.2\( \ldots \Im y \in S \)
folgt via \( \in \text{SZ} \):
\( \Im y \text{ Zahl} \).

3.1: Aus 2.1\( x = \Re x \ldots \)
und aus VS gleich \( x \in S \ldots \)
folgt:
\( \Re x \in S \).

3.2: Aus 2.2\( \Re y \text{ Zahl} \)
folgt via \( \text{FSM}0 \):
\( (\Re y) \cdot 0 = 0 \).

3.3: Aus 2.3\( \Im y \text{ Zahl} \)
folgt via \( \text{FSM}0 \):
\( (\Im y) \cdot 0 = 0 \).

4.1: Aus 1.2\( \Re y \in S \ldots \) und
aus 3.1\( \Re x \in S \) und
folgt via des bereits bewiesenen g):
\( (\Re y) \cdot (\Re x) \in S \).

4.2: Aus 3.2\( (\Re y) \cdot 0 = 0 \) und
aus 2.1\( \ldots \Im x = 0 \)
folgt:
\( (\Re y) \cdot (\Im x) = 0 \).

4.3: Aus 1.2\( \ldots \Im y \in S \) und
aus 3.1\( \Re x \in S \)
folgt via des bereits bewiesenen g):
\( (\Im y) \cdot (\Re x) \in S \).

4.4: Aus 3.3\( (\Im y) \cdot 0 = 0 \) und
aus 2.1\( \ldots \Im x = 0 \)
folgt:
\( (\Im y) \cdot (\Im x) = 0 \).

...
Beweis 108-2 j) VS gleich

\( (x \in \mathbb{S}) \land (y \in \mathbb{B}). \)

\[ 5.1: \]

\[ \text{Re}(y \cdot x) \]

\[ 96-26 \ (\text{Re}y) \cdot (\text{Re}x) - (\text{Im}y) \cdot (\text{Im}x) \]

\[ 4.4 \ (\text{Re}y) \cdot (\text{Re}x) - 0 \]

\[ 98-15 \ (\text{Re}y) \cdot (\text{Re}x) + 0 \]

\[ 98-12 \ (\text{Re}y) \cdot (\text{Re}x). \]

\[ 5.2: \]

\[ \text{Im}(y \cdot x) \]

\[ 96-26 \ (\text{Re}y) \cdot (\text{Im}x) + (\text{Im}y) \cdot (\text{Re}x) \]

\[ 4.2 \ 0 + (\text{Im}y) \cdot (\text{Re}x) \]

\[ 98-12 \ (\text{Im}y) \cdot (\text{Re}x). \]

\[ 6.1: \text{Aus 5.1} \] "\( \text{Re}(y \cdot x) = \ldots = (\text{Re}y) \cdot (\text{Re}x) \)" und
\[ \text{aus 4.1} "(\text{Re}y) \cdot (\text{Re}x) \in \mathbb{S}" \]

folgt:

\[ \text{Re}(y \cdot x) \in \mathbb{S}. \]

\[ 6.2: \text{Aus 5.2} \] "\( \text{Im}(y \cdot x) = \ldots = (\text{Im}y) \cdot (\text{Re}x) \)" und
\[ \text{aus 4.3} "(\text{Im}y) \cdot (\text{Re}x) \in \mathbb{S}" \]

folgt:

\[ \text{Im}(y \cdot x) \in \mathbb{S}. \]

\[ 7: \text{Aus 6.1} \] "\( \text{Re}(y \cdot x) \in \mathbb{S} \)" und
\[ \text{aus 6.2} "\text{Im}(y \cdot x) \in \mathbb{S}" \]

folgt via 101-3:

\[ y \cdot x \in \mathbb{B}. \]

\[ 8: \text{Via KGM gilt:} \]

\[ x \cdot y = y \cdot x. \]

\[ 9: \text{Aus 8} \] "\( x \cdot y = y \cdot x \)" und
\[ \text{aus 7} "y \cdot x \in \mathbb{B}" \]

folgt:

\[ x \cdot y \in \mathbb{B}. \]

i) VS gleich

\[ (x \in \mathbb{S}) \land (y \in \mathbb{C}). \]

\[ 1: \text{Aus VS gleich } \ldots y \in \mathbb{C} \]

folgt via \( \in \mathbb{SZ} \):

\[ y \in \mathbb{B}. \]

\[ 2: \text{Aus VS gleich } x \in \mathbb{S} \ldots \]

aus 1 "\( y \in \mathbb{B}" \]

folgt via des bereits bewiesenen j):

\[ x \cdot y \in \mathbb{B}. \]
**Beweis 108-2 k) VS gleich**

(x ∈ S) ∧ (y Zahl).

1: Aus VS gleich “x ∈ S...”
folgt via ∈SZ:

(x ∈ S) ∧ (y Zahl).

2: Aus 1 “x Zahl” und
aus VS gleich “…y Zahl”
folgt via 96-15:

(x • y Zahl).

1) VS gleich

(x ∈ T) ∧ (y ∈ T).

1.1: Aus VS gleich “x ∈ T...”
folgt via 95-16:

(x ∈ S) ∨ (x = nan).

1.2: Aus VS gleich “…y ∈ T”
folgt via 95-16:

(y ∈ S) ∨ (y = nan).

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:

(x ∈ S) ∧ (y ∈ S)
∨ (x ∈ S) ∧ (y = nan)
∨ (x = nan) ∧ (y = S)
∨ (x = nan) ∧ (y = nan).

**Fallunterscheidung**

2.1. Fall

(x ∈ S) ∧ (y ∈ S).

3: Aus 2.1. Fall “x ∈ S...” und
aus 2.1. Fall “...y ∈ S”
folgt via des bereits bewiesenen g):

(x • y ∈ S).

4: Aus 3 “x • y ∈ S”
folgt via ∈SZ:

(x • y ∈ T).

2.2. Fall

(x ∈ S) ∧ (y = nan).

Aus 2.2. Fall “x ∈ S...” und
aus VS gleich “...y ∈ T”
folgt via des bereits bewiesenen h):

(x • y ∈ T).

...
Beweis 108-2 1) VS gleich $(x \in T) \land (y \in T)$.

... 

Fallunterscheidung

... 

### 2.3. Fall

<table>
<thead>
<tr>
<th>Schritt</th>
<th>Beschreibung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3</td>
<td>Aus 2.3. Fall“... $y \in S$” und aus VS gleich “$x \in T$...” folgt via des bereits bewiesenen h): $y \cdot x \in T$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Via KGM gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>Aus 4“$x \cdot y = y \cdot x$” und aus 3“$y \cdot x \in T$” folgt: $x \cdot y \in T$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

### 2.4. Fall

<table>
<thead>
<tr>
<th>Schritt</th>
<th>Beschreibung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3</td>
<td>Aus 2.4. Fall“$x = \text{nan}$...” und aus 97-5“$\text{nan} \cdot \text{nan} = \text{nan}$” folgt: $x \cdot \text{nan} = \text{nan}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Aus 3“$x \cdot \text{nan} = \text{nan}$” und aus 2.4. Fall“... $y = \text{nan}$” folgt: $x \cdot y = \text{nan}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>Aus 4“$x \cdot y = \text{nan}$” folgt via 95-16: $x \cdot y \in T$.</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Ende Fallunterscheidung

In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in T$.

m) VS gleich $(x \in T) \land (y \in \mathbb{C})$.

1.1: Aus VS gleich “$x \in T$...” folgt via $\in SZ$: $x$ Zahl.

1.2: Aus VS gleich “... $y \in \mathbb{C}$” folgt via $\in SZ$: $y$ Zahl.

2: Aus 1.1“$x$ Zahl” und aus 1.2“$y$ Zahl” folgt via 96-15: $x \cdot y$ Zahl.
Beweis 108-2 n) VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \land (y \in \mathbb{B})$.

1.1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{T}$...”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$:
$x$ Zahl.

1.2: Aus VS gleich “... $y \in \mathbb{B}$”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$:
$y$ Zahl.

2: Aus 1.1“$x$ Zahl” und
aus 1.2“$y$ Zahl”
folgt via 96-15:
$x \cdot y$ Zahl.

o) VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \land (y \text{ Zahl})$.

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{T}$...”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$:
$x$ Zahl.

2: Aus 1“$x$ Zahl” und
aus VS gleich “... $y$ Zahl”
folgt via 96-15:
$x \cdot y$ Zahl.

q) VS gleich $(x \in \mathbb{C}) \land (y \in \mathbb{B})$.

1.1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{C}$...”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$:
$x$ Zahl.

1.2: Aus VS gleich “... $y \in \mathbb{B}$”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$:
$y$ Zahl.

2: Aus 1.1“$x$ Zahl” und
aus 1.2“$y$ Zahl”
folgt via 96-15:
$x \cdot y$ Zahl.

r) VS gleich $(x \in \mathbb{C}) \land (y \text{ Zahl})$.

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{C}$...”
folgt via $\in \mathbb{SZ}$:
$x$ Zahl.

2: Aus 1“$x$ Zahl” und
aus VS gleich “... $y$ Zahl”
folgt via 96-15:
$x \cdot y$ Zahl.
Beweis 108-2 s) VS gleich

1.1: Aus VS gleich “\( x \in \mathbb{B} \ldots \)”
folgt via \( \in \mathbb{SZ} \):
\[ x \text{ Zahl.} \]

1.2: Aus VS gleich “\( \ldots y \in \mathbb{B} \)”
folgt via \( \in \mathbb{SZ} \):
\[ y \text{ Zahl.} \]

2: Aus 1.1 “\( x \text{ Zahl} \)” und
aus 1.2 “\( y \text{ Zahl} \)”
folgt via 96-15:
\[ x \cdot y \text{ Zahl.} \]

t) VS gleich

1: Aus VS gleich “\( x \in \mathbb{B} \ldots \)”
folgt via \( \in \mathbb{SZ} \):
\[ x \text{ Zahl.} \]

2: Aus 1 “\( x \text{ Zahl} \)” und
aus VS gleich “\( \ldots y \text{ Zahl} \)”
folgt via 96-15:
\[ x \cdot y \text{ Zahl.} \]

u) VS gleich

Aus VS gleich “\( x \text{ Zahl} \ldots \)” und
aus VS gleich “\( \ldots y \text{ Zahl} \)”
folgt via 96-15:
\[ x \cdot y \text{ Zahl.} \]
\[ \square \]


