Suite III - Die Elementare

Teil 5: Essays 220 - 234

$E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup x$**.** $E\ _{\mathtt{ni}}\!\cap x$**.** $E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus x$**.** $E\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x$**.**
$x \cup_{\mathtt{in}} E$**.** $x \cap_{\mathtt{in}} E$**.** $x \setminus_{\mathtt{in}} E$**.** $x \Delta_{\mathtt{in}} E$**.**
$E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D$**.** $E\ _{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D$**.** $E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D$**.** $E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D$**.**
$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\ _{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$**.** $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ _{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$**.**
χ **ist** $(\square, P, Z)$**alg1 von** f**.** χ **ist** $(\square, Q)$**alg2 von** f**.**
$x. \in Q$**.** $Q \in .x$**.** $x. \in .y$**.** $x. \notin Q$**.** $Q \notin .x$**.** $x. \notin .y$**.**

$x. = Q$**.** $Q = .x$**.** $x. = .y$**.** $x. \neq Q$**.** $Q \neq .x$**.** $x. \neq .y$**.**

Andreas Unterreiter

22. August 2013

$$E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x.\ E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cap x.\ E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\setminus x.\ E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\Delta\ x.$$
$$x \cup_{\mathtt{in}} E.\ x \cap_{\mathtt{in}} E.\ x \setminus_{\mathtt{in}} E.\ x \Delta_{\mathtt{in}} E.$$
$$E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D.\ E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D.\ E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D.\ E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} D.$$

Ersterstellung: 28/08/12 **Letzte Änderung: 05/09/12**

220-1. Hier werden in einem ersten von drei Schritten mehrere neue Notationen für spezielle Klassenterme eingeführt. Die Notationen begleiten in `matlab` gebräuchliche Notationen für die elementare Algebra von Funktionen:

220-1(Definition)

a) $E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$

$$= 220.0(E,x) = \{\lambda \cup x : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cup x))\}.$$

b) $E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x$

$$= 220.1(E,x) = \{\lambda \cap x : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cap x))\}.$$

c) $E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus x$

$$= 220.2(E,x) = \{\lambda \setminus x : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus x))\}.$$

d) $E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta\, x$

$$= 220.3(E,x) = \{\lambda \Delta x : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \Delta x))\}.$$

220-2. In einem zweiten von drei Schritten werden hier mehrere neue Notationen für teilweise bereits anderwertig in die Essays eingebrachte Klassenterme eingeführt. Die Notation begleitet in `matlab` gebräuchliche Notationen für die elementare Algebra von Funktionen:

220-2(Definition)

a) $x \cup_{\texttt{in}} E$

$$= \mathsf{4.0}(E,x) = \{x \cup \lambda : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cup \Omega))\}.$$

b) $x \cap_{\texttt{in}} E$

$$= \mathsf{4.1}(E,x) = \{x \cap \lambda : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cap \Omega))\}.$$

c) $x \setminus_{\texttt{in}} E$

$$= \mathsf{220.4}(E,x) = \{x \setminus \lambda : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \setminus \Omega))\}.$$

d) $x \Delta_{\texttt{in}} E$

$$= \mathsf{220.5}(E,x) = \{x \Delta \lambda : \lambda \in E\}$$
$$= \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \Delta \Omega))\}.$$

220-3. Im letzten von drei Schritten werden hier neue Notationen für spezielle Klassenterme in die Essays eingeführt. Die Notation begleitet in `matlab` gebräuchliche Notationen für die elementare Algebra von Funktionen:

220-3(Definition)

a) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$

$$= \mathsf{220.6}(E,D) = \{\lambda\cup\mu : (\lambda\in E)\wedge(\mu\in D)\}$$
$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Psi : (\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cup\Psi))\}.$$

b) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$

$$= \mathsf{220.7}(E,D) = \{\lambda\cap\mu : (\lambda\in E)\wedge(\mu\in D)\}$$
$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Psi : (\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cap\Psi))\}.$$

c) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\ D$

$$= \mathsf{220.8}(E,D) = \{\lambda\setminus\mu : (\lambda\in E)\wedge(\mu\in D)\}$$
$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Psi : (\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\setminus\Psi))\}.$$

d) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D$

$$= \mathsf{220.9}(E,D) = \{\lambda\Delta\mu : (\lambda\in E)\wedge(\mu\in D)\}$$
$$= \{\omega : (\exists\Omega,\Psi : (\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\Delta\Psi))\}.$$

220-4. Hier wird das "Element-Sein" von $E\ _{\mathtt{ni}}\cup\ x, E\ _{\mathtt{ni}}\cap\ x, E\ _{\mathtt{ni}}\setminus\ x, E\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x$ angesprochen:

220-4(Satz)

a) *Aus* "$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup\ x$"
folgt "x *Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega \cup x)$".

b) *Aus* "$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap\ x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega \cap x)$".

c) *Aus* "$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus\ x$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega \setminus x)$".

d) *Aus* "$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x$"
folgt "x *Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega \Delta x)$".

e) *Aus* "$w \in E$" *und* "x *Menge*" *folgt* "$w \cup x \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup\ x$".

f) *Aus* "$w \in E$" *folgt* "$w \cap x \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap\ x$".

g) *Aus* "$w \in E$" *folgt* "$w \setminus x \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus\ x$".

h) *Aus* "$w \in E$" *und* "x *Menge*" *folgt* "$w \Delta x \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x$".

Beweis **220-4** a) VS gleich $p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup\ x$.

1.1: Aus VS gleich "$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup\ x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

1.2: Aus VS gleich "$p \in E \cup_{\mathtt{in}} x$" und
aus "$E\ _{\mathtt{ni}}\cup\ x = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cup x))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cup x))\}$.

2: Aus 1.2"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cup x))\}$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega \cup x)}$

3: Aus 1.1"p Menge" und
aus 2"$\ldots p = \Omega \cup x$"
folgt: $\Omega \cup x$ Menge.

4: Aus 3"$\Omega \cup x$ Menge"
folgt via **213-3**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

Beweis **220-4** `b)` `VS` gleich $p \in E\ _{\texttt{ni}}\cap\ x.$

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in E \cap_{\texttt{in}} x$” und
aus “$E\ _{\texttt{ni}}\cap\ x = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cap x))\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cap x))\}.$

`2:` Aus `1`“$p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cap x))\}$”
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega \cap x).$

`c)` `VS` gleich $p \in E\ _{\texttt{ni}}\setminus\ x.$

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in E \setminus_{\texttt{in}} x$” und
aus “$E\ _{\texttt{ni}}\setminus\ x = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus x))\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus x))\}.$

`2:` Aus `1`“$p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus x))\}$”
folgt: $\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega \setminus x).$

`d)` `VS` gleich $p \in E\ _{\texttt{ni}}\Delta\ x.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p \in E\ _{\texttt{ni}}\Delta\ x$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$p \in E\ _{\texttt{ni}}\Delta\ x$” und
aus “$E\ _{\texttt{ni}}\Delta\ x = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega\Delta x))\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega\Delta x))\}.$

`2.1:` Aus `1.2`“$\ldots\Omega \in E\ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1.2`“$p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega\Delta x))\}$”
folgt: $\boxed{\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = \Omega\Delta x)}$

`3:` Aus `1.1`“p Menge” und
aus `2.2`“$\ldots p = \Omega\Delta x$”
folgt: $\Omega\Delta x$ Menge.

`4:` Aus `3`“$\Omega\Delta x$ Menge” und
aus `2.1`“Ω Menge”
folgt via **213-10**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

Beweis **220-4** `e)` `VS` gleich $(w \in E) \wedge (x \text{ Menge}).$

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$w \in E \ldots$"
folgt: $\Omega \in E.$

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \cup x = w \cup x.$

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge" und
aus `1.2`"w Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $x \cup w$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $w \cup x = \Omega \cup x.$

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$w \cup x = \Omega \cup x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \cup x = \Omega \cup x).$

`5:` Aus `2.3`"$x \cup w$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \cup x = \Omega \cup x)$"
folgt: $x \cup x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cup x))\}.$

`6:` Aus `5`"$w \cup x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cup x))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cup x))\} = E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$"
folgt: $w \cup x \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup x.$

Beweis **220-4** `f)` `VS` gleich $w \in E.$

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w.$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$w \in E$"
folgt: $\Omega \in E.$

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \cap x = w \cap x.$

`2.3:` Aus `1.2`"w Menge"
folgt via **2-24**: $w \cap x$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $w \cap x = \Omega \cap x.$

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$w \cap x = \Omega \cap x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \cap x = \Omega \cap x).$

`5:` Aus `2.3`"$x \cap w$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \cap x = \Omega \cap x)$"
folgt: $w \cap x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cap x))\}.$

`6:` Aus `5`"$w \cap x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cap x))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \cap x))\} = E \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x$"
folgt: $w \cap x \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x.$

Beweis **220-4** `g)` `VS` gleich $w \in E$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$w \in E$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \setminus x = w \setminus x$.

`2.3:` Aus `1.2`"w Menge"
folgt via **213-10**: $w \setminus x$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $w \setminus x = \Omega \setminus x$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$w \setminus x = \Omega \setminus x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \setminus x = \Omega \setminus x)$.

`5:` Aus `2.3`"$w \setminus x$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \setminus x = \Omega \setminus x)$"
folgt: $w \setminus x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus x))\}$.

`6:` Aus `5`"$w \setminus x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus x))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \setminus x))\} = E \ \mathtt{ni}\!\setminus x$"
folgt: $w \setminus x \in E \ \mathtt{ni}\!\setminus x$.

<u>Beweis **220-4**</u> `h)` `VS` gleich $(w \in E) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1.1`: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$w \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2.1`: Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$w \in E \ldots$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.2`: Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \Delta x = w \Delta x$.

`2.3`: Aus `1.2`"w Menge" und
aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge"
folgt via **213-10**: $w \Delta x$ Menge.

`3`: Aus `2.2`
folgt: $w \Delta x = \Omega \Delta x$.

`4`: Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$w \Delta x = \Omega \Delta x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \Delta x = \Omega \Delta x)$.

`5`: Aus `2.3`"$w \Delta x$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (w \Delta x = \Omega \Delta x)$"
folgt: $w \Delta x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \Delta x))\}$.

`6`: Aus `5`"$w \Delta x \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \Delta x))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = \Omega \Delta x))\} = E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$"
folgt: $w \Delta x \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$.

□

220-5. Hier wird das "Element-Sein" von $x \cup_{\texttt{in}} E, x \cap_{\texttt{in}} E, x \setminus_{\texttt{in}} E, x\Delta_{\texttt{in}} E$ angesprochen:

<u>**220-5(Satz)**</u>

a) *Aus* "$p \in x \cup_{\texttt{in}} E$" *folgt* "$x$ *Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x \cup \Omega)$".

b) *Aus* "$p \in x \cap_{\texttt{in}} E$" *folgt* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x \cap \Omega)$".

c) *Aus* "$p \in x \setminus_{\texttt{in}} E$" *folgt* "$x$ *Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x \setminus \Omega)$".

d) *Aus* "$p \in x\Delta_{\texttt{in}} E$" *folgt* "$x$ *Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x\Delta\Omega)$".

e) *Aus* "x *Menge*" *und* "$w \in E$" *folgt* "$x \cup w \in x \cup_{\texttt{in}} E$".

f) *Aus* "$w \in E$" *folgt* "$x \cap w \in x \cap_{\texttt{in}} E$".

g) *Aus* "x *Menge*" *und* "$w \in E$" *folgt* "$x \setminus w \in x \setminus_{\texttt{in}} E$".

h) *Aus* "x *Menge*" *und* "$w \in E$" *folgt* "$x\Delta w \in x\Delta_{\texttt{in}} E$".

<u>Beweis **220-5**</u> `a)` `VS` gleich $p \in x \cup_{\texttt{in}} E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \cup_{\texttt{in}} E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x \cup_{\texttt{in}} E$" und
aus "$x \cup_{\texttt{in}} E = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cup \Omega))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cup \Omega))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cup \Omega))\}$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x \cup \Omega)}$

`3:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `2`"$\ldots p = x \cup \Omega$"
folgt: $x \cup \Omega$ Menge.

`4:` Aus `3`"$x \cup \Omega$ Menge"
folgt via **213-3**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

Beweis **220-5** `b)` `VS` gleich $p \in x \cap_{\mathtt{in}} E$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in x \cap_{\mathtt{in}} E$" und
aus "$x \cap_{\mathtt{in}} E = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cap \Omega))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cap \Omega))\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cap \Omega))\}$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x \cap \Omega)$.

`c)` `VS` gleich $p \in x \setminus_{\mathtt{in}} E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x \setminus_{\mathtt{in}} E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x \setminus_{\mathtt{in}} E$" und
aus "$x \setminus_{\mathtt{in}} E = \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \setminus \Omega))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \setminus \Omega))\}$.

`2:` Aus `1.2`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \setminus \Omega))\}$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x \setminus \Omega)}$

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots p = x \setminus \Omega$" und
aus `1.1`"p Menge"
folgt: $x \setminus \Omega$ Menge.

`4:` Aus `3.2`"$x \setminus \Omega$ Menge" und
aus `3.1`"Ω Menge"
folgt via **213-10**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

<u>Beweis **220-5**</u> `d)` `VS` gleich $p \in x\Delta_{\texttt{in}}\, E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in x\Delta_{\texttt{in}}\, E$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in x\Delta_{\texttt{in}}\, E$" und
aus "$x\Delta_{\texttt{in}}\, E = \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x\Delta\Omega))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x\Delta\Omega))\}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$p \in \{\omega : (\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x\Delta\Omega))\}$"
folgt: $\boxed{\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (p = x\Delta\Omega)}$

`3:` Aus `1.1`"p Menge" und
aus `2.2`"$\ldots p = x\Delta\Omega$"
folgt: $x\Delta\Omega$ Menge.

`4:` Aus `3`"$x\Delta\Omega$ Menge" und
aus `2.1`"Ω Menge"
folgt via **213-10**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

Beweis **220-5** `e)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (w \in E)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w \in E$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $x \cup \Omega = x \cup w$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$" und
aus `1.2`"w Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $x \cup w$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $x \cup w = x \cup \Omega$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$x \cup w = x \cup \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x \cup w = x \cup \Omega)$.

`5:` Aus `2.3`"$x \cup w$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x \cup w = x \cup \Omega)$"
folgt: $x \cup w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cup \Omega))\}$.

`6:` Aus `5`"$x \cup w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cup \Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cup \Omega))\} = x \cup_{\texttt{in}} E$"
folgt: $x \cup w \in x \cup_{\texttt{in}} E$.

<u>Beweis **220-5**</u> `f) VS` gleich $w \in E$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$w \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$w \in E$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $x \cap \Omega = x \cap w$.

`2.3:` Aus `1.2`"w Menge"
folgt via **2-24**: $x \cap w$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $x \cap w = x \cap \Omega$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$x \cap w = x \cap \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x \cap w = x \cap \Omega)$.

`5:` Aus `2.3`"$w \cap x$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x \cap w = x \cap \Omega)$"
folgt: $x \cap w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cap \Omega))\}$.

`6:` Aus `5`"$x \cap w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cap \Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \cap \Omega))\} = x \cap_{\texttt{in}} E$"
folgt: $x \cap w \in x \cap_{\texttt{in}} E$.

Beweis **220-5** `g)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (w \in E)$.

`1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w \in E$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $x \setminus \Omega = x \setminus w$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$"
folgt via **213-10**: $x \setminus w$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $x \setminus w = x \setminus \Omega$.

`4:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$x \setminus w = x \setminus \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x \setminus w = x \setminus \Omega)$.

`5:` Aus `2.3`"$x \setminus w$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x \setminus w = x \setminus \Omega)$"
folgt: $x \setminus w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \setminus \Omega))\}$.

`6:` Aus `5`"$x \setminus w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \setminus \Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x \setminus \Omega))\} = x \setminus_{\texttt{in}} E$"
folgt: $x \setminus w \in x \setminus_{\texttt{in}} E$.

Beweis **220-5** `h)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (w \in E)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in E$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w \in E$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $x\Delta\Omega = x\Delta w$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "x Menge$\ldots$" und
aus `1.2`"w Menge"
folgt via **213-10**: $x\Delta w$ Menge.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $x\Delta w = x\Delta\Omega$.

`4:` Aus `1.1`"$\exists\Omega \ldots$",
aus `2.1`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$x\Delta w = x\Delta\Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x\Delta w = x\Delta\Omega)$.

`5:` Aus `2.3`"$x\Delta w$ Menge" und
aus `4`"$\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (x\Delta w = x\Delta\Omega)$"
folgt: $x\Delta w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x\Delta\Omega))\}$.

`6:` Aus `5`"$x\Delta w \in \{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x\Delta\Omega))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\omega = x\Delta\Omega))\} = x\Delta_{\mathtt{in}}\, E$"
folgt: $x\Delta w \in x\Delta_{\mathtt{in}}\, E$.

$\square$

220-6. Die Zugehörigkeit zu $E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D$, $E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}} D$, $E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}} D$, $E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D$ ist einfach zu überprüfen:

220-6(Satz)

a) *Aus* “$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D$”
folgt “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega \cup \Psi)$”.

b) *Aus* “$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}} D$”
folgt “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega \cap \Psi)$”.

c) *Aus* “$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}} D$”
folgt “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega \setminus \Psi)$”.

d) *Aus* “$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D$”
folgt “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega\delta\Psi)$”.

e) *Aus* “$w \in E$” *und* “$v \in D$” *folgt* “$w \cup v \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D$”.

f) *Aus* “$w \in E$” *und* “$v \in D$” *folgt* “$w \cap v \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}} D$”.

g) *Aus* “$w \in E$” *und* “$v \in D$” *folgt* “$w \setminus v \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}} D$”.

h) *Aus* “$w \in E$” *und* “$v \in D$” *folgt* “$w\Delta v \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D$”.

Beweis **220-6** a) VS gleich $p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D$.

1: Aus VS gleich “$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D$” und
aus “$E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} D = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \cup \Psi))\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \cup \Psi))\}$.

2: Aus 1“$p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \cup \Psi))\}$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega \cup \Psi)$.

b) VS gleich $p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}} D$.

1: Aus VS gleich “$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}} D$” und
aus “$E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}} D = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \cap \Psi))\}$”
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \cap \Psi))\}$.

2: Aus 1“$p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \cap \Psi))\}$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega \cap \Psi)$.

<u>Beweis</u> **220-6** `c)` `VS` gleich $p \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}} D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}} D$" und
aus "$E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}} D = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \setminus \Psi))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \setminus \Psi))\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \setminus \Psi))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega \setminus \Psi)$.

`d)` `VS` gleich $p \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D$" und
aus "$E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \Delta \Psi))\}$"
folgt: $p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \Delta \Psi))\}$.

`2:` Aus `1`"$p \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\omega = \Omega \Delta \Psi))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (p = \Omega \Delta \Psi)$.

`efgh)` `VS` gleich $(w \in E) \wedge (v \in D)$.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = w$.

`1.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = v$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$w \in E \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots v \in D$"
folgt via **ElementAxiom**: v Menge.

...

<u>Beweis</u> **220-6** `efgh)` ...

`2.1:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$" und
aus `VS` gleich "$w \in E \ldots$"
folgt: $\Omega \in E$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = v$" und
aus `VS` gleich "$\ldots v \in D$"
folgt: $\Psi \in D$.

`2.3:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \cup v = w \cup v$.

`2.4:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \cap v = w \cap v$.

`2.5:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \setminus v = w \setminus v$.

`2.6:` Aus `1.1`"$\ldots \Omega = w$"
folgt: $\Omega \Delta v = w \Delta v$.

`2.7:` Aus `1.3`"w Menge" und
aus `1.4`"v Menge"
folgt via $\cup$**Axiom**: $w \cup v$ Menge.

`2.8:` Aus `1.3`"w Menge"
folgt via **2-24**: $w \cap v$ Menge.

`2.9:` Aus `1.3`"w Menge"
folgt via **213-10**: $w \setminus v$ Menge.

`2.10:` Aus `1.3`"w Menge" und
aus `1.4`"v Menge"
folgt via **213-10**: $w \Delta v$ Menge.

...

<u>Beweis</u> **220-6** `efgh)` ...

`3.1:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = v$" und
aus `2.3`"$\Omega \cup v = w \cup v$"
folgt: $\Omega \cap \Psi = w \cup v.$

`3.2:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = v$" und
aus `2.4`"$\Omega \cap v = w \cap v$"
folgt: $\Omega \cap \Psi = w \cap v.$

`3.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = v$" und
aus `2.5`"$\Omega \setminus v = w \setminus v$"
folgt: $\Omega \setminus \Psi = w \setminus v.$

`3.4:` Aus `1.2`"$\ldots \Psi = v$" und
aus `2.6`"$\Omega \Delta v = w \Delta v$"
folgt: $\Omega \Delta \Psi = w \Delta v.$

`4.1:` Aus `3.1`
folgt: $w \cup v = \Omega \cup \Psi.$

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $w \cap v = \Omega \cap \Psi.$

`4.3:` Aus `3.3`
folgt: $w \setminus v = \Omega \setminus \Psi.$

`4.4:` Aus `3.4`
folgt: $w \Delta v = \Omega \Delta \Psi.$

...

<u>Beweis</u> **220-6** `efgh)` ...

`5.1:` Aus `1.1`“ $\exists\Omega\ldots$ ”,
aus `1.2`“ $\exists\Psi\ldots$ ”,
aus `2.1`“ $\Omega\in E$ ”,
aus `2.2`“ $\Psi\in D$ ” und
aus `4.1`“ $w\cup v=\Omega\cup\Psi$ ”
folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\cup v=\Omega\cup\Psi)$.

`5.2:` Aus `1.1`“ $\exists\Omega\ldots$ ”,
aus `1.2`“ $\exists\Psi\ldots$ ”,
aus `2.1`“ $\Omega\in E$ ”,
aus `2.2`“ $\Psi\in D$ ” und
aus `4.2`“ $w\cap v=\Omega\cap\Psi$ ”
folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\cap v=\Omega\cap\Psi)$.

`5.3:` Aus `1.1`“ $\exists\Omega\ldots$ ”,
aus `1.2`“ $\exists\Psi\ldots$ ”,
aus `2.1`“ $\Omega\in E$ ”,
aus `2.2`“ $\Psi\in D$ ” und
aus `4.3`“ $w\setminus v=\Omega\setminus\Psi$ ”
folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\setminus v=\Omega\setminus\Psi)$.

`5.4:` Aus `1.1`“ $\exists\Omega\ldots$ ”,
aus `1.2`“ $\exists\Psi\ldots$ ”,
aus `2.1`“ $\Omega\in E$ ”,
aus `2.2`“ $\Psi\in D$ ” und
aus `4.4`“ $w\Delta v=\Omega\Delta\Psi$ ”
folgt: $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\Delta v=\Omega\Delta\Psi)$.

`6.1:` Aus `2.7`“ $w\cup v$ Menge” und
aus `5.1`“ $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\cup v=\Omega\cup\Psi)$ ”
folgt: $w\cup v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cup\Psi))\}$.

`6.2:` Aus `2.8`“ $w\cap v$ Menge” und
aus `5.2`“ $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\cap v=\Omega\cap\Psi)$ ”
folgt: $w\cap v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cap\Psi))\}$.

`6.3:` Aus `2.9`“ $w\setminus v$ Menge” und
aus `5.3`“ $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\setminus v=\Omega\setminus\Psi)$ ”
folgt: $w\setminus v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\setminus\Psi))\}$.

`6.4:` Aus `2.10`“ $w\Delta v$ Menge” und
aus `5.4`“ $\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(w\Delta v=\Omega\Delta\Psi)$ ”
folgt: $w\Delta v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\Delta\Psi))\}$.

...

Beweis **220-6** `efgh)` ...

`7.e):` Aus `6.1`"$w\cup v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cup\Psi))\}$" und aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cup\Psi))\}=E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D$" folgt: $w\cup v\in E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D$.

`7.f):` Aus `6.2`"$w\cap v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cap\Psi))\}$" und aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\cap\Psi))\}=E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D$" folgt: $w\cap v\in E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D$.

`7.g):` Aus `6.3`"$w\setminus v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\setminus\Psi))\}$" und aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\setminus\Psi))\}=E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D$" folgt: $w\setminus v\in E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D$.

`7.h):` Aus `6.4`"$w\Delta v\in\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\Delta\Psi))\}$" und aus "$\{\omega:(\exists\Omega,\Psi:(\Omega\in E)\wedge(\Psi\in D)\wedge(\omega=\Omega\Delta\Psi))\}=E\ {}_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D$" folgt: $w\Delta v\in E\ {}_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D$.

$\square$

220-7. Wie zu erwarten war gilt unter anderem $E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup x = x \cup_{\mathtt{in}} E$ und $E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D = D\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ E$. Für die Klassen-Differenz sind keine ähnlichen Identitäten verfügbar:

220-7(Satz)

a) $E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup x = x \cup_{\mathtt{in}} E$.

b) $E\ _{\mathtt{ni}}\!\cap x = x \cap_{\mathtt{in}} E$.

c) $E\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x = x\Delta_{\mathtt{in}}\ E$.

d) $E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D = D\ _{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} E$.

e) $E\ _{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D = D\ _{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} E$.

f) $E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D = D\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ E$.

Beweis **220-7** a)

`Thema1.1` $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup x$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup x$"
folgt via **220-4**:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cup x)).$$

3: Via **KG**$\cup$ gilt: $\Omega \cup x = x \cup \Omega$.

4.1: Aus 2"x Menge…" und
aus 2"…$\Omega \in E$…"
folgt via **220-5**: $x \cup \Omega \in x \cup_{\mathtt{in}} E$.

4.2: Aus 2"…$\alpha = \Omega \cup x$" und
aus 3"$\Omega \cup x = x \cup \Omega$"
folgt: $\alpha = x \cup \Omega$.

5: Aus 4.2"$\alpha = x \cup \Omega$" und
aus 4.1"$x \cup \Omega \in x \cup_{\mathtt{in}} E$"
folgt: $\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup x) \Rightarrow (\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$E\ _{\mathtt{ni}}\!\cup x \subseteq x \cup_{\mathtt{in}} E$"

…

<u>Beweis **220-7**</u> `a)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} E$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} E$”
folgt via **220-5**:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = x \cup \Omega)).$$

`3:` Via **KG**$\cup$ gilt: $x \cup \Omega = \Omega \cup x$.

`4.1:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus `2`“x Menge...”
folgt via **220-4**: $\Omega \cup x \in E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$.

`4.2:` Aus `2`“$\ldots \alpha = x \cup \Omega$” und
aus `3`“$x \cup \Omega = \Omega \cup x$”
folgt: $\alpha = \Omega \cup x$.

`5:` Aus `4.2`“$\alpha = \Omega \cup x$” und
aus `4.1`“$\Omega \cup x \in E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$”
folgt: $\alpha \in E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cup_{\mathtt{in}} E) \Rightarrow (\alpha \in E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$x \cup_{\mathtt{in}} E \subseteq E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$”

`2:` Aus `A1` gleich “$E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x \subseteq x \cup_{\mathtt{in}} E$” und
aus `A2` gleich “$x \cup_{\mathtt{in}} E \subseteq E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x = x \cup_{\mathtt{in}} E$.

Beweis **220-7** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap x.$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap x$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cap x).$

`3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\Omega \cap x = x \cap \Omega.$

`4.1:` Aus 2“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **220-5**: $x \cap \Omega \in x \cap_{\texttt{in}} E.$

`4.2:` Aus 2“$\ldots \alpha = \Omega \cap x$” und
aus 3“$\Omega \cap x = x \cap \Omega$”
folgt: $\alpha = x \cap \Omega.$

`5:` Aus `4.2`“$\alpha = x \cap \Omega$” und
aus `4.1`“$x \cap \Omega \in x \cap_{\texttt{in}} E$”
folgt: $\alpha \in x \cap_{\texttt{in}} E.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap x) \Rightarrow (\alpha \in x \cap_{\texttt{in}} E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“} E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cap x \subseteq x \cap_{\texttt{in}} E \text{”}}$

...

Beweis **220-7** `b)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x \cap_{\texttt{in}} E$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in x \cap_{\texttt{in}} E$"
folgt via **220-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = x \cap \Omega)$.

`3:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap \Omega = \Omega \cap x$.

`4.1:` Aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **220-4**: $\Omega \cap x \in E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x$.

`4.2:` Aus 2 "$\ldots \alpha = x \cap \Omega$" und
aus 3 "$x \cap \Omega = \Omega \cap x$"
folgt: $\alpha = \Omega \cap x$.

`5:` Aus `4.2` "$\alpha = \Omega \cap x$" und
aus `4.1` "$\Omega \cap x \in E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x$"
folgt: $\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap_{\texttt{in}} E) \Rightarrow (\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x \cap_{\texttt{in}} E \subseteq E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x$"

`2:` Aus `A1` gleich "$E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x \subseteq x \cap_{\texttt{in}} E$" und
aus `A2` gleich "$x \cap_{\texttt{in}} E \subseteq E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap x = x \cap_{\texttt{in}} E$.

Beweis **220-7** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\Delta\ x.$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\Delta\ x$"
folgt via **220-4**:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \Delta x)).$$

`3:` Via **FS**Δ gilt: $\Omega \Delta x = x \Delta \Omega.$

`4.1:` Aus `2`"x Menge…" und
aus `2`"…$\Omega \in E$…"
folgt via **220-5**: $x\Delta\Omega \in x\Delta_{\texttt{in}}\ E.$

`4.2:` Aus `2`"…$\alpha = \Omega\Delta x$" und
aus `3`"$\Omega\Delta x = x\Delta\Omega$"
folgt: $\alpha = x\Delta\Omega.$

`5:` Aus `4.2`"$\alpha = x\Delta\Omega$" und
aus `4.1`"$x\Delta\Omega \in x\Delta_{\texttt{in}}\ E$"
folgt: $\alpha \in x\Delta_{\texttt{in}}\ E.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\Delta\ x) \Rightarrow (\alpha \in x\Delta_{\texttt{in}}\ E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$E\ {}_{\texttt{ni}}\Delta\ x \subseteq x\Delta_{\texttt{in}}\ E$"

…

Beweis **220-7** `c)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in x \Delta_{\mathtt{in}} E$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in x \Delta_{\mathtt{in}} E$"
folgt via **220-5**:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = x \Delta \Omega)).$$

`3:` Via **FS**Δ gilt: $x \Delta \Omega = \Omega \Delta x$.

`4.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `2`"x Menge..."
folgt via **220-4**: $\Omega \Delta x \in E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$.

`4.2:` Aus `2`"$\ldots \alpha = x \Delta \Omega$" und
aus `3`"$x \Delta \Omega = \Omega \Delta x$"
folgt: $\alpha = \Omega \Delta x$.

`5:` Aus `4.2`"$\alpha = \Omega \Delta x$" und
aus `4.1`"$\Omega \Delta x \in E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$"
folgt: $\alpha \in E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \Delta_{\mathtt{in}} E) \Rightarrow (\alpha \in E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$x \Delta_{\mathtt{in}} E \subseteq E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$"

`2:` Aus `A1` gleich "$E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x \subseteq x \Delta_{\mathtt{in}} E$" und
aus `A2` gleich "$x \Delta_{\mathtt{in}} E \subseteq E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E\, {}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x = x \Delta_{\mathtt{in}} E$.

Beweis **220-7** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, D$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, D$”
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi).$$

`3.1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $\Omega \cup \Psi = \Psi \cup \Omega$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Psi \in D \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **220-6**: $\Psi \cup \Omega \in D \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, E$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega \cup \Psi$” und
aus `3.1`“$\Omega \cup \Psi = \Psi \cup \Omega$”
folgt: $\alpha = \Psi \cup \Omega$.

`5:` Aus `4`“$\alpha = \Psi \cup \Omega$” und
aus `3.2`“$\Psi \cup \Omega \in D \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, E$”
folgt: $\alpha \in D \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, D) \Rightarrow (\alpha \in D \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}E \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, D \subseteq D \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, E\text{”}}$

Beweis **220-7** `d)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ E.$

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ E$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi).$$

`3.1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $\Omega \cup \Psi = \Psi \cup \Omega.$

`3.2:` Aus `2` "$\ldots \Psi \in E \ldots$" und
aus `2` "$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Psi \cup \Omega \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D.$

`4:` Aus `2` "$\ldots \alpha = \Omega \cup \Psi$" und
aus `3.1` "$\Omega \cup \Psi = \Psi \cup \Omega$"
folgt: $\alpha = \Psi \cup \Omega.$

`5:` Aus `4` "$\alpha = \Psi \cup \Omega$" und
aus `3.2` "$\Psi \cup \Omega \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D$"
folgt: $\alpha \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ E) \Rightarrow (\alpha \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ E \subseteq E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D$"

`2:` Aus `A1` gleich "$E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D \subseteq D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ E$" und
aus `A2` gleich "$D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ E \subseteq E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ E.$

Beweis **220-7** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ D.$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ D$”
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \cap \Psi).$$

`3.1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\Omega \cap \Psi = \Psi \cap \Omega.$

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Psi \in D \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **220-6**: $\Psi \cap \Omega \in D\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ E.$

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega \cap \Psi$” und
aus `3.1`“$\Omega \cap \Psi = \Psi \cap \Omega$”
folgt: $\alpha = \Psi \cap \Omega.$

`5:` Aus `4`“$\alpha = \Psi \cap \Omega$” und
aus `3.2`“$\Psi \cap \Omega \in D\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ E$”
folgt: $\alpha \in D\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ E.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ D) \Rightarrow (\alpha \in D\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}E\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ D \subseteq D\ {}_{\texttt{ni}}\!\cap_{\texttt{in}}\ E\text{”}}$

<u>Beweis **220-7**</u> `e)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in D\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ E.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in D\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ E$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cap \Psi).$$

`3.1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $\Omega \cap \Psi = \Psi \cap \Omega.$

`3.2:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in E \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Psi \cap \Omega \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D.$

`4:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \cap \Psi$" und
aus `3.1`"$\Omega \cap \Psi = \Psi \cap \Omega$"
folgt: $\alpha = \Psi \cap \Omega.$

`5:` Aus `4`"$\alpha = \Psi \cap \Omega$" und
aus `3.2`"$\Psi \cap \Omega \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$"
folgt: $\alpha \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in D\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ E) \Rightarrow (\alpha \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \,\Big|\, \text{“}D\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ E \subseteq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D \subseteq D\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ E$" und
aus `A2` gleich "$D\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ E \subseteq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D = D\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ E.$

Beweis **220-7** `f)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D.$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega\Delta\Psi).$$

`3.1:` Via **FS**Δ gilt: $\Omega\Delta\Psi = \Psi\Delta\Omega.$

`3.2:` Aus 2"$\ldots \Psi \in D \ldots$" und
aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Psi\Delta\Omega \in D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E.$

`4:` Aus 2"$\ldots \alpha = \Omega\Delta\Psi$" und
aus `3.1`"$\Omega\Delta\Psi = \Psi\Delta\Omega$"
folgt: $\alpha = \Psi\Delta\Omega.$

`5:` Aus 4"$\alpha = \Psi\Delta\Omega$" und
aus `3.2`"$\Psi\Delta\Omega \in D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E$"
folgt: $\alpha \in D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D) \Rightarrow (\alpha \in D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\, \text{"}E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D \subseteq D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E\text{"}}$

Beweis **220-7** `f)`

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\qquad \alpha \in D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E.$

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E$”
folgt via **220-6**:
$$\exists\Omega, \Psi : (\Omega \in D) \wedge (\Psi \in E) \wedge (\alpha = \Omega\Delta\Psi).$$

`3.1:` Via **FS**Δ gilt: $\Omega\Delta\Psi = \Psi\Delta\Omega.$

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \Psi \in E \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \in D \ldots$”
folgt via **220-6**: $\Psi\Delta\Omega \in E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D.$

`4:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega\Delta\Psi$” und
aus `3.1`“$\Omega\Delta\Psi = \Psi\Delta\Omega$”
folgt: $\alpha = \Psi\Delta\Omega.$

`5:` Aus `4`“$\alpha = \Psi\Delta\Omega$” und
aus `3.2`“$\Psi\Delta\Omega \in E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D$”
folgt: $\alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D.$

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E) \Rightarrow (\alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E \subseteq E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D \subseteq D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E$” und
aus `A2` gleich “$D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E \subseteq E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $E \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; D = D \;_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\; E.$

$\square$

220-8. Falls $E \subseteq e$, dann gilt, da die Elemente von E und e die Elemente etwa von $x \setminus_{\mathtt{in}} E$ und $x \setminus_{\mathtt{in}} e$ generieren, unter anderem $x \setminus_{\mathtt{in}} E \subseteq x \setminus_{\mathtt{in}} e$:

220-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $E \subseteq e$.

Dann folgt:

a) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x \subseteq e\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup x$.

b) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cap x \subseteq e\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cap x$.

c) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\setminus x \subseteq e\ {}_{\mathtt{ni}}\!\setminus x$.

d) $E\ {}_{\mathtt{ni}}\!\Delta\ x \subseteq e\ {}_{\mathtt{ni}}\!\Delta\ x$.

e) $x \cup_{\mathtt{in}} E \subseteq x \cup_{\mathtt{in}} e$.

f) $x \cap_{\mathtt{in}} E \subseteq x \cap_{\mathtt{in}} e$.

g) $x \setminus_{\mathtt{in}} E \subseteq x \setminus_{\mathtt{in}} e$.

h) $x \Delta_{\mathtt{in}} E \subseteq x \Delta_{\mathtt{in}} e$.

<u>Beweis **220-8**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in E \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x$”
folgt via **220-4**:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cup x)).$$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus →)“$E \subseteq e$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in e$.

`4:` Aus `3`“$\Omega \in e$” und
aus `2`“x Menge…”
folgt via **220-4**: $\Omega \cup x \in e \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x$.

`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega \cup x$” und
aus `4`“$\Omega \cup x \in e \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x$”
folgt: $\alpha \in e \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x) \Rightarrow (\alpha \in e \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x \subseteq e \; {}_{\texttt{ni}}\!\cup x$.

Beweis **220-8** b)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E\,_{\texttt{ni}}\!\cap x.$

2: Aus Thema1"$\alpha \in E\,_{\texttt{ni}}\!\cap x$"
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cap x).$

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus →)"$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

4: Aus 3"$\Omega \in e$"
folgt via **220-4**: $\Omega \cap x \in e\,_{\texttt{ni}}\!\cap x.$

5: Aus 2"$\ldots \alpha = \Omega \cap x$" und
aus 4"$\Omega \cap x \in e\,_{\texttt{ni}}\!\cap x$"
folgt: $\alpha \in e\,_{\texttt{ni}}\!\cap x.$

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in E\,_{\texttt{ni}}\!\cap x) \Rightarrow (\alpha \in e\,_{\texttt{ni}}\!\cap x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E\,_{\texttt{ni}}\!\cap x \subseteq e\,_{\texttt{ni}}\!\cap x.$

c)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x.$

2: Aus Thema1"$\alpha \in E\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x$"
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \setminus x).$

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus →)"$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

4: Aus 3"$\Omega \in e$"
folgt via **220-4**: $\Omega \setminus x \in e\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x.$

5: Aus 2"$\ldots \alpha = \Omega \setminus x$" und
aus 4"$\Omega \setminus x \in e\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x$"
folgt: $\alpha \in e\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x.$

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in E\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x) \Rightarrow (\alpha \in e\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x \subseteq e\,_{\texttt{ni}}\!\setminus x.$

Beweis **220-8** d)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x.$

2: Aus Thema1"$\alpha \in E \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x$"
folgt via **220-4**:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \Delta x)).$$

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus →)"$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

4: Aus 3"$\Omega \in e$" und
aus 2"x Menge…"
folgt via **220-4**: $\Omega \Delta x \in e \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x.$

5: Aus 2"$\ldots \alpha = \Omega \Delta x$" und
aus 4"$\Omega \Delta x \in e \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x$"
folgt: $\alpha \in e \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x.$

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in E \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x) \Rightarrow (\alpha \in e \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x \subseteq e \, {}_{\mathtt{ni}}\Delta \, x.$

e)

1.1: Aus →)"$E \subseteq e$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $E \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x \subseteq e \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x.$

1.2: Via **220-7** gilt: $x \cup_{\mathtt{in}} E = E \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x.$

1.3: Via **220-7** gilt: $e \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x = x \cup_{\mathtt{in}} e.$

2: Aus 1.2"$x \cup_{\mathtt{in}} E = E \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x$" und
aus 1.1"$E \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x \subseteq e \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x$"
folgt: $x \cup_{\mathtt{in}} E \subseteq e \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x.$

3: Aus 2"$x \cup_{\mathtt{in}} E \subseteq e \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x$" und
aus 1.3"$e \, {}_{\mathtt{ni}}\cup x = x \cup_{\mathtt{in}} e$"
folgt: $x \cup_{\mathtt{in}} E \subseteq x \cup_{\mathtt{in}} e.$

<u>Beweis</u> **220-8** `f)`

`1.1:` Aus →) "$E \subseteq e$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $E \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x.$

`1.2:` Via **220-7** gilt: $x \cap_{\mathtt{in}} E = E \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x.$

`1.3:` Via **220-7** gilt: $e \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x = x \cap_{\mathtt{in}} e.$

`2:` Aus `1.2`"$x \cap_{\mathtt{in}} E = E \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x$" und
aus `1.1`"$E \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x$"
folgt: $x \cap_{\mathtt{in}} E \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x.$

`3:` Aus `2`"$x \cap_{\mathtt{in}} E \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x$" und
aus `1.3`"$e \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x = x \cap_{\mathtt{in}} e$"
folgt: $x \cap_{\mathtt{in}} E \subseteq x \cap_{\mathtt{in}} e.$

`g)`

`Thema1` $\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} E.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} E$"
folgt via **220-4**:
$$(x \text{ Menge}) \wedge (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = x \setminus \Omega)).$$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

`4:` Aus `2`"x Menge…" und
aus `3`"$\Omega \in e$"
folgt via **220-4**: $x \setminus \Omega \in x \setminus_{\mathtt{in}} e.$

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = x \setminus \Omega$" und
aus `4`"$x \setminus \Omega \in x \setminus_{\mathtt{in}} e$"
folgt: $\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} e.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} E) \Rightarrow (\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} e).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x \setminus_{\mathtt{in}} E \subseteq x \setminus_{\mathtt{in}} e.$

<u>Beweis</u> **220-8** `h)`

`1.1:` Aus →) “$E \subseteq e$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$.

`1.2:` Via **220-7** gilt: $x \Delta_{\mathtt{in}}\, E = E \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$.

`1.3:` Via **220-7** gilt: $e \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x = x \Delta_{\mathtt{in}}\, e$.

`2:` Aus `1.2`“$x \Delta_{\mathtt{in}}\, E = E \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$” und
aus `1.1`“$E \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$”
folgt: $x \Delta_{\mathtt{in}}\, E \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$.

`3:` Aus `2`“$x \Delta_{\mathtt{in}}\, E \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x$” und
aus `1.3`“$e \,{}_{\mathtt{ni}}\Delta\, x = x \Delta_{\mathtt{in}}\, e$”
folgt: $x \Delta_{\mathtt{in}}\, E \subseteq x \Delta_{\mathtt{in}}\, e$.

$\square$

220-9. Aus $E \subseteq e$ folgt unter anderem $D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} E \subseteq D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} e$:

220-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $E \subseteq e$.

Dann folgt:

a) $E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D$.

b) $E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D$.

c) $E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D$.

d) $E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} D \subseteq e \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} D$.

e) $D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} E \subseteq D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} e$.

f) $D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} E \subseteq D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} e$.

g) $D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} E \subseteq D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} e$.

h) $D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} E \subseteq D \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} e$.

Beweis **220-9** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad \alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D.$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D$”
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi).$$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus →)“$E \subseteq e$”
folgt via **0-4**: $\qquad \Omega \in e.$

`4:` Aus `3`“$\Omega \in e$” und
aus `2`“$\ldots \Psi \in D \ldots$”
folgt via **220-6**: $\qquad \Omega \cup \Psi \in e \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D.$

`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega \cup \Psi$” und
aus `4`“$\Omega \cup \Psi \in e \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D$”
folgt: $\qquad \alpha \in e \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D.$

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in E \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D) \Rightarrow (\alpha \in e \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\qquad E \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D \subseteq e \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; D.$

<u>Beweis</u> **220-9** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D.$

2: Aus Thema1 "$\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \cap \Psi).$$

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

4: Aus 3 "$\Omega \in e$" und
aus 2 "$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \cap \Psi \in e\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D.$

5: Aus 2 "$\ldots \alpha = \Omega \cap \Psi$" und
aus 4 "$\Omega \cap \Psi \in e\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D$"
folgt: $\alpha \in e\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D.$

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D) \Rightarrow (\alpha \in e\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D \subseteq e\ {}_{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D.$

Beweis **220-9** `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in E\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \setminus \Psi).$$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus →) "$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

`4:` Aus `3`"$\Omega \in e$" und
aus `2`"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \setminus \Psi \in e\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D.$

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \setminus \Psi$" und
aus `4`"$\Omega \setminus \Psi \in e\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D$"
folgt: $\alpha \in e\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D) \Rightarrow (\alpha \in e\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D \subseteq e\ _{\texttt{ni}}\backslash_{\texttt{in}}\ D.$

<u>Beweis</u> **220-9** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \Delta \Psi).$$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus $\rightarrow$)"$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

`4:` Aus `3`"$\Omega \in e$" und
aus `2`"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \Delta \Psi \in e \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D.$

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \Delta \Psi$" und
aus `4`"$\Omega \Delta \Psi \in e \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D$"
folgt: $\alpha \in e \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D) \Rightarrow (\alpha \in e \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D \subseteq e \,_{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\, D.$

`e)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$)"$E \subseteq e$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D \subseteq e \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D.$

`1.2:` Via **220-7** gilt: $D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, E = E \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D.$

`1.3:` Via **220-7** gilt: $e \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D = D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, e.$

`2:` Aus `1.2`"$D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, E = E \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D$" und
aus `1.1`"$E \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D \subseteq e \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D$"
folgt: $D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, E \subseteq e \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, E.$

`3:` Aus `2`"$D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, E \subseteq e \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, E$" und
aus `1.3`"$e \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, D = D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, e$"
folgt: $D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, E \subseteq D \,_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\, e.$

Beweis **220-9** `f)`

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$E \subseteq e$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D \subseteq e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D.$

`1.2:` Via **220-7** gilt: $D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; E = E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D.$

`1.3:` Via **220-7** gilt: $e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D = D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; e.$

`2:` Aus `1.2`"$D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; E = E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D$" und
aus `1.1`"$E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D \subseteq e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D$"
folgt: $D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; E \subseteq e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; E.$

`3:` Aus `2`"$D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; E \subseteq e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; E$" und
aus `1.3`"$e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; D = D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; e$"
folgt: $D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; E \subseteq D \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}}\; e.$

`g)`

$\boxed{\mathtt{Thema1}}$ $\alpha \in E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D.$

`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D$"
folgt via **220-6**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\alpha = \Omega \Delta \Psi).$$

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus $\rightarrow)$ "$E \subseteq e$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in e.$

`4:` Aus `3`"$\Omega \in e$" und
aus `2`"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \Delta \Psi \in e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D.$

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \Delta \Psi$" und
aus `4`"$\Omega \Delta \Psi \in e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D$"
folgt: $\alpha \in e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D) \Rightarrow (\alpha \in e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D \subseteq e \;{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}}\; D.$

Beweis **220-9** h)

1.1: Aus →) "$E \subseteq e$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $E \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D$.

1.2: Via **220-7** gilt: $D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, E = E \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D$.

1.3: Via **220-7** gilt: $e \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D = D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, e$.

2: Aus 1.2 "$D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, E = E \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D$" und
aus 1.1 "$E \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D$"
folgt: $D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, E \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, E$.

3: Aus 2 "$D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, E \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, E$" und
aus 1.3 "$e \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D = D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, e$"
folgt: $D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, E \subseteq D \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, e$.

□

220-10. In direkter Anwendung von **220-9** ergibt sich das nunmehrige Resultat:

220-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $E \subseteq e$.

$\rightarrow$) $D \subseteq d$.

Dann folgt:

a) $E \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, d$.

b) $E \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, d$.

c) $E \,_{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\, d$.

d) $E \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\, d$.

Beweis **220-10** a)

1: Aus $\rightarrow$) "$E \subseteq e$"
folgt via **220-9**: $E \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D$.

2: Aus $\rightarrow$) "$D \subseteq d$"
folgt via **220-9**: $e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, d$.

3: Aus 1 "$E \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D$" und
aus 2 "$e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, d$"
folgt via **0-6**: $E \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, d$.

b)

1: Aus $\rightarrow$) "$E \subseteq e$"
folgt via **220-9**: $E \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D$.

2: Aus $\rightarrow$) "$D \subseteq d$"
folgt via **220-9**: $e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, d$.

3: Aus 1 "$E \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D$" und
aus 2 "$e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, d$"
folgt via **0-6**: $E \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, D \subseteq e \,_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\, d$.

<u>Beweis</u> **220-10** `c)`

`1:` Aus →) “$E \subseteq e$”
folgt via **220-9**: $E \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus →) “$D \subseteq d$”
folgt via **220-9**: $e \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} d.$

`3:` Aus `1`“$E \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D$” und
aus `2`“$e \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} d$”
folgt via **0-6**: $E \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} d.$

`d)`

`1:` Aus →) “$E \subseteq e$”
folgt via **220-9**: $E \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D.$

`2:` Aus →) “$D \subseteq d$”
folgt via **220-9**: $e \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} d.$

`3:` Aus `1`“$E \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D$” und
aus `2`“$e \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} d$”
folgt via **0-6**: $E \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} D \subseteq e \;_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}} d.$

□

220-11. Erwartungsgemäß spielt 0 als x oder E bei den in **220-1(Def)** vorgestellten Klassen eine Sonderrolle:

220-11(Satz)

a) *“$0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x = 0$” und “$E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0 = E$”.*

b) $0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cap x = 0$.

c) *“$E \,_{\mathtt{ni}}\!\cap 0 = \{0\}$” genau dann, wenn “$0 \neq E$”.*

d) $0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cap 0 = 0$.

e) *“$0 \,_{\mathtt{ni}}\!\setminus x = 0$” und “$E \,_{\mathtt{ni}}\!\setminus 0 = E$”.*

f) *“$0 \,_{\mathtt{ni}}\!\Delta\, x = 0$” und “$E \,_{\mathtt{ni}}\!\Delta\, 0 = E$”.*

Beweis **220-11** a)

`Thema1.1` $\alpha \in 0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x$.

2: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in 0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = 0 \cup x)$.

3: Es gilt 2“$\ldots \Omega \in 0 \ldots$”.
Via **0-19** gilt “$\Omega \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x) \Rightarrow (\alpha \notin 0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x)$.

Konsequenz via **0-19**: $\boxed{0 \,_{\mathtt{ni}}\!\cup x = 0}$

...

<u>Beweis **220-11**</u> `a)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0$"
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cup 0).$

`3:` Via **2-17** gilt: $\Omega \cup 0 = \Omega.$

`4:` Aus `3`"$\Omega \cup 0 = \Omega$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt: $\Omega \cup 0 \in E.$

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \cup 0$" und
aus `4`"$\Omega \cup 0 \in E$"
folgt: $\alpha \in E.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0) \Rightarrow (\alpha \in E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` "$E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0 \subseteq E$"

`Thema1.3` $\alpha \in E.$

`2:` Via **2-17** gilt: $\alpha \cup 0 = \alpha.$

`3:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in E$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via **220-4**: $\alpha \cup 0 \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0.$

`4:` Aus `3`"$\alpha \cup 0 \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0$" und
aus `2`"$\alpha \cup 0 = \alpha$"
folgt: $\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$E \subseteq E \,_{\mathtt{ni}}\!\cup 0$"

...

Beweis **220-11** `a)`

...

2: Aus `A1` gleich "$E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup 0 \subseteq E$" und
aus `A2` gleich "$E \subseteq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup 0$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup 0 = E}$

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in 0 \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x.$

2: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in 0 \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x$"
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = 0 \cap x).$

3: Es gilt 2"$\ldots \Omega \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0 \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0 \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x) \Rightarrow (\alpha \notin 0 \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x).$

Konsequenz via **0-19**: $\boxed{0 \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x = 0}$

`c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0 = \{0\}.$

1: Aus **1-5**"$0 \in \{0\}$" und
aus `VS` gleich "$E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0 = \{0\}$"
folgt: $0 \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0.$

2: Aus 1"$0 \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0$"
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 = \Omega \cap 0).$

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E.$

<u>Beweis **220-11**</u> `c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \neq E.$

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq E$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E.$

`2:` Aus `1`“$\ldots \Omega \in E$”
folgt via **220-4**: $\Omega \cap 0 \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0.$

`3:` Via **2-17** gilt: $\Omega \cap 0 = 0.$

`4.1:` Aus `2`“$\Omega \cap 0 \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0$” und
aus `3`“$\Omega \cap 0 = 0$”
folgt: $0 \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0.$

`Thema4.2` $\alpha \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0.$

`5:` Aus `Thema4.2`“$\alpha \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \cap 0).$

`6:` Via **2-17** gilt: $\Omega \cap 0 = 0.$

`7:` Aus `5`“$\ldots \alpha = \Omega \cap 0$” und
aus `6`“$\Omega \cap 0 = 0$”
folgt: $\alpha = 0.$

Ergo `Thema4.2`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0) \Rightarrow (\alpha = 0)$”

`5:` Aus `4.1`“$0 \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0) \Rightarrow (\alpha = 0)$”
folgt via **174-1**: $E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0 = \{0\}.$

`d)`

Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0 \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0 = 0.$

<u>Beweis **220-11**</u> `e)`

`Thema1.1` $\alpha \in 0 \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus x.$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in 0 \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus x$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = 0 \setminus x).$

`3:` Es gilt `2`“$\ldots \Omega \in 0 \ldots$”.
Via **0-19** gilt “$\Omega \notin 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0 \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0 \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus x) \Rightarrow (\alpha \notin 0 \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus x).$

Konsequenz via **0-19**: $\boxed{0 \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus x = 0}$

`Thema1.2` $\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus 0.$

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus 0$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \setminus 0).$

`3:` Via **5-11** gilt: $\Omega \setminus 0 = \Omega.$

`4:` Aus `3`“$\Omega \setminus 0 = \Omega$” und
aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt: $\Omega \setminus 0 \in E.$

`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = \Omega \setminus 0$” und
aus `4`“$\Omega \setminus 0 \in E$”
folgt: $\alpha \in E.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus 0) \Rightarrow (\alpha \in E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$E \,{}_{\texttt{ni}}\!\setminus 0 \subseteq E$”

...

Beweis **220-11** `e)`

...

`Thema1.3` $\alpha \in E.$

2: Via **5-11** gilt: $\alpha \setminus 0 = \alpha.$

3: Aus `Thema1.3`"$\alpha \in E$"
folgt via **220-4**: $\alpha \setminus 0 \in E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0.$

4: Aus 3"$\alpha \setminus 0 \in E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0$" und
aus 2"$\alpha \setminus 0 = \alpha$"
folgt: $\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` "$E \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0$"

2: Aus `A1` gleich "$E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0 \subseteq E$" und
aus `A2` gleich "$E \subseteq E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{E\ _{\mathtt{ni}}\!\setminus 0 = E}$

`f)`

`Thema1.1` $\alpha \in 0\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x.$

2: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in 0\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x$"
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = 0 \Delta x).$

3: Es gilt 2"$\ldots \Omega \in 0 \ldots$".
Via **0-19** gilt "$\Omega \notin 0$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin 0\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 0\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x) \Rightarrow (\alpha \notin 0\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x).$

Konsequenz via **0-19**: $\boxed{0\ _{\mathtt{ni}}\Delta\ x = 0}$

...

<u>Beweis **220-11**</u> `f)`

...

`Thema1.2` $\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0.$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0$"
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = \Omega \Delta 0).$

`3:` $\Omega \Delta 0 \stackrel{\mathbf{FS}\boldsymbol{\Delta}}{=} 0 \Delta \Omega \stackrel{\mathbf{5-35}}{=} \Omega.$

`4:` Aus `3`"$\Omega \Delta 0 = \ldots = \Omega$" und
aus `2`"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt: $\Omega \Delta 0 \in E.$

`5:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \Omega \Delta 0$" und
aus `4`"$\Omega \Delta 0 \in E$"
folgt: $\alpha \in E.$

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0) \Rightarrow (\alpha \in E).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0 \subseteq E$"

`Thema1.3` $\alpha \in E.$

`2:` $\alpha \Delta 0 \stackrel{\mathbf{FS}\boldsymbol{\Delta}}{=} 0 \Delta \alpha \stackrel{\mathbf{5-35}}{=} \alpha.$

`3:` Aus `Thema1.3`"$\alpha \in E$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via **220-4**: $\alpha \Delta 0 \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0.$

`4:` Aus `3`"$\alpha \Delta 0 \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0$" und
aus `2`"$\alpha \Delta 0 = \ldots = \alpha$"
folgt: $\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0.$

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$E \subseteq E \,_{\mathtt{ni}}\Delta\, 0$"

...

<u>Beweis **220-11**</u> `f)`

...

`2:` Aus `A1` gleich "$E \ _{\mathtt{ni}}\Delta\ 0 \subseteq E$" und
aus `A2` gleich "$E \subseteq E \ _{\mathtt{ni}}\Delta\ 0$"

folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{E \ _{\mathtt{ni}}\Delta\ 0 = E}$

□

220-12. Erwartungsgemäß spielt 0 als x oder E bei den in **220-2(Def)** vorgestellten Klassen eine Sonderrolle:

220-12(Satz)

a) *"*$x \cup_{\mathtt{in}} 0 = 0$*" und "*$0 \cup_{\mathtt{in}} E = E$*".*

b) $x \cap_{\mathtt{in}} 0 = 0$*.*

c) *"*$0 \cap_{\mathtt{in}} E = \{0\}$*" genau dann, wenn "*$0 \neq E$*".*

d) $0 \cap_{\mathtt{in}} 0 = 0$*.*

e) *"*$x \setminus_{\mathtt{in}} 0 = 0$*".*

f) *"*$0 \setminus_{\mathtt{in}} E = \{0\}$*" genau dann, wenn "*$0 \neq E$*".*

g) *"*$0 \setminus_{\mathtt{in}} 0 = 0$*".*

h) *"*$x \Delta_{\mathtt{in}} 0 = 0$*" und "*$0 \Delta_{\mathtt{in}} E = E$*".*

Beweis **220-12** a)

1.1: $x \cup_{\mathtt{in}} 0 \overset{\mathbf{220-7}}{=} 0 \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup x \overset{\mathbf{220-11}}{=} 0.$

1.2: $0 \cup_{\mathtt{in}} E \overset{\mathbf{220-7}}{=} E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup 0 \overset{\mathbf{220-11}}{=} E.$

2: Aus 1.1 "$x \cup_{\mathtt{in}} 0 = \ldots = 0$" und
aus 1.2 "$0 \cup_{\mathtt{in}} E = \ldots = E$"
folgt: $(x \cup_{\mathtt{in}} 0 = 0) \wedge (0 \cup_{\mathtt{in}} E = E).$

b)

1: $x \cap_{\mathtt{in}} 0 \overset{\mathbf{220-7}}{=} 0 \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap x \overset{\mathbf{220-11}}{=} 0.$

2: Aus 1
folgt: $x \cap_{\mathtt{in}} 0 = 0.$

c)

1.1: Via **220-7** gilt: $0 \cap_{\mathtt{in}} E = E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0.$

1.2: Via **220-11** gilt: $(E \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cap 0 = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq E)$

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $(0 \cap_{\mathtt{in}} E = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq E).$

<u>Beweis</u> **220-12** `d)`

Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0 \cap_{\mathtt{in}} 0 = 0.$

`e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} 0.$

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} 0$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in 0) \wedge (\alpha = x \setminus \Omega).$

`3:` Es gilt `2`“$\ldots \Omega \in 0 \ldots$” .
Via **0-19** gilt “$\Omega \notin 0$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin x \setminus_{\mathtt{in}} 0.$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \setminus_{\mathtt{in}} 0) \Rightarrow (\alpha \notin x \setminus_{\mathtt{in}} 0).$

Konsequenz via **0-19**: $\boxed{x \setminus_{\mathtt{in}} 0 = 0}$

`f)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 \setminus_{\mathtt{in}} E = \{0\}.$

`1:` Aus **1-5**“$0 \in \{0\}$” und
aus `VS` gleich “$0 \setminus_{\mathtt{in}} E = \{0\}$”
folgt: $0 \in 0 \setminus_{\mathtt{in}} E.$

`2:` Aus `1`“$0 \in 0 \setminus_{\mathtt{in}} E$”
folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (0 = 0 \setminus \Omega).$

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in E \ldots$”
folgt via **0-20**: $0 \neq E.$

<u>Beweis **220-12** `f)`</u> $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \neq E$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq E$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`2:` Aus $0\mathcal{U}$**Axiom**“0 Menge” und
aus `1`“$\ldots \Omega \in E$”
folgt via **220-5**: $0 \setminus \Omega \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E$.

`3:` Via **5-11** gilt: $0 \setminus \Omega = 0$.

`4.1:` Aus `2`“$0 \setminus \Omega \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E$” und
aus `3`“$0 \setminus \Omega = 0$”
folgt: $0 \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E$.

> `Thema4.2` $\alpha \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E$.
>
> `5:` Aus `Thema4.2`“$\alpha \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E$”
> folgt via **220-4**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = 0 \setminus \Omega)$.
>
> `6:` Via **5-11** gilt: $0 \setminus \Omega = 0$.
>
> `7:` Aus `5`“$\ldots \alpha = 0 \setminus \Omega$” und
> aus `6`“$0 \setminus \Omega = 0$”
> folgt: $\alpha = 0$.

Ergo `Thema4.2`: `A1` | “$\forall \alpha : (\alpha \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E) \Rightarrow (\alpha = 0)$”

`5:` Aus `4.1`“$0 \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in 0 \setminus_{\texttt{in}} E) \Rightarrow (\alpha = 0)$”
folgt via **174-1**: $0 \setminus_{\texttt{in}} E = \{0\}$.

`g)`

Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $0 \setminus_{\texttt{in}} 0 = 0$.

`h)`

`1.1:` $x \Delta_{\texttt{in}} 0 \stackrel{\textbf{220-7}}{=} 0 \;_{\texttt{ni}}\Delta\; x \stackrel{\textbf{220-11}}{=} 0$.

`1.2:` $0 \Delta_{\texttt{in}} E \stackrel{\textbf{220-7}}{=} E \;_{\texttt{ni}}\Delta\; 0 \stackrel{\textbf{220-11}}{=} E$.

`2:` Aus `1.1`“$x \Delta_{\texttt{in}} 0 = \ldots = 0$” und
aus `1.2`“$0 \Delta_{\texttt{in}} E = \ldots = E$”
folgt: $(x \Delta_{\texttt{in}} 0 = 0) \wedge (0 \Delta_{\texttt{in}} E = E)$.

$\square$

220-13. Nun werden $E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$ und die weiteren, in **220-3(Def)** vorgestellten Klassen auf ungleich 0 Sein untersucht:

<u>**220-13(Satz)**</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq E, D$.

`ii)` $0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$.

`iii)` $0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$.

`iv)` $0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\ D$.

`v)` $0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D$.

<u>Beweis **220-13**</u> $\boxed{\boxed{\mathtt{i)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq E, D$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E \dots$" folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \dots D$" folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in D$.

`2:` Aus `1.1`"$\dots \Omega \in E$" und aus `1.2`"$\dots \Psi \in D$" folgt via **220-6**: $\Omega \cup \Psi \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$.

`3:` Aus `2`"$\Omega \cup \Psi \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$" folgt via **0-20**: $0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$.

$\boxed{\boxed{\mathtt{ii)} \Rightarrow \mathtt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$" folgt via **0-20**: $\exists \Phi : \Phi \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$.

`2:` Aus `1`"$\dots \Phi \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D$" folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\Phi = \Omega \cup \Psi)$.

`3:` Aus `2`"$\dots \Omega \in E \dots$" und aus `3`"$\dots \Psi \in D \dots$" folgt via **220-6**: $\Omega \cap \Psi \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$.

`4:` Aus `3`"$\Omega \cap \Psi \in E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$" folgt via **0-20**: $0 \neq E\ {}_{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D$.

<u>Beweis **220-13**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **0-20**: $\exists \Phi : \Phi \in E\ _{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D$.

2: Aus 1"$\ldots \Phi \in E\ _{\texttt{ni}}\cap_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\Phi = \Omega \cap \Psi)$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 3"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \setminus \Psi \in E\ _{\texttt{ni}}\setminus_{\texttt{in}}\ D$.

4: Aus 3"$\Omega \setminus \Psi \in E\ _{\texttt{ni}}\setminus_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\setminus_{\texttt{in}}\ D$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich $0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\setminus_{\texttt{in}}\ D$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\setminus_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **0-20**: $\exists \Phi : \Phi \in E\ _{\texttt{ni}}\setminus_{\texttt{in}}\ D$.

2: Aus 1"$\ldots \Phi \in E\ _{\texttt{ni}}\setminus_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\Phi = \Omega \setminus \Psi)$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 3"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **220-6**: $\Omega \Delta \Psi \in E\ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$.

4: Aus 3"$\Omega \Delta \Psi \in E\ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$.

1: Aus VS gleich "$0 \neq E\ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **0-20**: $\exists \Phi : \Phi \in E\ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$.

2: Aus 1"$\ldots \Phi \in E\ _{\texttt{ni}}\Delta_{\texttt{in}}\ D$"
folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge (\Psi \in D) \wedge (\Phi = \Omega \Delta \Psi)$.

3.1: Aus 2"$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt via **0-20**: $\boxed{0 \neq E}$

3.2: Aus 2"$\ldots \Psi \in D \ldots$"
folgt via **0-20**: $\boxed{0 \neq D}$

□

220-14. Via Negation ergibt sich aus **220-13** vorliegendes Kriterium unter anderem für $E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D=0$:

220-14(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$E=0$" oder "$D=0$".*

`ii)` $E\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D=0$.

`iii)` $E\ _{\mathtt{ni}}\cap_{\mathtt{in}}\ D=0$.

`iv)` $E\ _{\mathtt{ni}}\setminus_{\mathtt{in}}\ D=0$.

`v)` $E\ _{\mathtt{ni}}\Delta_{\mathtt{in}}\ D=0$.

Beweis **220-14**

1: Via **220-13** gilt:

$$(0 \neq E) \wedge (0 \neq D)$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} D.$$

2: Aus 1
folgt:

$$\neg((0 \neq E) \wedge (0 \neq D))$$
$$\Leftrightarrow \quad \neg(0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D)$$
$$\Leftrightarrow \quad \neg(0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D)$$
$$\Leftrightarrow \quad \neg(0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D)$$
$$\Leftrightarrow \quad \neg(0 \neq E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} D).$$

3: Aus 2
folgt:

$$(\neg(0 \neq E)) \vee (\neg(0 \neq D))$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} D = 0.$$

4: Aus 3
folgt:

$$(E = 0) \vee (D = 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} D = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cap_{\mathtt{in}} D = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\setminus_{\mathtt{in}} D = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad E \,{}_{\mathtt{ni}}\!\Delta_{\mathtt{in}} D = 0.$$

$\square$

$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y).$$

Ersterstellung: 28/08/12 **Letzte Änderung: 22/10/12**

221-1. Nun wird das "Element-Sein" in $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$ thematisiert:

<u>**221-1(Satz)**</u>

a) *Aus* "$p \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"

folgt "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ endlich}) \wedge (\Psi \subseteq y) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (p = \Omega \cup \Psi)$".

b) *Aus* "$A \subseteq x$" *und* "A *endlich*" *und* "$B \subseteq y$" *und* "B *Menge*"

folgt "$A \cup B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$".

<u>Beweis **221-1**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"
folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \wedge (\Psi \in \mathcal{P}(y)) \wedge (p = \Omega \cup \Psi)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ldots$"
folgt via **32-4**: $(\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ endlich})$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Psi \in \mathcal{P}(y) \ldots$"
folgt via **0-26**: $(\Psi \subseteq y) \wedge (\Psi \text{ Menge})$.

`3:` Aus `1`"$\exists \Omega, \Psi \ldots$",
aus `2.1`"$(\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ endlich})$" und
aus `2.2`"$(\Psi \subseteq y) \wedge (\Psi \text{ Menge})$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ endlich}) \wedge (\Psi \subseteq y) \wedge (\Psi \text{ Menge})$.

`b)` `VS` gleich $(A \subseteq x) \wedge (A \text{ endlich}) \wedge (B \subseteq y) \wedge (B \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$A \subseteq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich…"
folgt via **32-4**: $A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots B \subseteq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots B$ Menge"
foglgt via **0-26**: $B \in \mathcal{P}(y)$.

`2:` Aus `1.1`"$A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" und
aus `1.2`"$B \in \mathcal{P}(y)$"
folgt via **220-6**: $A \cup B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

□

221-2. Hier werden unter anderem spezielle Mengen, die stets Elemente von $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$ sind, angegeben. Wegen $0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$ ist $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$ stets ungleich der leeren Menge:

221-2(Satz)

a) $0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$.

b) $0\neq\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$.

c) *Aus* “$C\subseteq D\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$” *folgt* “$C\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$”.

d) *Aus* “$C\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$”
folgt “$C\cap D, D\cap C, C\setminus D\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$”.

e) *Aus* “$C, D\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$
folgt “$C\cup D, D\cup C, C\Delta D, D\Delta C\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$”.

f) *Aus* “$A\subseteq x$” *und* “A *endlich*” *folgt* “$A\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$”.

g) *Aus* “$B\subseteq y$” *und* “B *Menge*” *folgt* “$B\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$”.

Beweis **221-2** ab)

1.1: Via **32-5** gilt: $0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

1.2: Via **0-28** gilt: $0\in\mathcal{P}(y)$.

2: Aus 1.1“$0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$” und
aus 1.2“$0\in\mathcal{P}(y)$”
folgt via **220-6**: $0\cup 0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$.

3: Via **2-17** gilt: $0\cup 0=0$.

4.a): Aus 2“$0\cup 0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$” und
aus 3“$0\cup 0=0$”
folgt: $0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$.

4.b): Aus 2“$0\cup 0\in\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$”
folgt via **0-20**: $0\neq\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(y)$.

Beweis **221-2** `c)` `VS` gleich $C \subseteq D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"
folgt via **221-1**:
$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ endlich}) \wedge (\Psi \subseteq y) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (D = \Omega \cup \Psi).$$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$C \subseteq D \ldots$" und
aus `1`"$\ldots D = \Omega \cup \Psi$"
folgt: $C \subseteq \Omega \cup \Psi.$

`2.2:` Via **2-7** gilt: $C \cap \Omega \subseteq \Omega.$

`2.3:` Via **2-7** gilt: $C \cap \Psi \subseteq \Psi.$

`3.1:` Aus `2.1`"$C \subseteq \Omega \cup \Psi$"
folgt via **2-10**: $C = C \cap (\Omega \cup \Psi).$

`3.2:` Aus `2.2`"$C \cap \Omega \subseteq \Omega$" und
aus `1`"$\ldots \Omega \subseteq x \ldots$"
folgt via **0-6**: $C \cap \Omega \subseteq x.$

`3.3:` Aus `2.2`"$C \cap \Omega \subseteq \Omega$" und
aus `1`"$\ldots \Omega$ endlich$\ldots$"
folgt via **213-5**: $C \cap \Omega$ endlich.

`3.4:` Aus `2.3`"$C \cap \Psi \subseteq \Psi$" und
aus `1`"$\ldots \Psi \subseteq y \ldots$"
folgt via **0-6**: $C \cap \Psi \subseteq y.$

`3.5:` Aus `2.3`"$C \cap \Psi \subseteq \Psi$" und
aus `1`"$\ldots \Psi$ Menge$\ldots$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $C \cap \Psi$ Menge.

`4.1:` Via **DG**$\cap\cup$ gilt: $C \cap (\Omega \cup \Psi) = (C \cap \Omega) \cup (C \cap \Psi).$

`4.2:` Aus `3.2`"$C \cap \Omega \subseteq x$",
aus `3.3`"$C \cap \Omega$ endlich",
aus `3.4`"$C \cap \Psi \subseteq y$" und
aus `3.5`"$C \cap \Psi$ Menge"
folgt via **221-1**: $(C \cap \Omega) \cup (C \cap \Psi) \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y).$

`5:` Aus `3.1`"$C = C \cap (\Omega \cup \Psi)$" und
aus `4.1`"$C \cap (\Omega \cup \Psi) = (C \cap \Omega) \cup (C \cap \Psi)$"
folgt: $C = (C \cap \Omega) \cup (C \cap \Psi).$

`6:` Aus `5`"$C = (C \cap \Omega) \cup (C \cap \Psi)$" und
aus `4.2`"$(C \cap \Omega) \cup (C \cap \Psi) \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"
folgt: $C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y).$

Beweis **221-2** `d)` `VS` gleich $C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $C \cap D \subseteq C$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $D \cap C \subseteq C$.

`1.3:` Via **5-5** gilt: $C \setminus D \subseteq C$.

`2.1:` Aus `1.1`“$C \cap D \subseteq C$” und
aus `VS` gleich “$C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{C \cap D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)}$

`2.2:` Aus `1.2`“$D \cap C \subseteq C$” und
aus `VS` gleich “$C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{D \cap C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)}$

`2.3:` Aus `1.3`“$C \setminus D \subseteq C$” und
aus `VS` gleich “$C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{C \setminus D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)}$

`e)` `VS` gleich $C, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$C \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$”
folgt via **221-1**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ endlich}) \wedge (\Psi \subseteq y) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (C = \Omega \cup \Psi)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$”
folgt via **221-1**:
$\exists \Gamma, \Phi : (\Gamma \subseteq x) \wedge (\Gamma \text{ endlich}) \wedge (\Phi \subseteq y) \wedge (\Phi \text{ Menge}) \wedge (D = \Gamma \cup \Phi)$.

`2.1:` Aus `1.1`“$\ldots C = \Omega \cup \Psi$” und
aus `1.2`“$\ldots D = \Gamma \cup \Phi$”
folgt: $C \cup D = (\Omega \cup \Psi) \cup (\Gamma \cup \Phi)$.

`2.2:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega \subseteq x \ldots$” und
aus `1.2`“$\ldots \Gamma \subseteq x \ldots$”
folgt via **2-12**: $\Omega \cup \Gamma \subseteq x$.

`2.3:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega$ endlich...” und
aus `1.2`“$\ldots \Gamma$ endlich...”
folgt via **213-5**: $\Omega \cup \Gamma$ endlich.

...

<u>Beweis **221-2**</u> `e) VS` gleich $C, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y)$.

...

`2.4:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi \subseteq y \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Phi \subseteq y \ldots$"
folgt via **2-12**: $\Psi \cup \Phi \subseteq y$.

`2.5:` Aus `1.1`"$\ldots \Psi$ Menge$\ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Phi$ Menge$\ldots$"
folgt via $\cup$**Axiom**: $\Psi \cup \Phi$ Menge.

`3.1:` Via **213-6** gilt: $(\Omega \cup \Psi) \cup (\Gamma \cup \Phi) = (\Omega \cup \Gamma) \cup (\Psi \cup \Phi)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\Omega \cup \Gamma \in E$",
aus `2.3`"$\Omega \cup \Gamma$ endlich",
aus `2.4`"$\Psi \cup \Phi \subseteq y$" und
aus `2.5`"$\Psi \cup \Phi$ Menge"
folgt via **221-1**: $(\Omega \cup \Gamma) \cup (\Psi \cup \Phi) \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y)$.

`4:` Aus `2.1`"$C \cup D = (\Omega \cup \Psi) \cup (\Gamma \cup \Phi)$" und
aus `3.1`"$(\Omega \cup \Psi) \cup (\Gamma \cup \Phi) = (\Omega \cup \Gamma) \cup (\Psi \cup \Phi)$"
folgt: $C \cup D = (\Omega \cup \Gamma) \cup (\Psi \cup \Phi)$.

`5:` Aus `4`"$C \cup D = (\Omega \cup \Gamma) \cup (\Psi \cup \Phi)$" und
aus `3.2`"$(\Omega \cup \Gamma) \cup (\Psi \cup \Phi) \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y)$"
folgt: $\boxed{C \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y)}$

`6.1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $D \cup C = C \cup D$.

`6.2:` Via **5-28** gilt: $C \Delta D \subseteq C \cup D$.

`6.3:` Via **5-28** gilt: $D \Delta C \subseteq C \cup D$.

...

Beweis **221-2** `e)` `VS` gleich $C, D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

...

`7.1:` Aus `6.1`"$D \cup C = C \cup D$" und
aus `5`"$C \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"
folgt: $\boxed{D \cup C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)}$

`7.2:` Aus `6.2`"$C \Delta D \subseteq C \cup D$" und
aus `5`"$C \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{C \Delta D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)}$

`7.3:` Aus `6.3`"$D \Delta C \subseteq C \cup D$" und
aus `5`"$C \cup D \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{D \Delta C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)}$

`f)` `VS` gleich $(A \subseteq x) \wedge (A \text{ endlich})$.

`1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$A \subseteq x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich",
aus `1`"$0 \subseteq y$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt via **221-1**:

$A \cup 0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

`3:` Via **2-17** gilt: $A \cup 0 = A$.

`4:` Aus `3`"$A \cup 0 = A$" und
aus `2`"$A \cup 0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$"
folgt:

$A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

<u>Beweis</u> **221-2** `g)` `VS` gleich $(B \subseteq y) \wedge (B \text{ Menge})$.

`1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq x$.

`2:` Aus `1`"$0 \subseteq x$",
aus **EndlichkeitsAxiom**"0 endlich",
aus `VS` gleich "$B \subseteq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots B$ Menge"
folgt via **221-1**:

$$0 \cup B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(y).$$

`3:` Via **2-17** gilt: $0 \cup B = B$.

`4:` Aus `3`"$0 \cup B = B$" und
aus `2`"$0 \cup B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(y)$"
folgt:

$$B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(y).$$

$\square$

221-3. Hier werden einfache Inklusions-Eigenschaften von $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y)$ angegeben:

221-3(Satz)

a) $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y)$.

b) $\mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y)$.

c) $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y)$.

d) *Aus* “$x \subseteq z$” *und* “$y \subseteq z$” *folgt* “$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(z)$”.

e) $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

Beweis **221-3** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$”
folgt via **32-4**: $(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ endlich})$.

`3:` Aus 2“$(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ endlich})$”
folgt via **221-2**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

`b)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathcal{P}(y)$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{P}(y)$”
folgt via **0-26**: $(\alpha \subseteq y) \wedge (\alpha \text{ Menge})$.

`3:` Aus 2“$(\alpha \subseteq y) \wedge (\alpha \text{ Menge})$”
folgt via **221-2**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

`c)`

`1:` Via **213-11** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1`“$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$”
folgt via **220-9**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

<u>Beweis **221-3**</u> `d)` `VS` gleich $(x \subseteq z) \wedge (y \subseteq z)$.

`Thema1` $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$”
folgt via **221-1**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ endlich}) \wedge (\Psi \subseteq y)$
$\wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi)$.

`3.1:` Aus 2“$\ldots \Omega \subseteq x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq z \ldots$”
folgt via **0-6**: $\Omega \subseteq z$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots \Psi \subseteq y \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \subseteq z$”
folgt via **0-6**: $\Psi \subseteq z$.

`3.3:` Aus 2“$\ldots \Omega$ endlich$\ldots$”
folgt via **28-6**: Ω Menge.

`4.1:` Aus `3.1`“$\Omega \subseteq z$” und
aus `3.2`“$\Psi \subseteq z$”
folgt via **2-12**: $\Omega \cup \Psi \subseteq z$.

`4.2:` Aus `3.3`“Ω Menge” und
aus 2“$\ldots \Psi$ Menge$\ldots$”
folgt via $\cup$**Axiom**: $\Omega \cup \Psi$ Menge.

`5:` Aus `4.1`“$\Omega \cup \Psi \subseteq z$” und
aus `4.2`“$\Omega \cup \Psi$ Menge”
folgt via **0-26**: $\Omega \cup \Psi \in \mathcal{P}(z)$.

`6:` Aus 2“$\ldots \alpha = \Omega \cup \Psi$” und
aus 5“$\Omega \cup \Psi \in \mathcal{P}(z)$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}(z)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(z))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(z)$.

Beweis **221-3** `e)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

$\boxed{\texttt{Thema1.3}}$ $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)$.

`2.1:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.3`“$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)$”
folgt via **32-4**: $(\alpha \subseteq x \cup y) \wedge (\alpha \text{ endlich})$.

`3.1:` Via **2-7** gilt: $\alpha \cap x \subseteq x$.

`3.2:` Via **2-7** gilt: $\alpha \cap y \subseteq y$.

`3.3:` Aus `2.2`“$\ldots \alpha$ endlich”
folgt via **213-5**: $\alpha \cap x$ endlich.

`3.4:` Aus `2.1`“α Menge”
folgt via **2-24**: $\alpha \cap y$ Menge.

`3.5:` Aus `2.2`“$\alpha \subseteq x \cup y$”
folgt via **2-10**: $\alpha \cap (x \cup y) = \alpha$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\alpha \cap x \subseteq x$” und
aus `3.3`“$\alpha \cap x$ endlich”
folgt via **32-4**: $\alpha \cap x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\alpha \cap y \subseteq y$” und
aus `3.4`“$\alpha \cap y$ Menge”
folgt via **0-26**: $\alpha \cap y \in \mathcal{P}(y)$.

`5:` Aus `4.1`“$\alpha \cap x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$” und
aus `4.2`“$\alpha \cap y \in \mathcal{P}(y)$”
folgt via **220-6**: $(\alpha \cap x) \cup (\alpha \cap y) \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

`6:` $\alpha \stackrel{\texttt{3.5}}{=} \alpha \cap (x \cup y) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (\alpha \cap x) \cup (\alpha \cap y)$.

`7:` Aus `6`“$\alpha = \ldots = (\alpha \cap x) \cup (\alpha \cap y)$” und
aus `5`“$(\alpha \cap x) \cup (\alpha \cap y) \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$”
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\; \text{“}\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)\text{”}}$

...

Beweis **221-3** ...

`2:` Aus `1.1`“$x \subseteq x \cup y$” und
aus `1.2`“$y \subseteq x \cup y$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

`3:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y)$” und
aus `2`“$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$”
folgt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

$\square$

221-4. Die vorliegenden Aussagen erleichtert im Folgenden Einiges:

221-4(Satz)

a) *Aus* "$p \in x \cup y$" *folgt* "$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$".

b) *Aus* "$z \subseteq x \cup y$" *und* "z *endlich*" *folgt* "$z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(z)$".

c) *Aus* "$z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$" *folgt* "$z \subseteq x \cup y$".

Beweis **221-4** a) VS gleich $p \in x \cup y$.

1: Aus VS gleich "$p \in x \cup y$"
folgt via **32-5**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)$.

2: Via **221-3** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

3: Aus 1"$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)$" und
aus 2"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$"
folgt via **0-4**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

b) VS gleich $(z \subseteq x \cup y) \wedge (z \text{ endlich})$.

1: Aus VS gleich "$z \subseteq x \cup y \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots z$ endlich"
folgt via **32-4**: $z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)$.

2: Via **221-3** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

3: Aus 2"$z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y)$" und
aus 2"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x \cup y) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$"
folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

c) VS gleich $z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$.

1: Via **221-3** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

2: Aus VS gleich "$z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y)$" und
aus 1"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\, \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$"
folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}(x \cup y)$.

3: Aus 2"$z \in \mathcal{P}(x \cup y)$"
folgt via **0-26**: $z \subseteq x \cup y$.

□

$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \; {}_{\mathtt{ni}}{\cup}_{\mathtt{in}} \; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]).$$

Ersterstellung: 28/08/12 **Letzte Änderung: 22/01/13**

222-1. Hier wird eine einfache hinreichende Bedingung für $E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$ angegeben. Die Klasse o *muss nicht* Element von Q sein:

222-1(Satz)

a) *Aus "$E \subseteq y^{-1}[\{o\} \cup Q]$" und "$E$ endlich" folgt "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$".*

b) *Aus "$E \subseteq y^{-1}[Q]$" und "E endlich" folgt "$E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$".*

<u>Beweis</u> **222-1** `a)` `VS` gleich $(E \subseteq y^{-1}[\{o\} \cup Q]) \wedge (E \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq y^{-1}[\{o\} \cup Q] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via **32-4**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[\{o\} \cup Q])$.

`2:`

$$\mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[\{o\} \cup Q])$$
$$\stackrel{\mathbf{5-22}}{=} \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[\{o\} \cup (Q \setminus \{o\})])$$
$$\stackrel{\mathbf{9-8}}{=} \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[\{o\}] \cup y^{-1}[Q \setminus \{o\}])$$
$$\stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}] \cup y^{-1}[\{o\}])$$
$$\stackrel{\mathbf{221-3}}{\subseteq} \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}].$$

`3:` Aus `1`"$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[\{o\} \cup Q])$" und
aus `2`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[\{o\} \cup Q]) \ldots \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}] \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$"
folgt via **0-4**: $E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$.

`b)` `VS` gleich $(E \subseteq y^{-1}[Q]) \wedge (E \text{ endlich})$.

`1:` Via **2-7** gilt: $Q \subseteq \{o\} \cup Q$.

`2:` Aus `1`"$Q \subseteq \{o\} \cup Q$"
folgt via **8-9**: $y^{-1}[Q] \subseteq y^{-1}[\{o\} \cup Q]$.

`3:` Aus `VS` gleich "$E \subseteq y^{-1}[Q]$" und
aus `2`"$y^{-1}[Q] \subseteq y^{-1}[\{o\} \cup Q]$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq y^{-1}[\{o\} \cup Q]$.

`4:` Aus `3`"$E \subseteq y^{-1}[\{o\} \cup Q]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$.

□

222-2. Die Klasse $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$ ist stets TeilKlasse von $\mathsf{dom}\, y$, genauer, von $y^{-1}[\{o\} \cup (Q \setminus \{o\})]$, und in Spezialfällen - unter anderem wenn $o \in Q$ - eine TeilKlasse von $y^{-1}[Q]$. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c)`:

222-2(Satz)

`a)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\, y)$.

`b)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) \subseteq \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\} \cup Q])$.

`c)` *Aus "$o \in Q$" oder "o Unmenge"*
folgt "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) \subseteq \mathcal{P}(y^{-1}[Q])$".

Beweis **222-2** `b)`

`1:` Via **221-3** gilt:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}]\cup y^{-1}[\{o\}]).$$

`2:`
$$\mathcal{P}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}]\cup y^{-1}[\{o\}])$$
$$\stackrel{\mathbf{9-8}}{=}\mathcal{P}(y^{-1}[(Q\setminus\{o\})\cup\{o\}])$$
$$\stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=}\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})])$$
$$\stackrel{\mathbf{5-22}}{=}\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup Q]).$$

`3:` Aus `1`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$
$\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}]\cup y^{-1}[\{o\}])$“ und
aus `2`“$\mathcal{P}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}]\cup y^{-1}[\{o\}])=\ldots=\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup Q])$”
folgt:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup Q]).$$

`a)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})]).$$

`2:` Via **11-19** gilt: $y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})]\subseteq\mathsf{dom}\,y.$

`3:` Aus `2`“$y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})]\subseteq\mathsf{dom}\,y$”
folgt via **0-28**: $\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})]\subseteq\mathcal{P}(\mathsf{dom}\,y).$

`4:` Aus `1`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$
$\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})])$” und
aus `3`“$\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})])\subseteq\mathcal{P}(\mathsf{dom}\,y)$”
folgt via **0-6**:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])\subseteq\mathcal{P}(\mathsf{dom}\,y).$$

`c)` `VS` gleich $(o\in Q)\vee(o\text{ Unmenge}).$

`1:` Aus `VS` gleich “$(o\in Q)\vee(o\text{ Unmenge})$”
folgt via **5-19**: $Q=\{o\}\cup(Q\setminus\{o\}).$

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})]).$$

`3:` Aus `2`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$
$\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})])$” und
aus `1`“$Q=\{o\}\cup(Q\setminus\{o\})$”
folgt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])\subseteq\mathcal{P}(y^{-1}[Q]).$

$\square$

222-3. Es steht ein einfaches Kriterium für $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$ zur Verfügung:

222-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$.

`ii)` *"*$o \notin \mathsf{ran}\, y$*" und "*$Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0$*".*

`iii)` *"*$y^{-1}[\{o\}] = 0$*" und "*$y^{-1}[Q] = 0$*".*

Beweis **222-3** $\boxed{\boxed{\mathtt{i)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$.

`1.1:` Es gilt: $(o \in \mathsf{ran}\, y) \vee (o \notin \mathsf{ran}\, y)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $o \in \mathsf{ran}\, y$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall` "$o \in \mathsf{ran}\, y$" folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, o) \in y$.

`3:` Aus `2` "$\ldots (\Omega, o) \in y$" folgt via **12-7**: $\Omega \in y^{-1}[\{o\}]$.

`4.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{\Omega\}$ Menge.

`4.2:` Aus `3` "$\Omega \in y^{-1}[\{o\}]$" folgt via **174-1**: $0 \neq \{\Omega\} \subseteq y^{-1}[\{o\}]$.

`5:` Aus `4.2` "$\ldots \{\Omega\} \subseteq y^{-1}[\{o\}]$" und aus `4.1` "$\{\Omega\}$ Menge" folgt via **221-2**: $\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$.

`6:` Aus `5` "$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$" und aus `VS` gleich "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q\setminus\{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$" folgt: $\{\Omega\} \in \{0\}$.

`7:` Aus `6` "$\{\Omega\} \in \{0\}$" folgt via **1-6**: $\{\Omega\} = 0$.

`8:` Es gilt `7` "$\{\Omega\} = 0$". Es gilt `4.2` "$0 \neq \{\Omega\} \ldots$". Ex falso quodlibet folgt: $o \notin \mathsf{ran}\, y$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{o \notin \mathsf{ran}\, y}$

...

Beweis **222-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $\mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$.

...

1.2: Es gilt: $(Q \cap \operatorname{ran} y = 0) \vee (0 \neq Q \cap \operatorname{ran} y)$.

wfFallunterscheidung

1.2.1.Fall $0 \neq Q \cap \operatorname{ran} y$.

2: Aus 1.2.1.Fall"$0 \neq Q \cap \operatorname{ran} y$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in Q \cap \operatorname{ran} y$.

3: Aus 2"$\ldots \Omega \in Q \cap \operatorname{ran} y$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in Q) \wedge (\Omega \in \operatorname{ran} y)$.

4.1: Aus 3"$\ldots \Omega \in Q \ldots$"
folgt via **1-8**: $\{\Omega\} \subseteq Q$.

4.2: Aus 3"$\ldots \Omega \in \operatorname{ran} y$"
folgt via **7-7**: $\exists \Psi : (\Psi, \Omega) \in y$.

5.1: Aus 4.1"$\{\Omega\} \subseteq Q$"
folgt via **8-9**: $y^{-1}[\{\Omega\}] \subseteq y^{-1}[Q]$.

5.2: Aus 4.2"$\ldots (\Psi, \Omega) \in y$"
folgt via **12-7**: $\Psi \in y^{-1}[\{\Omega\}]$.

6.1: Via **28-8** gilt: $\{\Psi\}$ endlich.

6.2: Aus 5.2"$\Psi \in y^{-1}[\{\Omega\}]$" und
aus 5.1"$y^{-1}[\{\Omega\}] \subseteq y^{-1}[Q]$"
folgt via **0-4**: $\Psi \in y^{-1}[Q]$.

7: Aus 6.2"$\Psi \in y^{-1}[Q]$"
folgt via **174-1**: $0 \neq \{\Psi\} \subseteq y^{-1}[Q]$.

8: Aus 7"$\ldots \{\Psi\} \subseteq y^{-1}[Q]$" und
aus 6.1"$\{\Psi\}$ endlich"
folgt via **222-1**: $\{\Psi\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$.

9: Aus 8"$\{\Psi\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$" und
aus VS gleich "$\mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$"
folgt: $\{\Psi\} \in \{0\}$.

10: Aus 9"$\{\Psi\} \in \{0\}$"
folgt via **1-6**: $\{\Psi\} = 0$.

11: Es gilt 10"$\{\Psi\} = 0$".
Es gilt 7"$0 \neq \{\Psi\} \ldots$".
Ex falso quodlibet folgt: $Q \cap \operatorname{ran} y = 0$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\boxed{Q \cap \operatorname{ran} y = 0}$

<u>Beweis **222-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(o \notin \mathsf{ran}\, y) \wedge (Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0)$.

`1.1:` Aus VS gleich "$o \notin \mathsf{ran}\, y \ldots$"

folgt via **12-12**: $\boxed{y^{-1}[\{o\}] = 0}$

`1.2:` Aus VS gleich "$\ldots Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0$"

folgt via **213-8**: $\boxed{y^{-1}[Q] = 0}$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(y^{-1}[\{o\}] = 0) \wedge (y^{-1}[Q] = 0)$.

`1.1:` Via **221-2** gilt:

$$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]).$$

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$"
folgt via **221-1**:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \wedge (\Psi \subseteq y^{-1}[\{o\}]) \wedge (\alpha = \Omega \cup \Psi)$.

`3.1:` Via **5-5** gilt: $Q \setminus \{o\} \subseteq Q$.

`3.2:` Aus 2"$\ldots \Psi \subseteq y^{-1}[\{o\}] \ldots$" und
aus VS gleich "$y^{-1}[\{o\}] = 0 \ldots$"
folgt: $\Psi \subseteq 0$.

`4.1:` Aus `3.1`"$Q \setminus \{o\} \subseteq Q$"
folgt via **8-9**: $y^{-1}[Q \setminus \{o\}] \subseteq y^{-1}[Q]$.

`4.2:` Aus `3.2`"$\Psi \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\Psi = 0$.

`5.1:` Aus 2"$\ldots \Omega \subseteq y^{-1}[Q \setminus \{o\}] \ldots$" und
aus `4.1`"$y^{-1}[Q \setminus \{o\}] \subseteq y^{-1}[Q]$"
folgt via **0-6**: $\Omega \subseteq y^{-1}[Q]$.

`5.2:` Aus 2"$\ldots \alpha = \Omega \cup \Psi$" und
aus `4.2`"$\Psi = 0$"
folgt: $\alpha = \Omega \cup 0$.

…

…

Beweis **222-3** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y^{-1}[\{o\}] = 0) \wedge (y^{-1}[Q] = 0)$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$.

...

`6.1:` Aus `5.1`"$\Omega \subseteq y^{-1}[Q]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y^{-1}[Q] = 0$"
folgt: $\Omega \subseteq 0$.

`6.2:` Via **2-17** gilt: $\Omega \cup 0 = \Omega$.

`7.1:` Aus `6.1`"$\Omega \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\Omega = 0$.

`7.2:` Aus `5.2`"$\alpha = \Omega \cup 0$" und
aus `6.2`"$\Omega \cup 0 = \Omega$"
folgt: $\alpha = \Omega$.

`8:` Aus `7.2` und
aus `7.1`
folgt: $\alpha = 0$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])) \Rightarrow (\alpha = 0)$"

`2:` Aus `1.1`"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}])) \Rightarrow (\alpha = 0)$"
folgt via **174-1**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$.

$\square$

222-4. Im Fall $o \in Q$ nimmt **222-3** einfachere Gestalt an:

222-4(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $o \in Q$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$.

`ii)` $Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0$.

`iii)` $y^{-1}[Q] = 0$.

Beweis **222-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}$"
folgt via **222-3**: $(o \notin \mathsf{ran}\, y) \wedge (Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$o \in Q$" und
aus `VS` gleich "$Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0$"
folgt via **161-1**: $o \notin \mathsf{ran}\, y$.

`2:` Aus `1` "$o \notin \mathsf{ran}\, y$" und
aus `VS` gleich "$Q \cap \mathsf{ran}\, y = 0$"
folgt via **222-3**: $(y^{-1}[\{o\}] = 0) \wedge (y^{-1}[Q] = 0)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $y^{-1}[Q] = 0$.

Beweis **222-4** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $y^{-1}[Q] = 0.$

1: Aus →) “$o \in Q$”
folgt via **1-8**: $\{o\} \subseteq Q.$

2: Aus 1“$\{o\} \subseteq Q$”
folgt via **8-9**: $y^{-1}[\{o\}] \subseteq y^{-1}[Q].$

3: Aus 2“$y^{-1}[\{o\}] \subseteq y^{-1}[Q]$” und
aus VS gleich “$y^{-1}[Q] = 0$”
folgt: $y^{-1}[\{o\}] \subseteq 0.$

4: Aus 3“$y^{-1}[\{o\}] \subseteq 0$”
folgt via **0-18**: $y^{-1}[\{o\}] = 0.$

5: Aus 4“$y^{-1}[\{o\}] = 0$” und
aus VS gleich “$y^{-1}[Q] = 0$”
folgt via **222-3**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y^{-1}[Q \setminus \{o\}]) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(y^{-1}[\{o\}]) = \{0\}.$

$\square$

Einiges über $\mathcal{P}(x)$.
Einiges über $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.
Einige Folgerungen aus $x \subseteq y \cup z$.
Aus $y \subseteq x \subseteq z \cup y$ folgt $z \cup x = z \cup y$.
$x \cup y \not\subseteq E$ genau dann, wenn $x \not\subseteq E$ oder $y \not\subseteq E$.
$E \not\subseteq x \cap y$ genau dann, wenn $E \not\subseteq x$ oder $E \not\subseteq y$.

Ersterstellung: 08/10/12 **Letzte Änderung: 02/07/13**

223-1. Nun wird Hinreichendes dafür angegeben, dass ungeordnete Paare und ungeordnete Tripel Elemente von $\mathcal{P}(x)$ und $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$ sind:

223-1(Satz)

a) *Aus* "$p, q \in x$" *folgt* "$\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$".

b) *Aus* "$p, q, r \in x$" *folgt* "$\{p, q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$".

Beweis **223-1** a) VS gleich $p, q \in x$.

1.1: Aus VS gleich "$p \ldots \in x$" und
aus VS gleich "$\ldots q \in x$"
folgt via **4-14**: $\{p, q\} \subseteq x$.

1.2: Via **28-8** gilt: $\{p, q\}$ endlich.

2: Aus 1.1 "$\{p, q\} \subseteq x$" und
aus 1.2 "$\{p, q\}$ endlich"
folgt via **32-4**: $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

b) VS gleich $p, q, r \in x$.

1.1: Aus VS gleich "$p, q \ldots \in x$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots r \in x$"
folgt via **32-5**: $\{r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

2: Aus 1.1 "$\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus 1.2 "$\{r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-5**: $\{p, q\} \cup \{r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

3: Via **213-3** gilt: $\{p, q, r\} = \{p, q\} \cup \{r\}$.

4: Aus 3 "$\{p, q, r\} = \{p, q\} \cup \{r\}$" und
aus 2 "$\{p, q\} \cup \{r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt: $\{p, q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

□

223-2. Hier wird Einiges über TeilKlassen von x, y für $x \cap y = 0$ ausgesagt:

223-2(Satz)

Aus "$x \cap y = 0$" *und* ...

a) ... *und* "$z \in \mathcal{P}(x)$" *und* "$w \in \mathcal{P}(y)$" *folgt* "$z \cap w = 0$".

b) ... *und* "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$w \in \mathcal{P}(y)$" *folgt* "$z \cap w = 0$".

c) ... *und* "$z \in \mathcal{P}(x)$" *und* "$w \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$" *folgt* "$z \cap w = 0$".

d) ... *und* "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *und* "$w \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$" *folgt* "$z \cap w = 0$".

Beweis **223-2** a) VS gleich $(x \cap y = 0) \wedge (z \in \mathcal{P}(x)) \wedge (w \in \mathcal{P}(y))$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots z \in \mathcal{P}(x) \ldots$"
folgt via **0-26**: $z \subseteq x$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots w \in \mathcal{P}(y)$"
folgt via **0-26**: $w \subseteq y$.

2: Aus 1.1"$z \subseteq x$" und
aus 1.2"$w \subseteq y$"
folgt via **2-13**: $z \cap w \subseteq x \cap y$.

3: Aus 2"$z \cap w \subseteq x \cap y$" und
aus VS gleich "$x \cap y = 0 \ldots$"
folgt via **0-6**: $z \cap w \subseteq 0$.

4: Aus 3"$z \cap w \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $z \cap w = 0$.

b) VS gleich $(x \cap y = 0) \wedge (z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \wedge (w \in \mathcal{P}(y))$.

1: Via **213-11** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \ldots$" und
aus 1"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}(x)$.

3: Aus VS gleich "$x \cap y = 0 \ldots$",
aus 2"$z \in \mathcal{P}(x)$" und
aus VS gleich "$\ldots w \in \mathcal{P}(y)$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $z \cap w = 0$.

<u>Beweis **223-2**</u> `c)` `VS` gleich $(x \cap y = 0) \wedge (z \in \mathcal{P}(x)) \wedge (w \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y))$.

`1:` Via **213-11** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(y) \subseteq \mathcal{P}(y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y)$" und
aus `1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(y) \subseteq \mathcal{P}(y)$"
folgt via **0-4**: $w \in \mathcal{P}(y)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \cap y = 0 \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathcal{P}(x) \ldots$" und
aus `2`"$w \in \mathcal{P}(y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $z \cap w = 0$.

`d)` `VS` gleich $(x \cap y = 0) \wedge (z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \wedge (w \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y))$.

`1:` Via **213-11** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \ldots$" und
aus `1`"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \cap y = 0 \ldots$",
aus `2`"$z \in \mathcal{P}(x)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $z \cap w = 0$.

$\square$

223-3. In Vorbereitung von Weiterem werden hier zwei Folgerungen aus $x \subseteq y \cup z$ gezogen:

<u>223-3(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \subseteq y \cup z$.

Dann folgt:

a) $x = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

b) $x \setminus y \subseteq z$.

c) $x \setminus z \subseteq y$.

Beweis **223-3** `a)`

`1:` Aus →) “ $x \subseteq y \cup x$ ”
folgt via **2-10**: $x \cap (y \cup z) = x$.

`2:` $x \stackrel{1}{=} x \cap (y \cup z) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

`b)`

`1:` Aus →) “ $x \subseteq y \cup z$ ”
folgt via **5-5**: $x \setminus y \subseteq (y \cup z) \setminus y$.

`2:` $(y \cup z) \setminus y \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} (z \cup y) \setminus y$.

`3:` Aus `1` “ $x \setminus y \subseteq (y \cup z) \setminus y$ ” und
aus `2` “ $(y \cup z) \setminus y = \ldots = (z \cup y) \setminus y$ ”
folgt: $x \setminus y \subseteq (z \cup y) \setminus y$.

`4:` Via **5-10** gilt: $(z \cup y) \setminus y = z \setminus y$.

`5:` Aus `3` “ $x \setminus y \subseteq (z \cup y) \setminus y$ ” und
aus `4` “ $(z \cup y) \setminus y = z \setminus y$ ”
folgt: $x \setminus y \subseteq z \setminus y$.

`6:` Via **5-5** gilt: $z \setminus y \subseteq z$.

`7:` Aus `5` “ $x \setminus y \subseteq z \setminus y$ ” und
aus `6` “ $z \setminus y \subseteq z$ ”
folgt via **0-6**: $x \setminus y \subseteq z$.

`c)`

`1:` Via **KG**$\cup$ gilt: $y \cup z = z \cup y$.

`2:` Aus →) “ $x \subseteq y \cup z$ ” und
aus `1` “ $y \cup z = z \cup y$ ”
folgt: $x \subseteq z \cup y$.

`3:` Aus `2` “ $x \subseteq z \cup y$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \setminus z \subseteq y$.

□

223-4. In Anlehnung an **223-3** werden hier Konsequenzen aus $x \in \mathcal{P}(y \cup z)$ gezogen:

223-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathcal{P}(y \cup z)$.

Dann folgt:

a) $x = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

b) $x \cap y \in \mathcal{P}(y)$.

c) $x \cap z \in \mathcal{P}(z)$.

d) $x \setminus y \in \mathcal{P}(z)$.

e) $x \setminus z \in \mathcal{P}(y)$.

<u>Beweis **223-4**</u>

`1:` Aus →) "$x \in \mathcal{P}(y \cup z)$"
folgt via **0-26**: $(x \subseteq y \cup z) \wedge (x \text{ Menge})$.

`2.1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y$.

`2.2:` Via **2-7** gilt: $x \cap z \subseteq z$.

`2.3:` Aus `1`"$x \subseteq y \cup z \ldots$"
folgt via **223-3**: $x \setminus y \subseteq z$.

`2.4:` Aus `1`"$x \subseteq y \cup z \ldots$"
folgt via **223-3**: $x \setminus z \subseteq y$.

`2.5:` Aus `1`"$\ldots x$ Menge"
folgt via **2-24**: $x \cap y$ Menge.

`2.6:` Aus `1`"$\ldots x$ Menge"
folgt via **2-24**: $x \cap z$ Menge.

`2.7:` Aus `1`"$\ldots x$ Menge"
folgt via **213-10**: $x \setminus y$ Menge.

`2.8:` Aus `1`"$\ldots x$ Menge"
folgt via **213-10**: $x \setminus z$ Menge.

`2.a):` Aus `1`"$x \subseteq y \cup z \ldots$"
folgt via **223-3**: $x = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

`3.b):` Aus `2.1`"$x \cap y \subseteq y$" und
aus `2.5`"$x \cap y$ Menge"
folgt via **0-26**: $x \cap y \in \mathcal{P}(y)$.

`3.c):` Aus `2.2`"$x \cap z \subseteq z$" und
aus `2.6`"$x \cap z$ Menge"
folgt via **0-26**: $x \cap z \in \mathcal{P}(z)$.

`3.d):` Aus `2.3`"$x \setminus y \subseteq z$" und
aus `2.7`"$x \setminus y$ Menge"
folgt via **0-26**: $x \setminus y \in \mathcal{P}(z)$.

`3.e):` Aus `2.4`"$x \setminus z \subseteq y$" und
aus `2.8`"$x \setminus z$ Menge"
folgt via **0-26**: $x \setminus z \in \mathcal{P}(y)$.

□

223-5. In Anlehnung an **223-3** werden hier Konsequenzen aus $x \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y \cup z)$ gezogen:

223-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y \cup z)$.

Dann folgt:

a) $x = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

b) $x \cap y \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$.

c) $x \cap z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(z)$.

d) $x \setminus y \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(z)$.

e) $x \setminus z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$.

<u>Beweis **223-5**</u>

`1:` Aus →) "$x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y \cup z)$"
folgt via **213-11**: $(x \in \mathcal{P}(y \cup z)) \wedge (x \text{ endlich})$.

`2.1:` Aus `1` "$x \in \mathcal{P}(y \cup z) \ldots$"
folgt via **223-4**: $x \cap y \in \mathcal{P}(y)$.

`2.2:` Aus `1` "$x \in \mathcal{P}(y \cup z) \ldots$"
folgt via **223-4**: $x \cap z \in \mathcal{P}(z)$.

`2.3:` Aus `1` "$x \in \mathcal{P}(y \cup z) \ldots$"
folgt via **223-4**: $x \setminus y \in \mathcal{P}(z)$.

`2.4:` Aus `1` "$x \in \mathcal{P}(y \cup z) \ldots$"
folgt via **223-4**: $x \setminus z \in \mathcal{P}(y)$.

`2.5:` Aus `1` "$\ldots x$ endlich"
folgt via **213-5**: $x \cap y$ endlich.

`2.6:` Aus `1` "$\ldots x$ endlich"
folgt via **213-5**: $x \cap z$ endlich.

`2.7:` Aus `1` "$\ldots x$ endlich"
folgt via **213-5**: $x \setminus y$ endlich.

`2.8:` Aus `1` "$\ldots x$ endlich"
folgt via **213-5**: $x \setminus z$ endlich.

`2.a):` Aus `1` "$x \in \mathcal{P}(y \cup z) \ldots$"
folgt via **223-5**: $x = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

`3.b):` Aus `2.1` "$x \cap y \in \mathcal{P}(y)$" und
aus `2.5` "$x \cap y$ endlich"
folgt via **213-11**: $x \cap y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y)$.

`3.c):` Aus `2.2` "$x \cap z \in \mathcal{P}(z)$" und
aus `2.6` "$x \cap z$ endlich"
folgt via **213-11**: $x \cap z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(z)$.

`3.d):` Aus `2.3` "$x \setminus y \in \mathcal{P}(z)$" und
aus `2.7` "$x \setminus y$ endlich"
folgt via **213-11**: $x \setminus y \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(z)$.

`3.e):` Aus `2.4` "$x \setminus z \in \mathcal{P}(y)$" und
aus `2.8` "$x \setminus z$ endlich"
folgt via **213-11**: $x \setminus z \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(y)$.

□

223-6. Auch das vorliegende Resultat hilft später der Konzentration aufs Wesentlichere:

223-6(Satz)

a) $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

b) $\mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

c) *Aus* "$z \in \mathcal{P}(x)$" *folgt* "$z \in \mathcal{P}(x \cup y)$".

d) *Aus* "$z \in \mathcal{P}(y)$" *folgt* "$z \in \mathcal{P}(x \cup y)$".

Beweis **223-6** a)

1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1 "$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **0-28**: $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

b)

1: Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1 "$y \subseteq x \cup y$"
folgt via **0-28**: $\mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

c) VS gleich $z \in \mathcal{P}(x)$.

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

2: Aus VS gleich "$z \in \mathcal{P}(x)$" und
aus 1 "$\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$"
folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}(x \cup y)$.

d) VS gleich $z \in \mathcal{P}(y)$.

1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$.

2: Aus VS gleich "$z \in \mathcal{P}(y)$" und
aus 1 "$\mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$"
folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}(x \cup y)$.

□

223-7. Ähnlich wie **223-6** hilft Vorliegendes später der Konzentration aufs Wesentlichere:

223-7(Satz)

a) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

b) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

c) *Aus* "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" *folgt* "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$".

d) *Aus* "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$" *folgt* "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$".

Beweis **223-7** a)

1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1 "$x \subseteq x \cup y$" folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

b)

1: Via **2-7** gilt: $y \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1 "$y \subseteq x \cup y$" folgt via **0-32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

c) VS gleich $z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

2: Aus VS gleich "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" und aus 1 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$" folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

d) VS gleich $z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$.

1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

2: Aus VS gleich "$z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y)$" und aus 1 "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(y) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$" folgt via **0-4**: $z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x \cup y)$.

□

223-8. Einige Darlegungen werden deutlicher, wenn Vorliegendes zur Verfügung steht:

223-8(Satz)

a) *Aus* "$x\subseteq y\cup z$" *folgt* "$x\setminus y=x\cap(z\setminus y)$" *und* "$x\setminus z=x\cap(y\setminus z)$".

b) *Aus* "$x\subseteq y\cup z$" *und* "$y\cap z=0$"
folgt "$x\setminus y=x\cap z$" *und* "$x\setminus z=x\cap y$".

Beweis **223-8** a) VS gleich $x\subseteq y\cup z$.

1: Aus VS gleich "$x\subseteq y\cup z$"
folgt via **223-4**: $x=(x\cap y)\cup(x\cap z)$.

2.1:

$$\begin{aligned}
& x\setminus y\\
\stackrel{1}{=}\;& ((x\cap y)\cup(x\cap z))\setminus y\\
\stackrel{\mathbf{5-10}}{=}\;& ((x\cap y)\cup(x\cap z))\cap y^C\\
\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=}\;& ((x\cap y)\cap y^C)\cup((x\cap z)\cap y^C)\\
\stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=}\;& (x\cap(y\cap y^C))\cup((x\cap z)\cap y^C)\\
\stackrel{\mathbf{3-6}}{=}\;& (x\cap 0)\cup((x\cap z)\cap y^C)\\
\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}\;& 0\cup((x\cap z)\cap y^C)\\
\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}\;& (x\cap z)\cap y^C\\
\stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=}\;& x\cap(z\cap y^C)\\
\stackrel{\mathbf{5-10}}{=}\;& x\cap(z\setminus y).
\end{aligned}$$

...

Beweis **223-8** `a)` `VS` gleich $x \subseteq y \cup z$.

...

`2.2:` $x \setminus z$

$$\stackrel{\mathbf{1}}{=} ((x \cap y) \cup (x \cap z)) \setminus z$$

$$\stackrel{\mathbf{5-10}}{=} ((x \cap y) \cup (x \cap z)) \cap z^C$$

$$\stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} ((x \cap y) \cap z^C) \cup ((x \cap z) \cap z^C)$$

$$\stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} (x \cap (y \cap z^C)) \cup ((x \cap z) \cap z^C)$$

$$\stackrel{\mathbf{5-10}}{=} (x \cap (y \setminus z)) \cup ((x \cap z) \cap z^C)$$

$$\stackrel{\mathbf{AG}\cap}{=} (x \cap (y \setminus z)) \cup (x \cap (z \cap z^C))$$

$$\stackrel{\mathbf{3-6}}{=} (x \cap (y \setminus z)) \cup (x \cap 0)$$

$$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} (x \cap (y \setminus z)) \cup 0$$

$$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=} x \cap (y \setminus z).$$

`3.1:` Aus `2.1` folgt:

$$\boxed{x \setminus y = x \cap (z \setminus y)}$$

`3.2:` Aus `2.2` folgt:

$$\boxed{x \setminus z = x \cap (y \setminus z)}$$

Beweis **223-8** `b)` `VS` gleich $(x \subseteq y \cup z) \wedge (y \cap z = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \cap z = 0$"
folgt via **213-14**: $y \setminus z = y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \cap z = 0$"
folgt via **213-14**: $z \setminus y = z$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y \cup z \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \setminus y = x \cap (z \setminus y)$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y \cup z \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \setminus z = x \cap (y \setminus z)$.

`5.1:` $x \setminus y \stackrel{1.3}{=} x \cap (z \setminus y) \stackrel{1.2}{=} x \cap z$.

`5.2:` $x \setminus z \stackrel{1.4}{=} x \cap (y \setminus z) \stackrel{1.1}{=} x \cap y$.

`6.1:` Aus `5.1`
folgt: $\boxed{x \setminus y = x \cap z}$

`6.2:` Aus `5.2`
folgt: $\boxed{x \setminus z = x \cap y}$

□

223-9. Das vorliegende Resultat ist später hilfreich:

223-9(Satz)

Aus “$x \subseteq y \subseteq x \cup E$” *folgt* “$x \cup E = y \cup E$” *und* “$E \cup x = E \cup y$”.

Beweis **223-9** `VS` gleich $x \subseteq y \subseteq x \cup E$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y \ldots$”
folgt via **2-15**: $x \cup E \subseteq y \cup E$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \subseteq x \cup E$”
folgt via **2-15**: $y \cup E \subseteq (x \cup E) \cup E$.

`2:` $(x \cup E) \cup E \stackrel{\mathbf{AG}\cup}{=} x \cup (E \cup E) \stackrel{\mathbf{2-14}}{=} x \cup E$.

`3:` Aus `1.2`“$y \cup E \subseteq (x \cup E) \cup E$” und
aus `2`“$(x \cup E) \cup E = \ldots = x \cup E$”
folgt: $y \cup E \subseteq x \cup E$.

`4:` Aus `1.1`“$x \cup E \subseteq y \cup E$” und
aus `3`“$y \cup E \subseteq x \cup E$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\boxed{x \cup E = y \cup E}$

`5:` $E \cup x \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} x \cup E \stackrel{4}{=} y \cup E \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} E \cup y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\boxed{E \cup x = E \cup y}$

□

223-10. $x \cup y$ ist genau denn *keine* TeilKlasse von E, wenn $x \not\subseteq E$ oder $y \not\subseteq E$. Ähnlich ist E genau dann *keine* TeilKlasse von $x \cap y$, wenn $E \not\subseteq x$ oder $E \not\subseteq y$:

223-10(Satz)

a) *"$x \cup y \not\subseteq E$" genau dann, wenn "$x \not\subseteq E$" oder "$y \not\subseteq E$".*

b) *"$E \not\subseteq x \cap y$" genau dann, wenn "$E \not\subseteq x$" oder "$E \not\subseteq y$".*

Beweis **223-10** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x \cup y \not\subseteq E$.

1: Es gilt: $(x, y \subseteq E) \vee (\neg(x, y \subseteq E))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x, y \subseteq E$.

2: Aus 1.1.Fall"$x \ldots \subseteq E$" und aus 1.1.Fall"$\ldots y \subseteq E$" folgt via **2-12**: $x \cup y \subseteq E$.

3: Aus VS gleich "$x \cup y \not\subseteq E$" folgt via **0-3**: $\neg(x \cup y \subseteq E)$.

4: Es gilt 2"$x \cup y \subseteq E$". Es gilt 3"$\neg(x \cup y \subseteq E)$". Ex falso quodlibet folgt: $(x \not\subseteq E) \vee (y \not\subseteq E)$.

1.2.Fall $\neg(x, y \subseteq E)$.

2: Aus 1.2.Fall folgt: $\neg((x \subseteq E) \wedge (y \subseteq E))$.

3: Aus 2 folgt: $(\neg(x \subseteq E)) \vee (\neg(y \subseteq E))$.

4.1: Via **0-3** gilt: $(\neg(x \subseteq E)) \Leftrightarrow (x \not\subseteq E)$.

4.2: Via **0-3** gilt: $(\neg(y \subseteq E)) \Leftrightarrow (y \not\subseteq E)$.

5: Aus 3 und aus 4.1 folgt: $(x \not\subseteq E) \vee (\neg(y \subseteq E))$.

6: Aus 5 und aus 4.2 folgt: $(x \not\subseteq E) \vee (y \not\subseteq E)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(x \not\subseteq E) \vee (y \not\subseteq E)$.

Beweis **223-10** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x \not\subseteq E) \vee (y \not\subseteq E)$.

1.1: Via **0-3** gilt: $(\neg(x \subseteq E)) \Leftrightarrow (x \not\subseteq E)$.

1.2: Via **0-3** gilt: $(\neg(y \subseteq E)) \Leftrightarrow (y \not\subseteq E)$.

2: Aus VS gleich "$(x \not\subseteq E) \vee (y \not\subseteq E)$" und
aus 1.1
folgt: $(\neg(x \subseteq E)) \vee (y \not\subseteq E)$.

3: Aus 2 und
aus 1.2
folgt: $(\neg(x \subseteq E)) \vee (\neg(y \subseteq E))$.

4: Es gilt: $(x \cup y \subseteq E) \vee (\neg(x \cup y \subseteq E))$.

Fallunterscheidung

4.1.Fall $x \cup y \subseteq E$.

5: Aus 4.1.Fall "$x \cup y \subseteq E$"
folgt via **2-9**: $x, y \subseteq E$.

6: Aus 5 "$x \ldots \subseteq E$" und
aus 3 "$(\neg(x \subseteq E)) \vee (\neg(y \subseteq E))$"
folgt: $\neg(y \subseteq E)$.

7: Es gilt 6 "$\neg(y \subseteq E)$".
Es gilt 5 "$\ldots y \subseteq E$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \cup y \not\subseteq E$.

4.2.Fall $\neg(x \cup y \subseteq E)$.

Aus 4.2.Fall "$\neg(x \cup y \subseteq E)$"
folgt via **0-3**: $x \cup y \not\subseteq E$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \cup y \not\subseteq E$.

Beweis **223-10** b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $E \not\subseteq x \cap y.$

1: Es gilt: $(E \subseteq x, y) \vee (\neg(E \subseteq x, y)).$

Fallunterscheidung

1.1.Fall $E \subseteq x, y.$

2: Aus 1.1.Fall"$E \subseteq x \ldots$" und
aus 1.1.Fall"$E \subseteq \ldots y$"
folgt via **2-12**: $E \subseteq x \cap y.$

3: Aus VS gleich "$E \not\subseteq x \cap y$"
folgt via **0-3**: $\neg(E \subseteq x \cap y).$

4: Es gilt 2"$E \subseteq x \cap y$".
Es gilt 3"$\neg(E \subseteq x \cap y)$".
Ex falso quodlibet folgt: $(E \not\subseteq x) \vee (E \not\subseteq y).$

1.2.Fall $\neg(E \subseteq x, y).$

2: Aus 1.2.Fall
folgt: $\neg((E \subseteq x) \wedge (E \subseteq y)).$

3: Aus 2
folgt: $((\neg(E \subseteq x)) \vee (\neg(E \subseteq y)).$

4.1: Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq x).$

4.2: Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq y)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq y).$

5: Aus 3 und
aus 4.1
folgt: $(E \not\subseteq x) \vee (\neg(E \subseteq y)).$

6: Aus 5 und
aus 4.2
folgt: $(E \not\subseteq x) \vee (E \not\subseteq y).$

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(E \not\subseteq x) \vee (E \not\subseteq y).$

<u>Beweis **223-10**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(E \not\subseteq x) \vee (E \not\subseteq y)$.

`1.1:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq x)$.

`1.2:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq y)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq y)$.

`2:` Aus `VS` gleich “ $(E \not\subseteq x) \vee (E \not\subseteq y)$ ” und
aus `1.1`
folgt: $(\neg(E \subseteq x)) \vee (E \not\subseteq y)$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.2`
folgt: $(\neg(E \subseteq x)) \vee (\neg(E \subseteq y))$.

`4:` Es gilt: $(E \subseteq x \cap y) \vee (\neg(E \subseteq x \cap y))$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $E \subseteq x \cap y$.

`5:` Aus `4.1.Fall`“ $E \subseteq x \cap y$”
folgt via **2-9**: $E \subseteq x, y$.

`6:` Aus `5`“ $E \subseteq x \ldots$ ” und
aus `3`“ $(\neg(E \subseteq x)) \vee (\neg(E \subseteq y))$ ”
folgt: $\neg(E \subseteq y)$.

`7:` Es gilt `6`“ $\neg(E \subseteq y)$ ” .
Es gilt `5`“ $E \subseteq \ldots y$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $E \not\subseteq x \cap y$.

`4.2.Fall` $\neg(E \subseteq x \cap y)$.

Aus `4.2.Fall`“ $\neg(E \subseteq x \cap y)$”
folgt via **0-3**: $E \not\subseteq x \cap y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E \not\subseteq x \cap y$.

□

$$\chi \text{ ist } (\square, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f.$$

Ersterstellung: 08/10/12 **Letzte Änderung: 25/10/12**

224-1. Mit der nunmehrigen Begriffsbildung wird die *endliche* Summation $\sum_{.}^{fin} f$ vorbereitet. Die Gleichung von `e.6)` - die bald verallgemeinert wird - ist ein Höhepunkt der Essays:

224-1(Definition)

$$\text{“}\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f\text{”}$$

genau dann, wenn gilt:

`e.1)` χ Funktion.

`e.2)` f Funktion.

`e.3)` $P \cap Z = 0$.

`e.4)` $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$.

`e.5)` $\forall \alpha : (\alpha \in P \cup Z) \Rightarrow (\chi(\{\alpha\}) = f(\alpha))$.

`e.6)` $\forall \epsilon, \delta : (\epsilon, \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z))$

$$\Rightarrow \quad \chi(\epsilon \cup \delta)\,{}_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\,\chi(\epsilon \cap \delta) = \chi(\epsilon)\,{}_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\,\chi(\delta).$$

`e.7)` $\forall \epsilon, \nu : ((\epsilon \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)) \wedge (\nu \in \mathcal{P}(Z))$

$$\Rightarrow \quad \chi(\epsilon \cup \nu) = \chi(\epsilon)\,{}_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\,\chi(\nu) = \chi(\epsilon).$$

`ALG`-**Notation**.

224-2. Die vorliegenden an sich wenig bemerkenswerten Aussagen erleichtern Argumentationen im Umgang mit χ, fall χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f:

224-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) χ *ist* $(\Box, P, Z)$**alg1** *von* f.

$\rightarrow$) $A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$.

Dann folgt:

a) $A \cap P = A \setminus Z$.

b) $A \cap Z = A \setminus P$.

c) $\chi(A \cap P) = \chi(A \setminus Z)$.

d) $\chi(A \cap Z) = \chi(A \setminus P)$.

Beweis **224-2**

1.1: Aus $\rightarrow$) "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $P \cap Z = 0$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **221-4**: $A \subseteq P \cup Z$.

2.a): Aus 1.2 "$A \subseteq P \cup Z$" und
aus 1.1 "$P \cap Z = 0$"
folgt via **223-8**: $A \cap P = A \setminus Z$.

2.b): Aus 1.2 "$A \subseteq P \cup Z$" und
aus 1.1 "$P \cap Z = 0$"
folgt via **223-8**: $A \cap Z = A \setminus P$.

3.c): Aus 2.a) "$A \cap P = A \setminus Z$"
folgt: $\chi(A \cap P) = \chi(A \setminus Z)$.

3.d): Aus 2.b) "$A \cap Z = A \setminus P$"
folgt: $\chi(A \cap Z) = \chi(A \setminus P)$.

$\Box$

224-3. Aus **224-1(Def)** folgen ohne allzu viel Mühe die vorliegenden Aussagen:

224-3(Satz)

*Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und ...*

a) ... *und* "$N \in \mathcal{P}(Z)$" *folgt* "$\chi(N) = \chi(0)$".

b) ... *und* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$" *folgt* "$\chi(E) = \chi(E \cap P)$".

c) ... *und* "$E \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$" *folgt* "$\chi(E)\_\Box\_\chi(0) = \chi(E)$".

d) ... *und* "$p, q \in P \cup Z$" *und* "$p \neq q$" *folgt* "$\chi(\{p, q\}) = f(p)\_\Box\_f(q)$".

e) ... *und* "$p, q, r \in P \cup Z$" *und* "$p, q \neq r$"
folgt "$\chi(\{p, q, r\}) = \chi(\{p, q\})\_\Box\_f(r)$".

f) ... *und* "$p, q, r \in P \cup Z$" *und* "$p \neq q, r$"
folgt "$\chi(\{p, q, r\}) = f(p)\_\Box\_\chi(\{q, r\})$".

ALG-**Notation**.

Beweis **224-3** a) VS gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (N \in \mathcal{P}(Z))$.

1: Via **32-5** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)$.

2: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f ... ",
aus 1 "$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)$" und
aus VS gleich "... $N \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(0 \cup N) = \chi(0)$.

3: $\chi(N) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} \chi(0 \cup N) \stackrel{2}{=} \chi(0)$.

4: Aus 3
folgt: $\chi(N) = \chi(0)$.

<u>Beweis **224-3**</u> `bc)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via **223-5**: $E = (E \cap P) \cup (E \cap Z)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via **223-5**: $E \cap P \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via **223-5**: $E \cap Z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Z)$.

`2.1:` Aus `1.2`"$E \cap P \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)$"
folgt via **223-7**: $E \cap P \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z)$.

`2.2:` Aus `1.3`"$E \cap Z \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(Z)$"
folgt via **213-11**: $E \cap Z \in \mathcal{P}(Z)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `2.1`"$E \cap P \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z)$" und
aus `2.2`"$E \cap Z \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi((E \cap P) \cup (E \cap Z)) = \chi(E \cap P)_{-}\Box_{-}\chi(E \cap Z)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `2.1`"$E \cap P \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P \cup Z)$" und
aus `2.2`"$E \cap Z \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi((E \cap P) \cup (E \cap Z)) = \chi(E \cap P)$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `2.2`"$E \cap Z \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\chi(E \cap Z) = \chi(0)$.

`4.b):` Aus `1.1`"$E = (E \cap P) \cup (E \cap Z)$" und
aus `3.2`"$\chi((E \cap P) \cup (E \cap Z)) = \chi(E \cap P)$"
folgt: $\chi(E) = \chi(E \cap P)$.

`5:`
$$\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(0) \stackrel{3.3}{=} \chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(E \cap Z) \stackrel{4.b)}{=} \chi(E \cap P)_{-}\Box_{-}\chi(E \cap Z) \stackrel{3.1}{=} \chi((E \cap P) \cup (E \cap Z)) \stackrel{1.1}{=} \chi(E).$$

`6.c):` Aus `5`
folgt: $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(E)$.

Beweis **224-3** `d)` `VS` gleich (χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von $f) \wedge (p, q \in P \cup Z) \wedge (p \neq q)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{p\}) = f(p)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{q\}) = f(q)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **223-1**: $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **32-5**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **32-5**: $\{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$.

`1.6:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \neq q$"
folgt via **2-33**: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`1.7:` Via **4-11** gilt: $\{p\} \cup \{q\} = \{p, q\}$.

`2.1:` Aus `1.3`"$\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\chi(\{p, q\})_{-}\square_{-}\chi(0) = \chi(\{p, q\})$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `1.4`"$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$" und
aus `1.5`"$\{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via **224-1(Def)**:

$$\chi(\{p\} \cup \{q\})_{-}\square_{-}\chi(\{p\} \cap \{q\}) = \chi(\{p\})_{-}\square_{-}\chi(\{q\}).$$

`3:`

$$\begin{aligned} &\chi(\{p, q\}) \\ &\stackrel{2.1}{=} \chi(\{p, q\})_{-}\square_{-}\chi(0) \\ &\stackrel{1.7}{=} \chi(\{p\} \cup \{q\})_{-}\square_{-}\chi(0) \\ &\stackrel{1.6}{=} \chi(\{p\} \cup \{q\})_{-}\square_{-}\chi(\{p\} \cap \{q\}) \\ &\stackrel{2.2}{=} \chi(\{p\})_{-}\square_{-}\chi(\{q\}) \\ &\stackrel{1.1}{=} f(p)_{-}\square_{-}\chi(\{q\}) \\ &\stackrel{1.2}{=} f(p)_{-}\square_{-}f(q). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\chi(\{p, q\}) = f(p)_{-}\square_{-}f(q)$.

<u>Beweis **224-3** `e)`</u>

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (p, q, r \in P \cup Z) \wedge (p, q \neq r)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots r \in P \cup Z \dots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{r\}) = f(r)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots p, q \dots \in P \cup Z \dots$"
folgt via **223-1**: $\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\dots p, q, r \in P \cup Z \dots$"
folgt via **223-1**: $\{p, q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\dots r \in P \cup Z \dots$"
folgt via **32-5**: $\{r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\dots p, q \neq r$"
folgt via **213-12**: $\{p, q\} \cap \{r\} = 0$.

`1.6:` Via **213-13** gilt: $\{p, q, r\} = \{p, q\} \cup \{r\}$.

`2.1:` Aus `1.3`"$\{p, q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\chi(\{p, q, r\})_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(\{p, q, r\})$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \dots$",
aus `1.2`"$\{p, q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$" und
aus `1.4`"$\{r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via **224-1(Def)**:

$$\chi(\{p, q\} \cup \{r\})_{-}\Box_{-}\chi(\{p, q\} \cap \{r\}) = \chi(\{p, q\})_{-}\Box_{-}\chi(\{r\}).$$

`3:`

$$\begin{aligned} &\chi(\{p, q, r\}) \\ &\stackrel{2.1}{=} \chi(\{p, q, r\})_{-}\Box_{-}\chi(0) \\ &\stackrel{1.6}{=} \chi(\{p, q\} \cup \{r\})_{-}\Box_{-}\chi(0) \\ &\stackrel{1.5}{=} \chi(\{p, q\} \cup \{r\})_{-}\Box_{-}\chi(\{p, q\} \cap \{r\}) \\ &\stackrel{2.2}{=} \chi(\{p, q\})_{-}\Box_{-}\chi(\{r\}) \\ &\stackrel{1.1}{=} \chi(\{p, q\})_{-}\Box_{-}f(r). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\chi(\{p, q, r\}) = \chi(\{p, q\})_{-}\Box_{-}f(r)$.

Beweis **224-3** `f)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (p, q, r \in P \cup Z) \wedge (p \neq q, r).$

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{p\}) = f(p).$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q, r \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **223-1**: $\{q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z).$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q, r \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **223-1**: $\{p, q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z).$

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **32-5**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z).$

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \neq q, r$"
folgt via **213-12**: $\{p\} \cap \{q, r\} = 0.$

`1.6:` Via **213-13** gilt: $\{p, q, r\} = \{p\} \cup \{q, r\}.$

`2.1:` Aus `1.3` "$\{p, q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\chi(\{p, q, r\})_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(\{p, q, r\}).$

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$",
aus `1.4` "$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$" und
aus `1.2` "$\{q, r\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via **224-1(Def)**:

$$\chi(\{p\} \cup \{q, r\})_{-}\Box_{-}\chi(\{p\} \cap \{q, r\}) = \chi(\{p\})_{-}\Box_{-}\chi(\{q, r\}).$$

`3:`

$$\begin{aligned} &\chi(\{p, q, r\}) \\ \stackrel{2.1}{=}\ &\chi(\{p, q, r\})_{-}\Box_{-}\chi(0) \\ \stackrel{1.6}{=}\ &\chi(\{p\} \cup \{q, r\})_{-}\Box_{-}\chi(0) \\ \stackrel{1.5}{=}\ &\chi(\{p\} \cup \{q, r\})_{-}\Box_{-}\chi(\{p\} \cap \{q, r\}) \\ \stackrel{2.2}{=}\ &\chi(\{p\})_{-}\Box_{-}\chi(\{q, r\}) \\ \stackrel{1.1}{=}\ &f(p)_{-}\Box_{-}\chi(\{q, r\}). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\chi(\{p, q, r\}) = f(p)_{-}\Box_{-}\chi(\{q, r\}).$

$\Box$

224-4. Aus **224-1(Def)** folgen mit Hilfe von **224-3** die vorliegenden Aussagen. Insbesondere ist die Gleichung $\chi(A \cup B)_\text{-}\Box_\text{-}\chi(A \cap B) = \chi(A)_\text{-}\Box_\text{-}\chi(B)$ *für alle* $A, B \in \mathsf{dom}\,\chi$ gültig. Auch deutet via `c)` - auch via `b)` - Einiges darauf hin, dass es, falls χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f, ein $\Box$neutrales Element auf einer geeigneten Klasse gibt:

<u>**224-4(Satz)**</u>

*Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und ...*

`a)` *... und "$A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"*
folgt "$\chi(A \cup B)_\text{-}\Box_\text{-}\chi(A \cap B) = \chi(A)_\text{-}\Box_\text{-}\chi(B)$".

`b)` *... und "$A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$" und "$N \in \mathcal{P}(Z)$"*
folgt "$\chi(A \cup N) = \chi(A)_\text{-}\Box_\text{-}\chi(N) = \chi(A)$".

`c)` *... und "$A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$" folgt "$\chi(A)_\text{-}\Box_\text{-}\chi(0) = \chi(A)$".*

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **224-4**</u> `a)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $P \cap Z = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \ldots \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)) \wedge (\Phi \in \mathcal{P}(Z)) \wedge (A = \Omega \cup \Phi)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **220-6**: $\exists \Gamma, \Psi : (\Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)) \wedge (\Psi \in \mathcal{P}(Z)) \wedge (B = \Gamma \cup \Psi)$.

...

Beweis **224-4** `a)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z))$.

...

`2.1:` Aus `1.2`
folgt: $A = \Omega \cup \Phi$.

`2.2:` Aus `1.3`
folgt: $B = \Gamma \cup \Psi$.

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$",
aus `1.3`"$\ldots \Psi \in \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `1.1`"$P \cap Z = 0$"
folgt via **223-2**: $\Omega \cap \Psi = 0$.

`2.4:` Aus `1.3`"$\ldots \Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$",
aus `1.2`"$\ldots \Phi \in \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `1.1`"$P \cap Z = 0$"
folgt via **223-2**: $\Gamma \cap \Phi = 0$.

`2.5:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$"
folgt via **32-5**: $\Omega \cap \Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)$.

`2.6:` Aus `1.2`"$\ldots \Phi \in \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **2-27**: $\Phi \cap \Psi \in \mathcal{P}(Z)$.

`2.7:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots \Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$"
folgt via **32-5**: $\Omega \cup \Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)$.

`2.8:` Aus `1.2`"$\ldots \Phi \in \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots \Psi \in \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **2-27**: $\Phi \cup \Psi \in \mathcal{P}(Z)$.

...

<u>Beweis</u> **224-4** `a)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \;_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)).$

...

`2.9:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\dots$",
aus `1.2`"$\dots\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\dots$" und
aus `1.2`"$\dots\Phi \in \mathcal{P}(Z)\dots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\Omega \cup \Phi) = \chi(\Omega).$

`2.10:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\dots$",
aus `1.3`"$\dots\Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\dots$" und
aus `1.3`"$\dots\Psi \in \mathcal{P}(Z)\dots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\Gamma \cup \Psi) = \chi(\Gamma).$

`2.11:` Aus `1.2`"$\dots\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\dots$"
folgt via **223-7**: $\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z).$

`2.12:` Aus `1.3`"$\dots\Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\dots$"
folgt via **223-7**: $\Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z).$

`3.1:`
$$
\begin{aligned}
&(\Omega \cup \Phi) \cap (\Gamma \cup \Psi)\\
\stackrel{\textbf{2-38}}{=}\;& ((\Omega \cap \Gamma) \cup (\Phi \cap \Gamma)) \cup ((\Omega \cap \Psi) \cup (\Phi \cap \Psi))\\
\stackrel{\textbf{KG}\cup}{=}\;& ((\Omega \cap \Gamma) \cup (\Gamma \cap \Phi)) \cup ((\Omega \cap \Psi) \cup (\Phi \cap \Psi))\\
\stackrel{2.4}{=}\;& ((\Omega \cap \Gamma) \cup 0) \cup ((\Omega \cap \Psi) \cup (\Phi \cap \Psi))\\
\stackrel{\textbf{2-17}}{=}\;& (\Omega \cap \Gamma) \cup ((\Omega \cap \Psi) \cup (\Phi \cap \Psi))\\
\stackrel{2.3}{=}\;& (\Omega \cap \Gamma) \cup (0 \cup (\Phi \cap \Psi))\\
\stackrel{\textbf{2-17}}{=}\;& (\Omega \cap \Gamma) \cup (\Phi \cap \Psi).
\end{aligned}
$$

`3.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\dots$",
aus `2.7`"$\Omega \cup \Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)$" und
aus `2.8`"$\Phi \cup \Psi \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi((\Omega \cup \Gamma) \cup (\Phi \cup \Psi)) = \chi(\Omega \cup \Gamma).$

`3.3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\dots$",
aus `2.5`"$\Omega \cap \Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)$" und
aus `2.6`"$\Phi \cap \Psi \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi((\Omega \cap \Gamma) \cup (\Phi \cap \Psi)) = \chi(\Omega \cap \Gamma).$

...

<u>Beweis</u> **224-4** `a)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z))$.

...

`3.4:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$ ",
aus `2.11`"$\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$" und
aus `2.12`"$\Gamma \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P \cup Z)$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\Omega \cup \Gamma)\_\Box\_\chi(\Omega \cap \Gamma) = \chi(\Omega)\_\Box\_\chi(\Gamma)$.

`4:` Aus `3.1`
folgt: $(\Omega \cup \Phi) \cap (\Gamma \cup \Psi) = (\Omega \cap \Gamma) \cup (\Phi \cap \Psi)$.

`5:`

$$
\begin{aligned}
&\chi(A \cup B)\_\Box\_\chi(A \cap B) \\
\overset{2.1}{=}\;& \chi((\Omega \cup \Phi) \cup B)\_\Box\_\chi((\Omega \cup \Phi) \cap B) \\
\overset{2.2}{=}\;& \chi((\Omega \cup \Phi) \cup (\Gamma \cup \Psi))\_\Box\_\chi((\Omega \cup \Phi) \cap (\Gamma \cup \Psi)) \\
\overset{\mathbf{213-6}}{=}\;& \chi((\Omega \cup \Gamma) \cup (\Phi \cup \Psi))\_\Box\_\chi((\Omega \cup \Phi) \cap (\Gamma \cup \Psi)) \\
\overset{4}{=}\;& \chi((\Omega \cup \Gamma) \cup (\Phi \cup \Psi))\_\Box\_\chi((\Omega \cap \Gamma) \cup (\Phi \cap \Psi)) \\
\overset{3.2}{=}\;& \chi(\Omega \cup \Gamma)\_\Box\_\chi((\Omega \cap \Gamma) \cup (\Phi \cap \Psi)) \\
\overset{3.3}{=}\;& \chi(\Omega \cup \Gamma)\_\Box\_\chi(\Omega \cap \Gamma) \\
\overset{3.4}{=}\;& \chi(\Omega)\_\Box\_\chi(\Gamma) \\
\overset{2.9}{=}\;& \chi(\Omega \cup \Phi)\_\Box\_\chi(\Gamma) \\
\overset{2.10}{=}\;& \chi(\Omega \cup \Phi)\_\Box\_\chi(\Gamma \cup \Psi) \\
\overset{2.1}{=}\;& \chi(A)\_\Box\_\chi(\Gamma \cup \Psi) \\
\overset{2.2}{=}\;& \chi(A)\_\Box\_\chi(B).
\end{aligned}
$$

`6:` Aus `5`
folgt: $\chi(A \cup B)\_\Box\_\chi(A \cap B) = \chi(A)\_\Box\_\chi(B)$.

Beweis **224-4** `b)` `VS` gleich

$$(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)) \wedge (N \in \mathcal{P}(Z)).$$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **220-6**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)) \wedge (\Psi \in \mathcal{P}(Z)) \wedge (A = \Omega \cup \Psi)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots \Psi \in \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **2-27**: $\Psi \cup N \in \mathcal{P}(Z)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Psi \in \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\Omega \cup \Psi) = \chi(\Omega)$.

`2.3:` Aus `1`
folgt: $A = \Omega \cup \Psi$.

`2.4:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-3**: $\chi(N) = \chi(0)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$" und
aus `2.1`"$\ldots \Psi \cup N \in \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\Omega \cup (\Psi \cup N)) = \chi(\Omega)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ldots$" und
aus `2.1`"$\ldots \Psi \cup N \in \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\Omega \cup (\Psi \cup N)) = \chi(\Omega)\_\Box\_\chi(\Psi \cup N)$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `2.1`"$\ldots \Psi \cup N \in \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **224-3**: $\chi(\Psi \cup N) = \chi(0)$.

...

<u>Beweis **224-4**</u> `b)` `VS` gleich

$$(\chi \text{ ist } (\square, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)) \wedge (N \in \mathcal{P}(Z)).$$

...

`4.1:`

$$\begin{aligned}
&\chi(A \cup N)\\
&\overset{2.3}{=} \chi((\Omega \cup \Psi) \cup N)\\
&\overset{\mathbf{AG}\cup}{=} \chi(\Omega \cup (\Psi \cup N)\\
&\overset{3.2}{=} \chi(\Omega)_\square_\chi(\Psi \cup N)\\
&\overset{2.2}{=} \chi(\Omega \cup \Psi)_\square_\chi(\Psi \cup N)\\
&\overset{2.3}{=} \chi(A)_\square_\chi(\Psi \cup N)\\
&\overset{3.3}{=} \chi(A)_\square_\chi(0)\\
&\overset{2.4}{=} \chi(A)_\square_\chi(N).
\end{aligned}$$

`4.2:`

$$\begin{aligned}
&\chi(A \cup N)\\
&\overset{2.3}{=} \chi((\Omega \cup \Psi) \cup N)\\
&\overset{\mathbf{AG}\cup}{=} \chi(\Omega \cup (\Psi \cup N))\\
&\overset{3.1}{=} \chi(\Omega)\\
&\overset{2.2}{=} \chi(\Omega \cup \Psi)\\
&\overset{2.3}{=} \chi(A).
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4.1`“$\chi(A \cup N) = \ldots = \chi(A)\_\square\_\chi(N)$” und
aus `4.2`“$\chi(A \cup N) = \ldots = \chi(A)$”
folgt: $\chi(A \cup N) = \chi(A)\_\square\_\chi(N) = \chi(A)$.

`c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\square, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z))$.

`1:` Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(Z)$.

`2:` Aus `VS` gleich “χ ist $(\square, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f\ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$” und
aus `1`“$0 \in \mathcal{P}(Z)$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\chi(A)\_\square\_\chi(0) = \chi(A)$.

□

224-5 Unter Einsatz von **224-4** sind die vorliegenden Aussagen über $\chi(A \cup B)$ in SpeCialfällen einfach Cu beweisen:

224-5(Satz)

Aus "χ *ist* $(\Box, P, Z)$**alg1** *von* f" *und* ...

a) ... *und* "$A, B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$" *und* "$A \cap B \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt "$\chi(A \cup B) = \chi(A)_{\_}\Box_{\_}\chi(B)$".

b) ... *und* "$A, B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$" *und* "$A \cap B = 0$"
folgt "$\chi(A \cup B) = \chi(A)_{\_}\Box_{\_}\chi(B)$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **224-5**</u> `a)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)) \wedge (A \cap B \in \mathcal{P}(Z))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)\ldots$"
folgt via **224-4**: $\chi(A \cup B)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\chi(A \cap B) = \chi(A)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\chi(B)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)\ldots$"
folgt via **221-2**: $A \cup B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`2:` Aus `1.2`"$A \cup B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-4**: $\chi(A \cup B)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\chi(A \cap B) = \chi(A \cup B)$.

`3:`
$$\chi(A \cup B) \stackrel{2}{=} \chi(A \cup B)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\chi(A \cap B) \stackrel{1.1}{=} \chi(A)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\chi(B).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\chi(A \cup B) = \chi(A)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\chi(B)$.

`b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)) \wedge (A \cap B = 0)$.

`1:` Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(Z)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B = 0$" und
aus `1`"$0 \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $A \cap B \in \mathcal{P}(Z)$.

`3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)\ldots$" und
aus `2`"$A \cap B \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\chi(A \cup B) = \chi(A)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}\chi(B)$.

$\Box$

224-6 Falls χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f, dann liegen "Kommutativität und Asso-Ciativität" von $\Box$" auf einer geeigneten Klasse nahe:

224-6(Satz)

*Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und ...*

a) *... und "$A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"*
folgt "$\chi(A)\_\Box\_\chi(B) = \chi(B)\_\Box\_\chi(A)$".

b) *... und "$A, B, C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"*
und "$A \cap B, B \cap C, C \cap A \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt "$\chi(A)\_\Box\_(\chi(B)\_\Box\_\chi(C)) = (\chi(A)\_\Box\_\chi(B))\_\Box\_\chi(C)$".

c) *... und "$A, B, C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"*
und "$A \cap B = B \cap C = C \cap A = 0$"
folgt "$\chi(A)\_\Box\_(\chi(B)\_\Box\_\chi(C)) = (\chi(A)\_\Box\_\chi(B))\_\Box\_\chi(C)$".

ALG-**Notation**.

Beweis **224-6** a)

VS gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z))$.

1.1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f ..." und
aus VS gleich "... $A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-4**: $\chi(A \cup B)\_\Box\_\chi(A \cap B) = \chi(A)\_\Box\_\chi(B)$.

1.2: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f ...",
aus VS gleich "... $B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$" und
aus VS gleich "... A ... $\in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-4**: $\chi(B \cup A)\_\Box\_\chi(B \cap A) = \chi(B)\_\Box\_\chi(A)$.

2:
$$\chi(A)\_\Box\_\chi(B) \stackrel{1.1}{=} \chi(A \cup B)\_\Box\_\chi(A \cap B) \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} \chi(B \cup A)\_\Box\_\chi(A \cap B) \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} \chi(B \cup A)\_\Box\_\chi(B \cap A) \stackrel{1.2}{=} \chi(B)\_\Box\_\chi(A).$$

3: Aus 2
folgt: $\chi(A)\_\Box\_\chi(B) = \chi(B)\_\Box\_\chi(A)$.

<u>Beweis **224-6**</u> `b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(A, B, C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)) \wedge (A \cap B, B \cap C, C \cap A \in \mathcal{P}(Z))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots B, C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots B \cap C \ldots \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-5**: $\chi(B \cup C) = \chi(B)\_\Box\_\chi(C)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A, B \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B \ldots \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-5**: $\chi(A \cup B) = \chi(A)\_\Box\_\chi(B)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots B, C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **221-2**: $B \cup C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots A, B \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **221-2**: $A \cup B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`1.5:` Via **KG**$\cap$ gilt: $A \cap C = C \cap A$.

`1.6:` $A \cap (B \cup C) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

`1.7:` $(A \cup B) \cap C \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `1.3`"$B \cup C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-4**: $\chi(A \cup (B \cup C))\_\Box\_\chi(A \cap (B \cup C)) = \chi(A)\_\Box\_\chi(B \cup C)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `1.4`"$A \cup B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **224-4**: $\chi((A \cup B) \cup C)\_\Box\_\chi((A \cup B) \cap C) = \chi(A \cup B)\_\Box\_\chi(C)$.

`2.3:` Aus `1.5`"$A \cap C = C \cap A$" und
aus `VS` gleich "$\ldots C \cap A \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $A \cap C \in \mathcal{P}(Z)$.

`2.4:` Aus `1.4`"$A \cup B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$"
folgt via **221-2**: $(A \cup B) \cup C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`2.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \ldots \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z) \ldots$" und
aus `1.3`"$B \cup C \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **221-2**: $A \cup (B \cup C) \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

...

<u>Beweis **224-6**</u> `b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(A, B, C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(Z)) \wedge (A \cap B, B \cap C, C \cap A \in \mathcal{P}(Z))$.

...

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\dots A \cap B \dots \in \mathcal{P}(Z)$" und
aus `2.3`"$A \cap C \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **2-27**: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \in \mathcal{P}(Z)$.

`3.2:` Aus `2.3`"$A \cap C \in \mathcal{P}(Z)$" und
aus `VS` gleich "$\dots B \cap C \dots \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **2-27**: $(A \cap C) \cup (B \cap C) \in \mathcal{P}(Z)$.

`4.1:` Aus `1.6`"$A \cap (B \cup C) = \dots = (A \cap B) \cup (A \cap C)$" und
aus `3.1`"$(A \cap B) \cup (A \cap C) \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $A \cap (B \cup C) \in \mathcal{P}(Z)$.

`4.2:` Aus `1.7`"$(A \cup B) \cap C = \dots = (A \cap C) \cup (B \cap C)$" und
aus `3.2`"$(A \cap B) \cup (B \cap C) \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $(A \cup B) \cap C \in \mathcal{P}(Z)$.

`5.1:` Aus `2.4`"$(A \cup B) \cup C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$" und
aus `4.2`"$(A \cup B) \cap C \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-4**: $\chi((A \cup B) \cup C)_{-}\Box_{-}\chi((A \cup B) \cap C) = \chi((A \cup B) \cup C)$.

`5.2:` Aus `2.5`"$A \cup (B \cup C) \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$" und
aus `4.1`"$A \cap (B \cup C) \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-4**: $\chi(A \cup (B \cup C))_{-}\Box_{-}\chi(A \cap (B \cup C)) = \chi(A \cup (B \cup C))$.

`6:`
$$\chi(A)_{-}\Box_{-}(\chi(B)_{-}\Box_{-}\chi(C))$$
$$\stackrel{1.1}{=} \chi(A)_{-}\Box_{-}\chi(B \cup C)$$
$$\stackrel{2.1}{=} \chi(A \cup (B \cup C))_{-}\Box_{-}\chi(A \cap (B \cup C))$$
$$\stackrel{5.2}{=} \chi(A \cup (B \cup C))$$
$$\stackrel{\textbf{AG}\cup}{=} \chi((A \cup B) \cup C)$$
$$\stackrel{5.1}{=} \chi((A \cup B) \cup C)_{-}\Box_{-}\chi((A \cup B) \cap C)$$
$$\stackrel{2.2}{=} \chi(A \cup B)_{-}\Box_{-}\chi(C)$$
$$\stackrel{1.2}{=} (\chi(A)_{-}\Box_{-}\chi(B))_{-}\Box_{-}\chi(C).$$

`7:` Aus `6`
folgt: $\chi(A)_{-}\Box_{-}(\chi(B)_{-}\Box_{-}\chi(C)) = (\chi(A)_{-}\Box_{-}\chi(B))_{-}\Box_{-}\chi(C)$.

<u>Beweis **224-6**</u> `c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(A, B, C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(Z)) \wedge (A \cap B = B \cap C = C \cap A = 0)$.

`1:` Via **0-28** gilt: $0 \in \mathcal{P}(Z)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \cap B \ldots = 0$" und
aus `1`"$0 \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $A \cap B \in \mathcal{P}(Z)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots B \cap C \ldots = 0$" und
aus `1`"$0 \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $B \cap C \in \mathcal{P}(Z)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots C \cap A = 0$" und
aus `1`"$0 \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $C \cap A \in \mathcal{P}(Z)$.

`2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A, B, C \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\texttt{ni}}\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(Z) \ldots$",
aus `2.1`"$A \cap B \in \mathcal{P}(Z)$",
aus `2.2`"$B \cap C \in \mathcal{P}(Z)$" und
aus `2.3`"$C \cap A \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:

$$\chi(A)\_\Box\_(\chi(B)\_\Box\_\chi(C)) = (\chi(A)\_\Box\_\chi(B))\_\Box\_\chi(C).$$

$\Box$

224-7. Teil `cd)` des nunmehrigen Satz können als leserfreundliche Spezialfälle von **224-4**`c)` und **224-6**`a)` gesehen werden:

224-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) χ *ist* $(\Box, P, Z)$**alg1** *von* f.

Dann folgt:

`a)` $\chi(0)$ *Menge.*

`b)` $\chi(0)_-\Box_-\chi(0) = \chi(0)$.

`c)` $\chi(0)$ *ist* $\Box$*neutral auf* $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`d)` $\Box$ *kommutativ auf* $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

Beweis **224-7**

`ALG`-**Notation**.

`a)`

`1:` Aus $\rightarrow$)“χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f”
folgt via **224-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$.

`2:` Via **221-2** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$.

`3:` Aus 2“$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$” und
aus 1“$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$”
folgt: $0 \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`4:` Aus 3“$0 \in \mathsf{dom}\,\chi$”
folgt via **17-5**: $\chi(0)$ Menge.

`b)`

`1:` Via **221-2** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$.

`2:` Aus $\rightarrow$)“χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f” und
aus 1“$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$”
folgt via **224-4**: $\chi(0)_-\Box_-\chi(0) = \chi(0)$.

Beweis **224-7** `c)`

`1:` Aus →) “χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\chi(0)$ Menge.

`2:` Aus `1` “$\chi(0)$ Menge”
folgt via **1-3**: $\chi(0) \in \{\chi(0)\}$.

`3:` Aus `2` “$\chi(0) \in \{\chi(0)\}$”
folgt via **2-2**: $\chi(0) \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`Thema4.1` $\alpha \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`5:` Aus `Thema4.1` “$\alpha \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$”
folgt via **94-8**: $(\alpha = \chi(0)) \vee (\alpha \in f[P \cup Z]$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $\alpha = \chi(0)$.

`6:` Aus →) “χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\chi(0)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)$.

`7.1:` Aus `6` “$\chi(0)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)$” und
aus `5.1.Fall` “$\alpha = \chi(0)$”
folgt: $\alpha\_\Box\_\chi(0) = \alpha$.

`7.2:` Aus `6` “$\chi(0)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)$” und
aus `5.1.Fall` “$\alpha = \chi(0)$”
folgt: $\chi(0)\_\Box\_\alpha = \alpha$.

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $\alpha\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\alpha = \alpha$.

...

...

<u>Beweis **224-7**</u> `c)`

...

`Thema4.1` $\alpha \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $\alpha \in f[P \cup Z]$.

`6:` Aus →) "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`7:` Aus 6 "f Funktion" und
aus `5.2.Fall` "$\alpha \in f[P \cup Z]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in P \cup Z) \wedge (\alpha = f(\Omega))$.

`8.1:` Aus 7
folgt: $\alpha = f(\Omega)$.

`8.2:` Aus 7 "$\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **221-4**: $\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$.

`8.3:` Via **221-2** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$.

`8.4:` Aus →) "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f" und
aus 7 "$\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{\Omega\}) = f(\Omega)$.

`9.1:` Aus →) "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f" und
aus 8.2 "$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-4**: $\chi(\{\Omega\})_{-}\square_{-}\chi(0) = \chi(\{\Omega\})$.

`9.2:` Aus →) "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f",
aus 8.2 "$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$" und
aus 8.3 "$0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-6**: $\chi(\{\Omega\})_{-}\square_{-}\chi(0) = \chi(0)_{-}\square_{-}\chi(\{\Omega\})$.

...

...

...

<u>Beweis **224-7**</u> `c)`

...

`Thema4.1` $\alpha \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z].$

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $\alpha \in f[P \cup Z].$

...

`10.1:`
$$\alpha\_\Box\_\chi(0) \stackrel{8.1}{=} f(\Omega)\_\Box\_\chi(0) \stackrel{8.4}{=} \chi(\{\Omega\})\_\Box\_\chi(0) \stackrel{9.1}{=} \chi(\{\Omega\}) \stackrel{8.4}{=} f(\Omega) \stackrel{8.1}{=} \alpha.$$

`10.2:`
$$\chi(0)\_\Box\_\alpha \stackrel{8.1}{=} \chi(0)\_\Box\_f(\Omega) \stackrel{8.4}{=} \chi(0)\_\Box\_\chi(\{\Omega\}) \stackrel{9.2}{=} \chi(\{\Omega\})\_\Box\_\chi(0) \stackrel{8.4}{=} f(\Omega)\_\Box\_\chi(0) \stackrel{8.1}{=} \alpha\_\Box\_\chi(0).$$

`11:` Aus `10.1`“$\alpha\_\Box\_\chi(0) = \ldots = \alpha$” und aus `10.2`“$\alpha\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\alpha$” folgt: $\alpha\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\alpha = \alpha.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$\alpha\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\alpha = \alpha.$$

Ergo `Thema4.1`:

`A1`	“$\forall \alpha : (\alpha \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\alpha = \alpha)$”

Beweis **224-7** `c)`

...

`5:` Aus `3`“$\chi(0) \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z])$
$\Rightarrow (\alpha\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\alpha = \alpha)$”
folgt via **208-1(Def)**: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`d)`

`Thema1` $\alpha, \beta \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$”
folgt via **94-8**: $(\alpha = \chi(0)) \vee (\alpha \in f[P \cup Z])$.

`1.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$”
folgt via **94-8**: $(\beta = \chi(0)) \vee (\beta \in f[P \cup Z])$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$(\alpha = \chi(0)) \wedge (\beta = \chi(0))$$
$$\vee \quad (\alpha = \chi(0)) \wedge (\beta \in f[P \cup Z])$$
$$\vee \quad (\alpha \in f[P \cup Z]) \wedge (\beta = \chi(0))$$
$$\vee \quad (\alpha \in f[P \cup Z]) \wedge (\beta \in f[P \cup Z]).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(\alpha = \chi(0)) \wedge (\beta = \chi(0))$.

`3:` Aus $\rightarrow\!)$“χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`4:` Aus `2.1.Fall`“$\ldots \beta = \chi(0)$” und
aus `3`“$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$”
folgt: β ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`5:` Aus `4`“β ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$” und
aus `Thema1`“$\alpha \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$”
folgt via **208-1(Def)**: $\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha = \alpha$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha$.

...

...

Beweis **224-7** `d)`

...

`Thema1` $\alpha, \beta \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(\alpha = \chi(0)) \wedge (\beta \in f[P \cup Z])$.

`3:` Aus →) "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`4:` Aus `2.2.Fall` "$\alpha \ldots = \chi(0)$" und
aus `3` "$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt: α ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`5:` Aus `4` "α ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `Thema1` "$\beta \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\beta\_\Box\_\alpha = \alpha\_\Box\_\beta = \beta$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha$.

`2.3.Fall` $(\alpha \in f[P \cup Z]) \wedge (\beta = \chi(0))$.

`3:` Aus →) "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`4:` Aus `2.3.Fall` "$\ldots \beta = \chi(0)$" und
aus `3` "$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt: β ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`5:` Aus `4` "β ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `Thema1` "$\alpha \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha = \alpha$.

`5:` Aus `4`
folgt: $\alpha\_\Box\_\beta = \beta\_\Box\_\alpha$.

...

...

Beweis **224-7** `d)`

...

`Thema1` $\alpha, \beta \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(\alpha \in f[P \cup Z]) \wedge (\beta \in f[P \cup Z])$.

`3:` Aus →) “ χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f ”
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`4.1:` Aus `3` “ f Funktion ” und
aus `2.4.Fall` “ $\alpha \ldots \in f[P \cup Z]$ ”
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in P \cup Z) \wedge (\alpha = f(\Omega))$.

`4.2:` Aus `3` “ f Funktion ” und
aus `2.4.Fall` $\ldots \beta \in f[P \cup Z]$
folgt via **18-28**: $\exists \Psi : (\Psi \in P \cup Z) \wedge (\beta = f(\Psi))$.

`5.1:` Aus `4.1` “ $\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$ ”
folgt via **221-4**: $\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`5.2:` Aus `4.2` “ $\ldots \Psi \in P \cup Z \ldots$ ”
folgt via **221-4**: $\{\Psi\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`5.3:` Aus →) “ χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f ” und
aus `4.1` “ $\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$ ”
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{\Omega\}) = f(\Omega)$.

`5.4:` Aus →) “ χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f ” und
aus `4.2` “ $\ldots \Psi \in P \cup Z \ldots$ ”
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{\Psi\}) = f(\Psi)$.

`5.5:` Aus `4.1`
folgt: $\alpha = f(\Omega)$.

`5.6:` Aus `4.2`
folgt: $\beta = f(\Psi)$.

...

...

...

Beweis **224-7** `d)`

...

`Thema1` $\alpha, \beta \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(\alpha \in f[P \cup Z]) \wedge (\beta \in f[P \cup Z])$.

...

`6:` Aus →) "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f",
aus `5.1` "$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$" und
aus `5.2` "$\{\Psi\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-6**:

$$\chi(\{\Omega\})_-\Box_-\chi(\{\Psi\}) = \chi(\{\Psi\})_-\Box_-\chi(\{\Omega\}).$$

`7:`

$$\begin{aligned} &\alpha_-\Box_-\beta \\ &\stackrel{5.5}{=} f(\Omega)_-\Box_-\beta \\ &\stackrel{5.6}{=} f(\Omega)_-\Box_-f(\Psi) \\ &\stackrel{5.3}{=} \chi(\{\Omega\})_-\Box_-f(\Psi) \\ &\stackrel{5.4}{=} \chi(\{\Omega\})_-\Box_-\chi(\{\Psi\}) \\ &\stackrel{6}{=} \chi(\{\Psi\})_-\Box_-\chi(\{\Omega\}) \\ &\stackrel{5.4}{=} f(\Psi)_-\Box_-\chi(\{\Omega\}) \\ &\stackrel{5.3}{=} f(\Psi)_-\Box_-f(\Omega) \\ &\stackrel{5.6}{=} \beta_-\Box_-f(\Omega) \\ &\stackrel{5.5}{=} \beta_-\Box_-\alpha. \end{aligned}$$

`8:` Aus 7
folgt: $\alpha_-\Box_-\beta = \beta_-\Box_-\alpha$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\alpha_-\Box_-\beta = \beta_-\Box_-\alpha$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]) \Rightarrow (\alpha_-\Box_-\beta = \beta_-\Box_-\alpha)$.

Konsequenz via **210-1(Def)**: $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

□

224-8. Es folgen einige Untersuchungen zur Assoziativität von $\square$, wenn χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f. Vorbereitend hierzu wird hierzu ein gerne verwendetes Hilfs-Resultat, das auch an sich interessant ist, bewiesen:

224-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrowtail)$ χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f.

$\rightarrowtail)$ $p, q, r \in P \cup Z$.

$\rightarrowtail)$ "$p \neq q$" *und* "$q \neq r$" *und* "$r \neq p$".

$\rightarrowtail)$ "$a = f(p)$" *und* "$b = f(q)$" *und* "$c = f(r)$".

Dann folgt "$a\_\square\_(b\_\square\_c) = (a\_\square\_b)\_\square\_c$".

ALG-**Notation**.

Beweis **224-8**

1.1: Aus $\rightarrowtail)$ "$p \ldots \in P \cup Z$"
folgt via **221-4**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$.

1.2: Aus $\rightarrowtail)$ "$\ldots q \ldots \in P \cup Z$"
folgt via **221-4**: $\{q\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$.

1.3: Aus $\rightarrowtail)$ "$\ldots r \in P \cup Z$"
folgt via **221-4**: $\{r\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(Z)$.

1.4: Aus $\rightarrowtail)$ "$p \neq q \ldots$"
folgt via **2-33**: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

1.5: Aus $\rightarrowtail)$ "$\ldots q \neq r \ldots$"
folgt via **2-33**: $\{q\} \cap \{r\} = 0$.

1.6: Aus $\rightarrowtail)$ "$\ldots r \neq p$"
folgt via **2-33**: $\{r\} \cap \{p\} = 0$.

...

<u>Beweis **224-8**</u>

...

1.7: Aus →) “ χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$ ” und
aus →) “ $p \ldots \in P \cup Z$ ”
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{p\}) = f(p)$.

1.8: Aus →) “ χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$ ” und
aus →) “ $\ldots q \ldots \in P \cup Z$ ”
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{q\}) = f(q)$.

1.9: Aus →) “ χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$ ” und
aus →) “ $\ldots r \in P \cup Z$ ”
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{r\}) = f(r)$.

2.1: Aus 1.7 “ $\chi(\{p\}) = f(p)$ ” und
aus →) “ $a = f(p) \ldots$ ”
folgt: $\chi(\{p\}) = a$.

2.2: Aus 1.8 “ $\chi(\{q\}) = f(q)$ ” und
aus →) “ $\ldots b = f(q) \ldots$ ”
folgt: $\chi(\{q\}) = b$.

2.3: Aus 1.9 “ $\chi(\{r\}) = f(r)$ ” und
aus →) “ $\ldots c = f(r)$ ”
folgt: $\chi(\{r\}) = c$.

2.4: Aus →) “ χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f ” ,
aus 1.1 “ $\{p\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$ ” ,
aus 1.2 “ $\{q\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$ ” ,
aus 1.3 “ $\{r\} \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(P) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$ ” ,
aus 1.4 “ $\{p\} \cap \{q\} = 0$ ” ,
aus 1.5 “ $\{q\} \cap \{r\} = 0$ ” und
aus 1.6 “ $\{r\} \cap \{p\} = 0$ ”
folgt via **224-6**:

$$\chi(\{p\})_{-}\Box_{-}(\chi(\{q\})_{-}\Box_{-}\chi(\{r\})) = (\chi(\{p\})_{-}\Box_{-}\chi(\{q\}))_{-}\Box_{-}\chi(\{r\}).$$

...

<u>Beweis **224-8**</u>

...

3:

$$a\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,(b\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,c)$$
$$\overset{2.1}{=} \chi(\{p\})\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,(b\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,c)$$
$$\overset{2.2}{=} \chi(\{p\})\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,(\chi(\{q\})\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,c)$$
$$\overset{2.3}{=} \chi(\{p\})\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,(\chi(\{q\})\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,\chi(\{r\}))$$
$$\overset{2.4}{=} (\chi(\{p\})\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,\chi(\{q\}))\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,\chi(\{r\})$$
$$\overset{2.1}{=} (a\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,\chi(\{q\}))\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,\chi(\{r\})$$
$$\overset{2.2}{=} (a\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,b)\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,\chi(\{r\})$$
$$\overset{2.3}{=} (a\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,b)\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,c.$$

4: Aus 3 folgt:

$$a\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,(b\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,c) = (a\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,b)\,{}_{\scriptscriptstyle-}\Box{}_{\scriptscriptstyle-}\,c.$$

$\square$

224-9. An Hand vorliegender Aussagen ist zu erkennen, dass die Assoziativität von $\square$ in $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$ nicht ohne Weiteres zur Verfügung steht. Interessanter Weise ist für $a \in f[P \cup Z]$ offenbar $a\_\square\_(a\_\square\_a) = (a\_\square\_a)\_\square\_a$ nicht unbedingt verfügbar:

224-9(Satz)

a) *Aus* “χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f”
folgt “$\chi(0)\_\square\_(\chi(0)\_\square\_\chi(0)) = (\chi(0)\_\square\_\chi(0))\_\square\_\chi(0)$”.

b) *Aus* “χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f” *und* “$a, a\_\square\_a \in f[P \cup Z]$”
folgt “$a\_\square\_(a\_\square\_a) = (a\_\square\_a)\_\square\_a$”.

c) *Aus* “χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f” *und* “$p, q, r \in P \cup Z$”
und “$p \neq q$” *und* “$q \neq r$” *und* “$r \neq p$”
und “$a = f(p) = f(q) = f(r)$”
folgt “$a\_\square\_(a\_\square\_a) = (a\_\square\_a)\_\square\_a$”.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **224-9** a) VS gleich χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f.

1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **224-7**: $\chi(0)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)$.

2: $\chi(0)\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_\chi(0)) \stackrel{1}{=} \chi(0)\_\Box\_\chi(0) \stackrel{1}{=} (\chi(0)\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_\chi(0)$.

3: Aus 2
folgt: $\chi(0)\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_\chi(0)) = (\chi(0)\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_\chi(0)$.

b) VS gleich $(\chi$ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f) \wedge (a, a\_\Box\_a \in f[P \cup Z])$.

1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$"
folgt via **224-7**: $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

2: Aus VS gleich "$\ldots a, a\_\Box\_a \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a, a\_\Box\_a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

3: Aus 1"$\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus 2"$a, a\_\Box\_a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **210-1(Def)**: $a\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_a$.

c) VS gleich $(\chi$ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f)$
$\wedge (p, q, r \in P \cup Z) \wedge (p \neq q) \wedge (q \neq r) \wedge (r \neq p) \wedge (a = f(p) = f(q) = f(r))$.

Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots p, q, r \in P \cup Z \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots (p \neq q) \wedge (q \neq r) \wedge (r \neq p) \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots a = f(p) \ldots$",
aus VS gleich "$\ldots a = \ldots = f(q) \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots a = \ldots f(r)$"
folgt via **224-8**: $a\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_a$.

$\Box$

224-10. In Weiterführung der Untersuchungen von **224-9** zur Assoziativität via χ, χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f, werden nun die Fälle betrachtet, in denen zwei verschiedene Elemente von $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$ auftreten:

224-10(Satz)

a) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$a, a\_\Box\_a \in f[P \cup Z]$"*
folgt "$a\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0)) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0)$"
und "$\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_a$".

b) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$p, q \in P \cup Z$"*
und "$p \neq q$" und "$a = f(p) = f(q)$"
folgt "$a\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0)) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0)$"
und "$\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_a$".

c) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$a \in f[P \cup Z]$"*
folgt "$a\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_a) = (a\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_a$"
und "$a\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_\chi(0)) = (a\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_\chi(0)$"
und "$\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0)) = (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0)$"
und "$\chi(0)\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_a) = (\chi(0)\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_a$".

d) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$a, b, a\_\Box\_b \in f[P \cup Z]$"*
folgt "$a\_\Box\_(b\_\Box\_a) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_a$".

e) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$a, b, b\_\Box\_a \in f[P \cup Z]$"*
folgt "$a\_\Box\_(b\_\Box\_a) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_a$".

f) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$p, q \in P \cup Z$"*
und "$p \neq q$" und "$a = f(p) = f(q)$"
und "$b \in f[P \cup Z]$" und "$a \neq b$"
folgt "$a\_\Box\_(a\_\Box\_b) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_b$"
und "$a\_\Box\_(b\_\Box\_a) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_a$
und "$b\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (b\_\Box\_a)\_\Box\_a$".

ALG-**Notation**.

<u>Beweis **224-10**</u> `a)` `VS` gleich (χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f) $\wedge$ $(a, a\_\Box\_a \in f[P \cup Z])$.

`1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\dots$"
folgt via **224-7**: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\dots a \dots \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\dots a\_\Box\_a \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a\_\Box\_a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`3.1:` Aus `1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `2.1`"$a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $a\_\Box\_\chi(0) = a$.

`3.2:` Aus `1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `2.1`"$a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\chi(0)\_\Box\_a = a$.

`3.3:` Aus `1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `2.2`"$a\_\Box\_a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $(a\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0) = a\_\Box\_a$.

`3.4:` Aus `1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `2.2`"$a\_\Box\_a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_a) = a\_\Box\_a$.

`4.1:` $a\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0)) \stackrel{3.1}{=} a\_\Box\_a \stackrel{3.3}{=} (a\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0)$.

`4.2:` $\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_a) \stackrel{3.4}{=} a\_\Box\_a \stackrel{3.2}{=} (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_a$.

`5.1:` Aus `4.1`
folgt: $\boxed{a\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0)) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0)}$

`5.2:` Aus `4.2`
folgt: $\boxed{\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_a}$

<u>Beweis **224-10**</u> `b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(p, q \in P \cup Z) \wedge (p \neq q) \wedge (a = f(p) = f(q))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **221-4**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **221-4**: $\{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y)$.

`1.3:` Via **221-2** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \cup \mathcal{P}(y)$.

`1.4:` Aus `VS` folgt: $a = f(p)$.

`1.5:` Aus `VS` folgt: $a = f(q)$.

`1.6:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{p\}) = f(p)$.

`1.7:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{q\}) = f(q)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \neq q \ldots$"
folgt via **2-33**: $\{p\} \cap \{q\} = 0$.

`2.2:` Via **2-17** gilt: $0 \cap \{p\} = 0$.

`2.3:` Via **2-17** gilt: $\{q\} \cap 0 = 0$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$",
aus `1.1`"$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$",
aus `1.2`"$\{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$",
aus `1.3`"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$",
aus `2.1`"$\{p\} \cap \{q\} = 0$",
aus `2.3`"$\{q\} \cap 0 = 0$" und
aus `2.2`"$0 \cap \{p\} = 0$"
folgt via **224-6**: $\chi(\{p\})_-\Box_-(\chi(\{q\})_-\Box_-\chi(0)) = (\chi(\{p\})_-\Box_-\chi(\{q\}))_-\Box_-\chi(0)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$",
aus `1.3`"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(y)$",
aus `1.1`"$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$",
aus `1.2`"$\{q\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \,_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$",
aus `2.2`"$0 \cap \{p\} = 0$",
aus `2.1`"$\{p\} \cap \{q\} = 0$" und
aus `2.3`"$\{q\} \cap 0 = 0$"
folgt via **224-6**: $\chi(0)_-\Box_-(\chi(\{p\})_-\Box_-\chi(\{q\})) = (\chi(0)_-\Box_-\chi(\{p\}))_-\Box_-\chi(\{q\})$.

...

Beweis **224-10** `b) VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(p, q \in P \cup Z) \wedge (p \neq q) \wedge (a = f(p) = f(q))$.

...

`4.1:`

$$a\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0))$$
$$\stackrel{1.4}{=} f(p)\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0))$$
$$\stackrel{1.5}{=} f(p)\_\Box\_(f(q)\_\Box\_\chi(0))$$
$$\stackrel{1.6}{=} \chi(\{p\})\_\Box\_(f(q)\_\Box\_\chi(0))$$
$$\stackrel{1.7}{=} \chi(\{p\})\_\Box\_(\chi(\{q\})\_\Box\_\chi(0))$$
$$\stackrel{3.1}{=} (\chi(\{p\})\_\Box\_\chi(\{q\}))\_\Box\_\chi(0)$$
$$\stackrel{1.6}{=} (f(p)\_\Box\_\chi(\{q\}))\_\Box\_\chi(0)$$
$$\stackrel{1.7}{=} (f(p)\_\Box\_f(q))\_\Box\_\chi(0)$$
$$\stackrel{1.4}{=} (a\_\Box\_f(q))\_\Box\_\chi(0)$$
$$\stackrel{1.5}{=} (a\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0).$$

`4.2:`

$$\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_a)$$
$$\stackrel{1.4}{=} \chi(0)\_\Box\_(f(p)\_\Box\_a)$$
$$\stackrel{1.5}{=} \chi(0)\_\Box\_(f(p)\_\Box\_f(q))$$
$$\stackrel{1.6}{=} \chi(0)\_\Box\_(\chi(\{p\})\_\Box\_f(q))$$
$$\stackrel{1.7}{=} \chi(0)\_\Box\_(\chi(\{p\})\_\Box\_\chi(\{q\}))$$
$$\stackrel{3.2}{=} (\chi(0)\_\Box\_\chi(\{p\}))\_\Box\_\chi(\{q\})$$
$$\stackrel{1.6}{=} (\chi(0)\_\Box\_f(p))\_\Box\_\chi(\{q\})$$
$$\stackrel{1.7}{=} (\chi(0)\_\Box\_f(p))\_\Box\_f(q)$$
$$\stackrel{1.4}{=} (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_f(q)$$
$$\stackrel{1.5}{=} (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_a.$$

...

Beweis **224-10** `b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(p, q \in P \cup Z) \wedge (p \neq q) \wedge (a = f(p) = f(q))$.

...

`5.1:` Aus `4.1`

folgt: $\boxed{a\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0)) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0)}$

`5.2:` Aus `4.2`

folgt: $\boxed{\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_a}$

`c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a \in f[P \cup Z])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\ldots$"
folgt via **224-7**: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f\ldots$"
folgt via **224-7**: $\chi(0)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2:` Aus `1.1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.3`"$a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $a\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_a = a$.

`3.1:` Aus `2`
folgt: $a\_\Box\_\chi(0) = a$.

`3.2:` Aus `2`
folgt: $\chi(0)\_\Box\_a = a$.

`4.1:` $a\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_a) \stackrel{3.2}{=} a\_\Box\_a \stackrel{3.1}{=} (a\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_a$.

`4.2:` $a\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_\chi(0)) \stackrel{1.2}{=} a\_\Box\_\chi(0) \stackrel{3.1}{=} (a\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_\chi(0)$.

`4.3:` $\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_\chi(0)) \stackrel{3.1}{=} \chi(0)\_\Box\_a \stackrel{3.2}{=} a \stackrel{3.1}{=} a\_\Box\_\chi(0) \stackrel{3.2}{=} (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_\chi(0)$.

`4.4:` $\chi(0)\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_a) \stackrel{3.2}{=} \chi(0)\_\Box\_a \stackrel{1.2}{=} (\chi(0)\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_a$.

...

Beweis **224-10** `c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a \in f[P \cup Z])$.

`5.1:` Aus `4.1`

folgt: $\boxed{a \_\Box\_ (\chi(0) \_\Box\_ a) = (a \_\Box\_ \chi(0)) \_\Box\_ a}$

`5.2:` Aus `4.2`

folgt: $\boxed{a \_\Box\_ (\chi(0) \_\Box\_ \chi(0)) = (a \_\Box\_ \chi(0)) \_\Box\_ \chi(0)}$

`5.3:` Aus `4.3`

folgt: $\boxed{\chi(0) \_\Box\_ (a \_\Box\_ \chi(0)) = (\chi(0) \_\Box\_ a) \_\Box\_ \chi(0)}$

`5.4:` Aus `4.4`

folgt: $\boxed{\chi(0) \_\Box\_ (\chi(0) \_\Box\_ a) = (\chi(0) \_\Box\_ \chi(0)) \_\Box\_ a}$

`d)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, b, a \_\Box\_ b \in f[P \cup Z])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-7**: $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a, b, a \_\Box\_ b \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a, b, a \_\Box\_ b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$a, b \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **210-1(Def)**: $a \_\Box\_ b = b \_\Box\_ a$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$a, \ldots, a \_\Box\_ b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **210-1(Def)**: $a \_\Box\_ (a \_\Box\_ b) = (a \_\Box\_ b) \_\Box\_ a$.

`3:` $a \_\Box\_ (b \_\Box\_ a) \overset{2.1}{=} a \_\Box\_ (a \_\Box\_ b) \overset{2.2}{=} (a \_\Box\_ b) \_\Box\_ a$.

`4:` Aus `3`
folgt: $a \_\Box\_ (b \_\Box\_ a) = (a \_\Box\_ b) \_\Box\_ a$.

<u>Beweis **224-10**</u> `e)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, b, b\_\Box\_a \in f[P \cup Z])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-7**: $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a, b, a\_\Box\_b \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a, b, b\_\Box\_a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$a, b \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **210-1(Def)**: $a\_\Box\_b = b\_\Box\_a$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$a, \ldots, b\_\Box\_a \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **210-1(Def)**: $a\_\Box\_(b\_\Box\_a) = (b\_\Box\_a)\_\Box\_a$.

`3:` $a\_\Box\_(b\_\Box\_a) \stackrel{2.2}{=} (b\_\Box\_a)\_\Box\_a \stackrel{2.1}{=} (a\_\Box\_b)\_\Box\_a$.

`4:` Aus `3`
folgt: $a\_\Box\_(b\_\Box\_a) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_a$.

`f)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge (p, q \in P \cup Z) \wedge (p \neq q) \wedge (a = f(p) = f(q)) \wedge (b \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \neq b$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a = f(p) \ldots$"
folgt: $f(p) \neq b$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \neq b$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a = \ldots = f(q) \ldots$"
folgt: $f(q) \neq b$.

`1.4:` Aus `VS`
folgt: $q \neq p$.

`2:` Aus `1.1`"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in f[P \cup Z] \ldots$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in P \cup Z) \wedge (b = f(\Omega))$.

...

<u>Beweis **224-10** `f)`</u> `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(p, q \in P \cup Z) \wedge (p \neq q) \wedge (a = f(p) = f(q))$
$\wedge(b \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b)$.

...

`3.1:` Aus `1.2`“ $f(p) \neq b$ ” und
aus `2`“ $\ldots b = f(\Omega)$ ”
folgt: $f(p) \neq f(\Omega)$.

`3.2:` Aus `1.3`“ $f(q) \neq b$ ” und
aus `2`“ $\ldots b = f(\Omega)$ ”
folgt: $f(q) \neq f(\Omega)$.

`4.1:` Aus `3.1`“ $f(p) \neq f(\Omega)$ ”
folgt via **94-10**: $p \neq \Omega$.

`4.2:` Aus `3.2`“ $f(q) \neq f(\Omega)$ ”
folgt via **94-10**: $q \neq \Omega$.

`5.1:` Aus `4.1`
folgt: $\Omega \neq p$.

`5.2:` Aus `4.2`
folgt: $\Omega \neq q$.

`6.1:` Aus `VS` gleich “ χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$ ”,
aus `VS` gleich “ $\ldots p, q \in P \cup Z \ldots$ ”,
aus `2`“ $\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$ ”,
aus `VS` gleich “ $\ldots p \neq q \ldots$ ”,
aus `4.2`“ $q \neq \Omega$ ”,
aus `5`“ $\Omega \neq p$ ”,
aus `VS` gleich “ $\ldots a = f(p) \ldots$ ”,
aus `VS` gleich “ $\ldots a = \ldots f(q) \ldots$ ” und
aus `2`“ $\ldots b = f(\Omega)$ ”

folgt via **224-8**: $\boxed{a\_\Box\_(a\_\Box\_b) = (a\_\Box\_a)\_\Box\_b}$

...

<u>Beweis **224-10**</u> `f)` `VS` gleich

$$(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$$
$$\wedge(p, q \in P \cup Z) \wedge (p \neq q) \wedge (a = f(p) = f(q))$$
$$\wedge(b \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b).$$

...

`6.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$ ",
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in P \cup Z \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots q \in P \cup Z \ldots$",
aus `4.1`"$p \neq \Omega$",
aus `5.2`"$\Omega \neq q$",
aus `1.4`"$q \neq p$",
aus `VS` gleich "$\ldots a = f(p) \ldots$",
aus `2`"$\ldots b = f(\Omega)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \ldots = f(q) \ldots$"

folgt via **224-8**: $\boxed{a\_\Box\_(b\_\Box\_a) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_a}$

`6.3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$ ",
aus `2`"$\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in P \cup Z \ldots$",
aus `5.1`"$\Omega \neq p$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \neq q \ldots$",
aus `4.2`"$q \neq \Omega$",
aus `2`"$\ldots b = f(\Omega)$",
aus `VS` gleich "$\ldots a = f(p) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a = \ldots f(q) \ldots$",

folgt via **224-8**: $\boxed{b\_\Box\_(a\_\Box\_a) = (b\_\Box\_a)\_\Box\_a}$

□

224-11. Interessanter Weise erscheint jener Fall der Assoziativität von $\square$, χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f, bei dem es sich um drei verschiedene Elemente handelt, entsprechend des vorliegenden Satzes als vergleichsweise einfach:

224-11(Satz)

a) *Aus* "χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f" *und* "$b, a\_\square\_b \in f[P \cup Z]$"
folgt "$a\_\square\_(b\_\square\_\chi(0)) = (a\_\square\_b)\_\square\_\chi(0)$".

b) *Aus* "χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f" *und* "$a, b \in f[P \cup Z]$"
folgt "$a\_\square\_(\chi(0)\_\square\_b) = (a\_\square\_\chi(0))\_\square\_b$".

c) *Aus* "χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f" *und* "$a, a\_\square\_b \in f[P \cup Z]$"
folgt "$\chi(0)\_\square\_(a\_\square\_b) = (\chi(0)\_\square\_a)\_\square\_b$".

d) *Aus* "χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f" *und* "$a, b \in f[P \cup Z]$" *und* "$a \neq b$"
folgt "$a\_\square\_(b\_\square\_\chi(0)) = (a\_\square\_b)\_\square\_\chi(0)$"
und "$\chi(0)\_\square\_(a\_\square\_b) = (\chi(0)\_\square\_a)\_\square\_b$".

e) *Aus* "χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f" *und* "$a, b, c \in f[P \cup Z]$"
und "$a \neq b$" *und* "$b \neq c$" *und* "$c \neq a$"
folgt "$a\_\square\_(b\_\square\_c) = (a\_\square\_b)\_\square\_c$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **224-11**</u> `a)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (b, a\_\Box\_b \in f[P \cup Z])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-7**: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b, a\_\Box\_b \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $b, a\_\Box\_b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$b \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $b\_\Box\_\chi(0) = b$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$\ldots a\_\Box\_b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $(a\_\Box\_b)\_\Box\_\chi(0) = a\_\Box\_b$.

`3:` $a\_\Box\_(b\_\Box\_\chi(0)) \stackrel{2.1}{=} a\_\Box\_b \stackrel{2.2}{=} (a\_\Box\_b)\_\Box\_\chi(0)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $a\_\Box\_(b\_\Box\_\chi(0)) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_\chi(0)$.

`b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, b \in f[P \cup Z])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-7**: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a, b \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a, b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$a \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $a\_\Box\_\chi(0) = a$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$\ldots b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\chi(0)\_\Box\_b = b$.

`3:` $a\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_b) \stackrel{2.2}{=} a\_\Box\_b \stackrel{2.1}{=} (a\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_b$.

`4:` Aus `3`
folgt: $a\_\Box\_(\chi(0)\_\Box\_b) = (a\_\Box\_\chi(0))\_\Box\_b$.

Beweis **224-11** `c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, a\_\Box\_b \in f[P \cup Z])$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-7**: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots a, a\_\Box\_b \in f[P \cup Z]$"
folgt via **2-2**: $a, a\_\Box\_b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$a \ldots \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\chi(0)\_\Box\_a = a$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.2`"$\ldots a\_\Box\_b \in \{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$"
folgt via **208-1(Def)**: $\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_b) = a\_\Box\_b$.

`3:` $\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_b) \stackrel{2.2}{=} a\_\Box\_b \stackrel{2.1}{=} (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_b$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\chi(0)\_\Box\_(a\_\Box\_b) = (\chi(0)\_\Box\_a)\_\Box\_b$.

`d)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, b \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b)$.

`1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`2.1:` Aus `1`"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \ldots \in f[P \cup Z] \ldots$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in P \cup Z) \wedge (a = f(\Omega))$.

`2.2:` Aus `1`"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in f[P \cup Z] \ldots$"
folgt via **18-28**: $\exists \Psi : (\Psi \in P \cup Z) \wedge (b = f(\Psi))$.

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **221-4**: $\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \cup \mathcal{P}(Z)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots \Psi \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **221-4**: $\{\Psi\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \cup \mathcal{P}(Z)$.

`3.3:` Via **221-2** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

$\ldots$

<u>Beweis **224-11**</u> `d)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, b \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b).$

...

`3.4:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `2.1`"$\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{\Omega\}) = f(\Omega).$

`3.5:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `2.2`"$\ldots \Psi \in P \cup Z \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{\Psi\}) = f(\Psi).$

`3.6:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \neq b$" und
aus `2.1`"$\ldots a = f(\Omega)$"
folgt: $f(\Omega) \neq b.$

`4.1:` Aus `3.4`"$\chi(\{\Omega\}) = f(\Omega)$" und
aus `2.1`"$\ldots a = f(\Omega)$"
folgt: $\chi(\{\Omega\}) = a.$

`4.2:` Aus `3.5`"$\chi(\{\Psi\}) = f(\Psi)$" und
aus `2.2`"$\ldots b = f(\Psi)$"
folgt: $\chi(\{\Psi\}) = b.$

`4.3:` Aus `3.6`"$f(\Omega) \neq b$" und
aus `2.2`"$\ldots b = f(\Psi)$"
folgt: $f(\Omega) \neq f(\Psi).$

`5:` Aus `4.3`"$f(\Omega) \neq f(\Psi)$"
folgt via **94-10**: $\Omega \neq \Psi.$

`6.1:` Aus `5`"$\Omega \neq \Psi$"
folgt via **2-33**: $\{\Omega\} \cap \{\Psi\} = 0.$

`6.2:` Via **2-17** gilt: $\{\Psi\} \cap 0 = 0.$

`6.3:` Via **2-17** gilt: $0 \cap \{\Omega\} = 0.$

...

<u>Beweis **224-11** `d)`</u>

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, b \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b).$

...

`7.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$",
aus `3.1`"$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$",
aus `3.2`"$\{\Psi\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$",
aus `3.3`"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$",
aus `6.1`"$\{\Omega\} \cap \{\Psi\} = 0$",
aus `6.2`"$\{\Psi\} \cap 0 = 0$" und
aus `6.3`"$0 \cap \{\Omega\} = 0$"
folgt via **224-6**:

$$\chi(\{\Omega\})_-\Box_-(\chi(\{\Psi\})_-\Box_-\chi(0)) = (\chi(\{\Omega\})_-\Box_-\chi(\{\Psi\}))_-\Box_-\chi(0).$$

`7.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$",
aus `3.3`"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$",
aus `3.1`"$\{\Omega\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$",
aus `3.2`"$\{\Psi\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P)\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(Z)$",
aus `6.3`"$0 \cap \{\Omega\} = 0$"
aus `6.1`"$\{\Omega\} \cap \{\Psi\} = 0$" und
aus `6.2`"$\{\Psi\} \cap 0 = 0$"
folgt via **224-6**:

$$\chi(0)_-\Box_-(\chi(\{\Omega\})_-\Box_-\chi(\{\Psi\})) = (\chi(0)_-\Box_-\chi(\{\Omega\}))_-\Box_-\chi(\{\Psi\}).$$

`8.1:`

$$\begin{aligned}
&a_-\Box_-(b_-\Box_-\chi(0))\\
&\stackrel{4.1}{=} \chi(\{\Omega\})_-\Box_-(b_-\Box_-\chi(0))\\
&\stackrel{4.2}{=} \chi(\{\Omega\})_-\Box_-(\chi(\{\Psi\})_-\Box_-\chi(0))\\
&\stackrel{7.1}{=} (\chi(\{\Omega\})_-\Box_-\chi(\{\Psi\}))_-\Box_-\chi(0)\\
&\stackrel{4.1}{=} (a_-\Box_-\chi(\{\Psi\}))_-\Box_-\chi(0)\\
&\stackrel{4.2}{=} (a_-\Box_-b)_-\Box_-\chi(0).
\end{aligned}$$

...

<u>Beweis **224-11**</u> `d)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (a, b \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b)$.

...

`8.2:`
$$\chi(0)_-\Box_-(a_-\Box_-b)$$
$$\stackrel{4.1}{=} \chi(0)_-\Box_-(\chi(\{\Omega\})_-\Box_-b)$$
$$\stackrel{4.2}{=} \chi(0)_-\Box_-(\chi(\{\Omega\})_-\Box_-\chi(\{\Psi\}))$$
$$\stackrel{7.2}{=} (\chi(0)_-\Box_-\chi(\{\Omega\}))_-\Box_-\chi(\{\Psi\})$$
$$\stackrel{4.1}{=} (\chi(0)_-\Box_-a)_-\Box_-\chi(\{\Psi\})$$
$$\stackrel{4.2}{=} (\chi(0)_-\Box_-a)_-\Box_-b.$$

`9.1:` Aus `8.1` folgt:
$$\boxed{a_-\Box_-(b_-\Box_-\chi(0)) = (a_-\Box_-b)_-\Box_-\chi(0)}$$

`9.2:` Aus `8.2` folgt:
$$\boxed{\chi(0)_-\Box_-(a_-\Box_-b) = (\chi(0)_-\Box_-a)_-\Box_-b}$$

`e) VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(a, b, c \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)$.

`1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`2.1:` Aus `1`"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \ldots \in f[P \cup Z] \ldots$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in P \cup Z) \wedge (a = f(\Omega))$.

`2.2:` Aus `1`"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \ldots \in f[P \cup Z] \ldots$"
folgt via **18-28**: $\exists \Psi : (\Psi \in P \cup Z) \wedge (b = f(\Psi))$.

`2.3:` Aus `1`"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$\ldots c \in f[P \cup Z] \ldots$"
folgt via **18-28**: $\exists \Phi : (\Phi \in P \cup Z) \wedge (c = f(\Phi))$.

...

<u>Beweis **224-11**</u> `e)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f)$
$\wedge(a, b, c \in f[P \cup Z]) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)$.

...

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots (a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)$" und
aus `2.1`"$\ldots a = f(\Omega)$"
folgt: $(f(\Omega) \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq f(\Omega))$.

`4:` Aus `3`"$(f(\Omega) \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq f(\Omega))$" und
aus `2.2`"$\ldots b = f(\Psi)$"
folgt: $(f(\Omega) \neq f(\Psi)) \wedge (f(\Psi) \neq c) \wedge (c \neq f(\Omega))$.

`5:` Aus `4`"$(f(\Omega) \neq f(\Psi)) \wedge (f(\Psi) \neq c) \wedge (c \neq f(\Omega))$" und
aus `2.3`"$\ldots c = f(\Phi)$"
folgt: $(f(\Omega) \neq f(\Psi)) \wedge (f(\Psi) \neq f(\Phi)) \wedge (f(\Phi) \neq f(\Omega))$.

`6.1:` Aus `5`"$f(\Omega) \neq f(\Psi) \ldots$"
folgt via **94-10**: $\Omega \neq \Psi$.

`6.2:` Aus `5`"$\ldots f(\Psi) \neq f(\Phi) \ldots$"
folgt via **94-10**: $\Psi \neq \Phi$.

`6.3:` Aus `5`"$\ldots f(\Phi) \neq f(\Omega)$"
folgt via **94-10**: $\Phi \neq \Omega$.

`7:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$",
aus `2.1`"$\ldots \Omega \in P \cup Z \ldots$",
aus `2.2`"$\ldots \Psi \in P \cup Z \ldots$",
aus `2.3`"$\ldots \Phi \in P \cup Z \ldots$",
aus `6.1`"$\Omega \neq \Psi$",
aus `6.2`"$\Psi \neq \Phi$",
aus `6.3`"$\Phi \neq \Omega$",
aus `2.1`"$\ldots a = f(\Omega)$",
aus `2.2`"$\ldots b = f(\Psi)$" und
aus `2.3`"$\ldots c = f(\Phi)$"
folgt via **224-8**: $a\_\Box\_(b\_\Box\_c) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_c$.

$\Box$

χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f:
Einiges über $P, Z, \mathsf{dom}\, f$ sowie
über $\chi(0)$ und $f[Z]$.

Ersterstellung: 29/10/12 **Letzte Änderung: 30/10/12**

225-1. Falls χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f, so sind P, Z - und somit auch $P \cup Z$ - TeilKlassen von $\mathsf{dom}\, f$ und in weiterer Folge ergibt sich unter anderem aus $p \in P$ die Aussage $f(p) \in f[P]$:

225-1(Satz)

a) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" folgt "$P, Z, P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\, f$".*

b) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$p \in P$"*
folgt "$f(p) \in f[P], f[P \cup Z]$".

c) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$z \in Z$"*
folgt "$f(z) \in f[Z], f[P \cup Z]$".

<u>Beweis **225-1**</u> `a)` `VS` gleich χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in P \cup Z$

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in P \cup Z$"
folgt via **221-4**: $\{\alpha\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in P \cup Z$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{\alpha\}) = f(\alpha)$.

`3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **224-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$.

`4:` Aus `2.1`"$\{\alpha\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(P) \ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}} \mathcal{P}(Z)$"
folgt: $\{\alpha\} \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`5:` Aus `4`"$\{\alpha\} \in \mathsf{dom}\,\chi$"
folgt via **17-5**: $\chi(\{\alpha\})$ Menge.

`6:` Aus `5`"$\chi(\{\alpha\})$ Menge" und
aus `2.2`"$\chi(\{\alpha\}) = f(\alpha)$"
folgt: $f(\alpha)$ Menge.

`7:` Aus `6`"$f(\alpha)$ Menge"
folgt via **17-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\,f$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in P \cup Z) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\,f\text{"}}$

`1.2:` Via **2-7** gilt: $(P \subseteq P \cup Z) \wedge (Z \subseteq P \cup Z)$.

`2.1:` Aus `1.2`"$P \subseteq P \cup Z \ldots$" und
aus `A1` gleich "$P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\,f$"
folgt via **0-6**: $\boxed{P \subseteq \mathsf{dom}\,f}$

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots Z \subseteq P \cup Z$" und
aus `A1` gleich "$P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\,f$"
folgt via **0-6**: $\boxed{Z \subseteq \mathsf{dom}\,f}$

Beweis **225-1** `b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (p \in P)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)\mathbf{alg1}$ von $f \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $P, P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2.1:` Aus `1.1`"f Funktion",
aus `VS` gleich "$\ldots p \in P$" und
aus `1.2`"$P \ldots \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

folgt via **18-27**: $\boxed{f(p) \in f[P]}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in P$"
folgt via **2-2**: $p \in P \cup Z$.

`3:` Aus `1.1`"f Funktion",
aus `2.2`"$p \in P \cup Z$" und
aus `1.2`"$\ldots P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

folgt via **18-27**: $\boxed{f(p) \in f[P \cup Z]}$

Beweis **225-1** `c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (z \in Z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $Z, P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2.1:` Aus `1.1`"f Funktion",
aus `VS` gleich "$\ldots z \in Z$" und
aus `1.2`"$Z \ldots \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

folgt via **18-27**: $\boxed{f(z) \in f[Z]}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in Z$"
folgt via **2-2**: $z \in P \cup Z$.

`3:` Aus `1.1`"f Funktion",
aus `2.2`"$z \in P \cup Z$" und
aus `1.2`"$\ldots P \cup Z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

folgt via **18-27**: $\boxed{f(z) \in f[P \cup Z]}$

$\square$

225-2. Wie sich in **#224** an mehreren Stellen zeigt, scheinen $\chi(0)$ und Z Einiges miteinander zu tun haben. Etwas von dem Einigen ist im vorliegenden Satz dokumentiert:

225-2(Satz)

a) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$z \in Z$" folgt "$f(z) = \chi(0)$".*

b) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und "$0 \neq Z$" folgt "$\chi(0) \in f[Z], f[P \cup Z]$".*

c) *Aus "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" folgt "$f[Z] \subseteq \{\chi(0)\}$".*

Beweis **225-2** a) VS gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\textbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (z \in Z)$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots z \in Z$"
folgt via **2-2**: $z \in P \cup Z$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots z \in Z$"
folgt via **1-8**: $\{z\} \in \mathcal{P}(Z)$.

2.1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus 1.1 "$z \in P \cup Z$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{z\}) = f(z)$.

2.2: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus 1.2 "$\{z\} \in \mathcal{P}(Z)$"
folgt via **224-3**: $\chi(\{z\}) = \chi(0)$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $f(z) = \chi(0)$.

<u>Beweis **225-2**</u> `b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, P, Z)\mathbf{alg1} \text{ von } f) \wedge (0 \neq Z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq Z$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in Z$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Omega \in Z$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f(\Omega) = \chi(0)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von $f \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Omega \in Z$"
folgt via **225-1**: $f(\Omega) \in f[Z], f[P \cup Z]$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\chi(0) \in f[Z], f[P \cup Z]$.

`c)` `VS` gleich χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f.

`Thema1` $\alpha \in f[Z]$.

`2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

`3:` Aus `2`"f Funktion" und
aus `Thema1`"$\alpha \in f[Z]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in Z) \wedge (\alpha = f(\Omega))$.

`4:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in Z \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f(\Omega) = \chi(0)$.

`5:` Aus `3`"$\ldots \alpha = f(\Omega)$" und
aus `4`"$f(\Omega) = \chi(0)$"
folgt: $\alpha = \chi(0)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f[Z]) \Rightarrow (\alpha = \chi(0))$.

Konsequenz via **1-10**: $f[Z] \subseteq \{\chi(0)\}$.

$\Box$

225-3. Im Hinblick auf **225-2** ist Vorliegendes nicht weiter überraschend:

225-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!\!)$ χ *ist* $(\square, P, Z)$**alg1** *von* f.

Dann folgt:

a) $f[P \cup Z] \subseteq \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

b) $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z] = \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

Beweis **225-3** a)

1: Aus $\rightarrow\!\!)$ "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **225-2**: $f[Z] \subseteq \{\chi(0)\}$.

2: Aus 1 "$f[Z] \subseteq \{\chi(0)\}$"
folgt via **2-15**: $f[Z] \cup f[P] \subseteq \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

3: $f[P \cup Z] \overset{\mathbf{9-8}}{=} f[P] \cup f[Z] \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} f[Z] \cup f[P]$.

4: Aus 3 "$f[P \cup Z] = \ldots = f[Z] \cup f[P]$" und
aus 2 "$f[Z] \cup f[P] \subseteq \{\chi(0)\} \cup f[P]$"
folgt: $f[P \cup Z] \subseteq \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

b)

1: Via **2-7** gilt: $P \subseteq P \cup Z$.

2: Aus 1 "$P \subseteq P \cup Z$"
folgt via **8-9**: $f[P] \subseteq f[P \cup Z]$.

3: Aus $\rightarrow\!\!)$ "χ ist $(\square, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via des bereits bewiesenen a): $f[P \cup Z] \subseteq \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

4: Aus 2 "$f[P] \subseteq f[P \cup Z]$" und
aus 3 "$f[P \cup Z] \subseteq \{\chi(0)\} \cup f[P]$"
folgt via **223-9**: $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z] = \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

$\square$

225-4. Mit Hilfe von **225-3** fällt es nicht schwer, die vorliegende Modifikation von **224-7**`cd)` zu beweisen:

225-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ χ *ist* $(\Box, P, Z)$**alg1** *von* f.

Dann folgt:

`a)` $\chi(0)$ *ist* $\Box$*neutral auf* $\{\chi(0)\} \cup f[P]$.

`b)` $\Box$ *kommutativ auf* $\{\chi(0)\} \cup f[P]$.

Beweis **225-4**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **224-7**: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **224-7**: $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$.

`1.3:` Aus $\rightarrow\!)$ "χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f"
folgt via **225-3**: $\{\chi(0) \cup f[P \cup Z] = \{\chi(0)\} \cup f[P]$.

`2.a):` Aus `1.1` "$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.3` "$\{\chi(0) \cup f[P \cup Z] = \{\chi(0)\} \cup f[P]$"
folgt: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[P]$.

`2.b):` Aus `1.2` "$\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P \cup Z]$" und
aus `1.3` "$\{\chi(0) \cup f[P \cup Z] = \{\chi(0)\} \cup f[P]$"
folgt: $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[P]$.

$\Box$

$$\chi \text{ ist } (\Box, Q)\textbf{alg2} \text{ von } f.$$

Ersterstellung: 28/08/12 **Letzte Änderung: 05/12/12**

226-1. In den meisten Fällen wird, wenn χ ist $(\Box, P, Z)$**alg1** von f, nicht von "beliebigen" Klassen P, Z und von "unbekanntem" $\mathsf{ran}\, f$ ausgegangen, sondern es werden Funktionen f betrachtet, deren Bild-Bereich zumindest teilweise in einer ausgezeichneten Klasse Q liegt und es werden P, Z via f aus Q konstruiert. Bei diesem Vorgehen tritt wegen des Erscheinens von $\chi(0)$ in der definierenden Eigenschaft von χ eine gewisse Selbstbezüglichkeit auf. Das stört nicht weiter:

226-1(Definition)

"χ **ist** $(\Box, Q)$**alg2 von** f" genau dann, wenn gilt:

$$\chi \text{ ist } (\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])\textbf{alg1} \text{ von } f.$$

226-2. Nicht zuletzt weil f eine Funktion und weil $Q\setminus\{\chi(0)\}$ und $\{\chi(0)\}$ disjunkt sind, müssen bei der Überprüfung, ob χ in der Tat $(\Box, Q)$**alg2** von f ist, nur sechs an Stelle von sieben Bedingungen untersucht werden:

226-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ χ *Funktion.*

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

$\rightarrow)$ $\forall\alpha : (\alpha \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \Rightarrow (\chi(\{\alpha\}) = f(\alpha))$.

$\rightarrow)$ $\forall\epsilon, \delta : (\epsilon, \delta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]))$

$$\Rightarrow \quad \chi(\epsilon \cup \delta)_{-}\Box_{-}\chi(\epsilon \cap \delta) = \chi(\epsilon)_{-}\Box_{-}\chi(\delta).$$

$\rightarrow)$ $\forall\epsilon, \nu : (\epsilon \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])) \wedge (\nu \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]))$

$$\Rightarrow \quad \chi(\epsilon \cup \nu) = \chi(\epsilon)_{-}\Box_{-}\chi(\nu) = \chi(\epsilon).$$

*Dann folgt "χ ist $(\Box, Q)$***alg2** *von f".*

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **226-2**</u>

`1.1:` Aus →) “ f Funktion ”
folgt via **25-2**:

$$f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cap f^{-1}[\{\chi(0)\}] = f^{-1}[(Q \setminus \{\chi(0)\}) \cap \{\chi(0)\}].$$

`1.2:`

$$\begin{aligned}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \\ \stackrel{\mathbf{9-8}}{=} f^{-1}[(Q \setminus \{\chi(0)\}) \cup \{\chi(0)\}] \\ \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup (Q \setminus \{\chi(0)\})] \\ \stackrel{\mathbf{5-22}}{=} f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q].\end{aligned}$$

`2.1:`

$$\begin{aligned}f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cap f^{-1}[\{\chi(0)\}] \\ \stackrel{1.1}{=} f^{-1}[(Q \setminus \{\chi(0)\}) \cap \{\chi(0)\}] \\ \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} f^{-1}[\{\chi(0)\} \cap (Q \setminus \{\chi(0)\})] \\ \stackrel{\mathbf{5-10}}{=} f^{-1}[0] \\ \stackrel{\mathbf{8-12}}{=} 0.\end{aligned}$$

`Thema2.2` $\beta \in (f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3:` Aus `Thema2.2` “ $\beta \in (f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])$ ” und
aus `1.2` “ $(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])$
$= f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$ ”
folgt: $\beta \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

`4:` Aus `3` “ $\beta \in f^{-1}[\{\chi(0) \cup Q]$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \Rightarrow (\chi(\{\alpha\}) = f(\alpha))$ ”
folgt: $\chi(\{\beta\}) = f(\beta)$.

Ergo `Thema2.2`:

`A1`	“ $\forall \beta : (\beta \in (f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])) \Rightarrow (\chi(\{\beta\}) = f(\beta))$ ”

...

<u>Beweis</u> **226-2** ...

$\boxed{\texttt{Thema2.3}}$ $\gamma, \phi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]))$.

`3:` Aus `Thema2.3` "$\gamma, \phi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]))$" und
aus `1.2` "$(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$"
folgt: $\gamma, \phi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$.

`4:` Aus `3` "$\gamma, \phi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$" und
aus →) "$\forall \epsilon, \delta : (\epsilon, \delta \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])) \Rightarrow (\chi(\epsilon \cup \delta)_{-}\square_{-}\chi(\epsilon \cap \delta) = \chi(\epsilon)_{-}\square_{-}\chi(\delta))$"
folgt: $\chi(\gamma \cup \phi)_{-}\square_{-}\chi(\gamma \cap \phi) = \chi(\gamma)_{-}\square_{-}\chi(\phi)$.

Ergo `Thema2.3`:

`A2`	"$\forall \gamma, \phi : (\gamma, \phi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]))) \Rightarrow \chi(\gamma \cup \phi)_{-}\square_{-}\chi(\gamma \cap \phi) = \chi(\gamma)_{-}\square_{-}\chi(\phi)$"

`3:` Aus →) "χ Funktion",
aus →) "f Funktion",
aus `2.1` "$(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cap (f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = \ldots = 0$",
aus →) "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$",
aus `A1` gleich "$\forall \beta : (\beta \in (f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])) \Rightarrow (\chi(\{\beta\}) = f(\beta))$",
aus `A2` gleich "$\forall \gamma, \phi : (\gamma, \phi \in \mathcal{P}_{\text{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]))) \Rightarrow \chi(\gamma \cup \phi)_{-}\square_{-}\chi(\gamma \cap \phi) = \chi(\gamma)_{-}\square_{-}\chi(\phi)$" und
aus →) "$\forall \epsilon, \nu : (\epsilon \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])) \wedge (\nu \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])) \Rightarrow \chi(\epsilon \cup \nu) = \chi(\epsilon)_{-}\square_{-}\chi(\nu) = \chi(\epsilon)$"
folgt via **224-1(Def)**: χ ist $(\square, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f.

`4:` Aus `3` "χ ist $(\square, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f"
folgt via **226-1(Def)**: χ ist $(\square, Q)$**alg2** von f.

$\square$

226-3. Die ersten drei der in **226-2** als Voraussetzungen fungierenden Aussagen sind auch notwendig dafür, dass χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f:

226-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

Dann folgt:

a) χ *Funktion.*

b) f *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **226-3**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-1(Def)**: χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f.

2.a): Aus 1 "χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f"
folgt via **224-1(Def)**: χ Funktion.

2.b): Aus 1 "χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f"
folgt via **224-1(Def)**: f Funktion.

2.c): Aus 1 "χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f"
folgt via **224-1(Def)**:
$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]))$.

$\Box$

226-4. Auch die vierte in **226-2** als Voraussetzung fungierende Aussage ist notwendig dafür, dass χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f:

> **226-4(Satz)**
>
> *Aus "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f" und "$p \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$" folgt "$\chi(\{p\}) = f(p)$".*

Beweis **226-4** VS gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\textbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (p \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$.

1.1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f \ldots$"
folgt via **226-1(Def)**:
$$\chi \text{ ist } (\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])\textbf{alg1} \text{ von } f.$$

1.2:
$$(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])$$
$$\overset{\textbf{9-8}}{=} f^{-1}[(Q \setminus \{\chi(0)\}) \cup \{\chi(0)\}]$$
$$\overset{\textbf{KG}\cup}{=} f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup (Q \setminus \{\chi(0)\})]$$
$$\overset{\textbf{5-22}}{=} f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q].$$

2: Aus VS gleich "$\ldots p \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$" und
aus 1.2"$(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$"
folgt: $p \in (f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

3: Aus 1.1"χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f" und
aus 2"$p \in (f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **224-1(Def)**: $\chi(\{p\}) = f(p)$.

$\Box$

226-5. Auch die fünfte und sechste in **226-2** als Voraussetzung fungierenden Aussagen sind notwendig dafür, dass χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f. Jedoch sind in Hinblick auf **224-4** stärkere als die genannten Aussagen verfügbar. Insbesondere sind bei genauerer Betrachtung die in den Deduktionen von **224-4** involvierten Mengen Elemente von $\mathsf{dom}\,\chi$, wobei dieser Definitionsbereich gemäß **226-3**c) mit einer imposanten Zeichenkette dargestellt wird. Dies motiviert die Schlussfolgerungen von **224-4** *ohne* eAplizite Verwendung von **226-3**c) auszusagen:

226-5(Satz)

*Aus "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f" und ...*

a) *... und "$A, B \in \mathsf{dom}\,\chi$"*
folgt "$\chi(A \cup B)_{-}\Box_{-}\chi(A \cap B) = \chi(A)_{-}\Box_{-}\chi(B)$".

b) *... und "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und "$N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"*
folgt "$\chi(A \cup N) = \chi(A)_{-}\Box_{-}\chi(N) = \chi(A)$".

c) *... und "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$" folgt "$\chi(A)_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(A)$".*

ALG-**Notation**.

Beweis **226-5** a) VS gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A, B \in \mathsf{dom}\,\chi)$.

1.1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f..."
folgt via **226-1(Def)**:
$$\chi \text{ ist } (\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])\mathbf{alg1} \text{ von } f.$$

1.2: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f..."
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

2: Aus VS gleich "$\ldots A, B \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus 1.2 "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

3: Aus 1.1 "χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f" und
aus 2 "$A, B \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **224-4**: $\chi(A \cup B)_{-}\Box_{-}\chi(A \cap B) = \chi(A)_{-}\Box_{-}\chi(B)$.

<u>Beweis **226-5**</u> `b)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A \in \mathsf{dom}\,\chi) \wedge (N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f\ldots$"
folgt via **226-1(Def)**:
$$\chi \text{ ist } (\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])\mathbf{alg1} \text{ von } f.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f\ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathsf{dom}\,\chi \ldots$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3:` Aus `1.1`"χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])\mathbf{alg1}$ von f",
aus `2`"$A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **224-4**: $\chi(A \cup N) = \chi(A)\,{}_{-}\Box_{-}\,\chi(N) = \chi(A)$.

`c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A \in \mathsf{dom}\,\chi)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f\ldots$"
folgt via **226-1(Def)**:
$$\chi \text{ ist } (\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])\mathbf{alg1} \text{ von } f.$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f\ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3:` Aus `1.1`"χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])\mathbf{alg1}$ von f" und
aus `2`"$A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **224-4**: $\chi(A)\,{}_{-}\Box_{-}\,\chi(0) = \chi(A)$.

$\Box$

226-6. Falls χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, dann ist der Definitionsbereich von χ gemäß **226-3**c) durch eine imposante Zeichenkette dargestellt. Dies motiviert Einiges über $\mathsf{dom}\,\chi$ *ohne* explizite Verwendung von **226-3**c) auszusagen:

226-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

Dann folgt:

a) $0 \in \mathsf{dom}\,\chi \neq 0$ *und* $\chi(0)$ *Menge.*

b) $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f)$.

c) $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$.

Beweis **226-6** a)

1: Via **221-2** gilt: $0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

2: Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

3: Aus 1"$0 \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 2"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $0 \in \mathsf{dom}\,\chi$.

4.1: Aus 3"$0 \in \mathsf{dom}\,\chi$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{dom}\,\chi$.

4.2: Aus 3"$0 \in \mathsf{dom}\,\chi$"

folgt via **17-5**: $\boxed{\chi(0) \text{ Menge}}$

5: Aus 3"$0 \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus 4.1"$0 \neq \mathsf{dom}\,\chi$"

folgt: $\boxed{0 \in \mathsf{dom}\,\chi \neq 0}$

b)

1: Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

2: Via **222-2** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f)$.

3: Aus 1"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 2"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f)$.

c)

1: Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

2: Via **222-2** gilt:
$\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[\{o\} \cup Q])$.

3: Aus 1"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 2"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[\{o\} \cup Q])$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[\{o\} \cup Q])$.

□

$$f \text{ Funktion: } f^{-1}[E],\ f^{-1}[\{p\}],\ f^{-1}[\{p\} \cup E],\ f^{-1}[E \setminus \{p\}].$$

Ersterstellung: 03/11/12 **Letzte Änderung: 02/02/13**

227-1. Hier wird Einiges über TeilKlassen oder Elemente von $f^{-1}[E]$ für Funktionen f ausgesagt:

<u>**227-1(Satz)**</u>

Aus "f Funktion" und ...

a) *... und "$D \subseteq f^{-1}[E]$" folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E \neq 0)$".*

b) *... und "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E)$" folgt "$D \subseteq f^{-1}[E]$".*

c) *... und "$q \in D \subseteq f^{-1}[E]$" folgt "$f(q) \in E \neq 0$".*

d) *... folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[E]) \Rightarrow (f(\alpha) \in E \neq 0)$".*

<u>Beweis **227-1**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (D \subseteq f^{-1}[E])$.

`Thema1` $\alpha \in D$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots D \subseteq f^{-1}[E]$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in f^{-1}[E]$.

`3:` Aus `2` "$\alpha \in f^{-1}[E]$" und
aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via **18-29**: $f(\alpha) \in E$.

`4:` Aus `3` "$f(\alpha) \in E$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

`5:` Aus `3` "$f(\alpha) \in E$" und
aus `4` "$0 \neq E$"
folgt: $f(\alpha) \in E \neq 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E \neq 0)$.

<u>Beweis **227-1**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E))$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in D$.

`2:` Aus `Thema1` "$\beta \in D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E)$"
folgt: $f(\beta) \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `2` "$f(\beta) \in E$"
folgt via **18-29**: $\beta \in f^{-1}[E]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (\beta \in f^{-1}[E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $D \subseteq f^{-1}[E]$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in D \subseteq f^{-1}[E])$.

Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots D \subseteq f^{-1}[E]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in D \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f(q) \in E \neq 0$.

`d)` `VS` gleich f Funktion.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in f^{-1}[E]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in f^{-1}[E]$" und
aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **18-29**: $f(\alpha) \in E$.

`3:` Aus `2` "$f(\alpha) \in E$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

`4:` Aus `2` "$f(\alpha) \in E$" und
aus `3` "$0 \neq E$"
folgt: $f(\alpha) \in E \neq 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[E]) \Rightarrow (f(\alpha) \in E \neq 0)$.

□

227-2. Nun werden, falls f eine Funktion ist, Aussagen über TeilKlassen oder Elemente von $f^{-1}[\{p\}]$ formuliert:

227-2(Satz)

Aus "f Funktion" und ...

a) *... und "$D \subseteq f^{-1}[\{p\}]$" folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = p$ Menge)".*

b) *... und "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$" und "$p \neq \mathcal{U}$" folgt "$D \subseteq f^{-1}[\{p\}]$".*

c) *... und "$q \in D \subseteq f^{-1}[\{p\}]$" folgt "$f(q) = p$ Menge".*

d) *... folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[\{p\}]) \Rightarrow (f(\alpha) = p$ Menge)".*

e) *... und "$q \in f^{-1}[\{p\}]$" folgt "$f(q) = p$ Menge".*

f) *... und "$f(q) = p \neq \mathcal{U}$" folgt "$q \in f^{-1}[\{p\}]$".*

Beweis **227-2** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (D \subseteq f^{-1}[\{p\}])$.

Thema1 $\alpha \in D$.

2: Aus VS gleich "f Funktion..." ,
aus VS gleich "... $D \subseteq f^{-1}[\{p\}]$" und
aus Thema1 "$\alpha \in D$"
folgt via **227-1**: $f(\alpha) \in \{p\}$.

3: Aus 2 "$f(\alpha) \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $f(\alpha) = p$ Menge.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = p \text{ Menge})$.

Beweis **227-2** `b)`
`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = p)) \wedge (p \neq \mathcal{U})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in D$.

`2:` Aus `Thema1`"$\beta \in D$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) = p) \ldots$"
folgt: $f(\beta) = p$.

`3:` Aus `2`"$f(\beta) = p$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \neq \mathcal{U}$"
folgt: $f(\beta) \neq \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$f(\beta) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $f(\beta)$ Menge.

`5:` Aus `2`"$f(\beta) = p$" und
aus `4`"$f(\beta)$ Menge"
folgt via **1-6**: $f(\beta) \in \{p\}$.

`6:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `5`"$f(\beta) \in \{p\}$"
folgt via **18-29**: $\beta \in f^{-1}[\{p\}]$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in D) \Rightarrow (\beta \in f^{-1}[\{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $D \subseteq f^{-1}[\{p\}]$.

`c) VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in D \subseteq f^{-1}[\{p\}])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in D \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots D \subseteq f^{-1}[\{p\}]$"
folgt via **0-4**: $q \in f^{-1}[\{p\}]$.

`2:` Aus `1`"$q \in f^{-1}[\{p\}]$" und
aus `VS` gleich "f Funktion..."
folgt via **18-29**: $f(q) \in \{p\}$.

`3:` Aus `2`"$f(q) \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $(f(q) = p) \wedge (p \text{ Menge})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $f(q) = p$ Menge.

<u>Beweis</u> **227-2** `d)` `VS` gleich f Funktion.

`1:` Via **0-6** gilt: $f^{-1}[\{p\}] \subseteq f^{-1}[\{p\}]$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `1` "$f^{-1}[\{p\}] \subseteq f^{-1}[\{p\}]$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[\{p\}]) \Rightarrow (f(\alpha) = p$ Menge$)$.

`e)` `VS` gleich $(f$ Funktion$) \wedge (q \in f^{-1}[\{p\}])$.

Aus `VS` gleich "f Funktion ..." und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in f^{-1}[\{p\}]$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $f(q) = p$ Menge.

`f)` `VS` gleich $(f$ Funktion$) \wedge (f(q) = p \neq \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f(q) = p \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \neq \mathcal{U}$"
folgt: $f(q) \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1` "$f(q) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $f(q)$ Menge.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots f(q) = p \ldots$" und
aus `2` "$f(q)$ Menge"
folgt via **1-6**: $f(q) \in \{p\}$.

`4:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `3` "$f(q) \in \{p\}$"
folgt via **18-29**: $q \in f^{-1}[\{p\}]$.

$\square$

227-3. Hier wird Einiges über TeilKlassen oder Elemente von $f^{-1}[\{p\}\cup D]$, wobei f ein Funktion ist, formuliert:

227-3(Satz)

Aus "f Funktion" und ...

a) ... *und* "$D \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E]$"
folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow ((f(\alpha) = p \text{ Menge}) \vee (f(\alpha) \in E \neq 0))$".

b) ... *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow ((f(\alpha) = p \neq \mathcal{U}) \vee (f(\alpha) \in E))$"
folgt "$D \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E]$".

c) ... *und* "$q \in D \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E]$"
folgt "$(f(q) = p \text{ Menge}) \vee (f(q) \in E \neq 0)$".

d) ... *folgt* "$\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[\{p\} \cup E])$
$\Rightarrow ((f(\alpha) = p \text{ Menge}) \vee (f(\alpha) \in E \neq 0))$".

e) ... *und* "$q \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$"
folgt "$(f(q) = p \text{ Menge}) \vee (f(q) \in E \neq 0)$".

f) ... *und* "$(f(q) = p \neq \mathcal{U}) \vee (f(q) \in E)$" *folgt* "$q \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$".

Beweis **227-3** `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (D \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E])$.

`Thema1` $\alpha \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$" und
aus `VS` gleich "f Funktion…"
folgt via **18-29**: $f(\alpha) \in \{p\} \cup E$.

`3:` Aus 2 "$f(\alpha) \in \{p\} \cup E$"
folgt via **2-2**: $(f(\alpha) \in \{p\}) \vee (f(\alpha) \in E)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $f(\alpha) \in \{p\}$.

Aus `3.1.Fall` "$f(\alpha) \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $f(\alpha) = p$ Menge.

`3.2.Fall` $f(\alpha) \in E$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "$f(\alpha) \in E$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

`5:` Aus `3.2.Fall` "$f(\alpha) \in E$" und
aus 4 "$0 \neq E$"
folgt: $f(\alpha) = E \neq 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(f(\alpha) = p \text{ Menge}) \vee (f(\alpha) \in E \neq 0).$$

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[\{p\} \cup E]) \Rightarrow ((f(\alpha) = p \text{ Menge}) \vee (f(\alpha) \in E \neq 0))$.

<u>Beweis **227-3**</u> `b)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall\alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow ((f(\alpha) = p \neq \mathcal{U}) \vee (f(\alpha) \in E)))$.

`Thema1` $\beta \in D$.

`2`: Aus `Thema1`“$\beta \in D$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall\alpha : (\alpha \in D)$
$\Rightarrow ((f(\alpha) = p \neq \mathcal{U}) \vee (f(\alpha) \in E))$”
folgt: $(f(\beta) = p \neq \mathcal{U}) \vee (f(\beta) \in E)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $f(\beta) = p \neq \mathcal{U}$.

`3`: Aus `2.1.Fall`“$f(\beta) = p \ldots$” und
aus `2.1.Fall`“$\ldots p \neq \mathcal{U}$”
folgt: $f(\beta) \neq \mathcal{U}$.

`4`: Aus `3`“$f(\beta) \neq \mathcal{U}$”
folgt via **17-5**: $f(\beta)$ Menge.

`5`: Aus `2.1.Fall`“$f(\beta) = p \ldots$” und
aus `4`“$f(\beta)$ Menge”
folgt via **1-6**: $f(\beta) \in \{p\}$.

`6`: Aus `5`“$f(\beta) \in \{p\}$”
folgt via **2-2**: $f(\beta) \in \{p\} \cup E$.

`7`: Aus `VS` gleich “f Funktion...” und
aus `6`“$f(\beta) \in \{p\} \cup E$”
folgt via **18-29**: $\beta \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

`2.2.Fall` $f(\beta) \in E$.

`3`: Aus `2.2.Fall`“$f(\beta) \in E$”
folgt via **2-2**: $f(\beta) \in \{p\} \cup E$.

`4`: Aus `VS` gleich “f Funktion...” und
aus `3`“$f(\beta) \in \{p\} \cup E$”
folgt via **18-29**: $\beta \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\beta \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (\beta \in D) \Rightarrow (\beta \in f^{-1}[\{p\} \cup E])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $D \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

Beweis **227-3** `c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in x \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E])$.

Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `VS` gleich "…$x \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E]$" und
aus `VS` gleich "…$q \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(f(q) = p \text{ Menge}) \vee (f(q) \in E \neq 0)$.

`d)` `VS` gleich f Funktion.

`1:` Via **0-6** gilt: $f^{-1}[\{p\} \cup E] \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `1` "$f^{-1}[\{p\} \cup E] \subseteq f^{-1}[\{p\} \cup E]$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[\{p\} \cup E]) \Rightarrow ((f(\alpha) = p \text{ Menge}) \vee (f(\alpha) \in E \neq 0)).$$

`e)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in f^{-1}[\{p\} \cup E])$.

Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "…$q \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(f(q) = p \text{ Menge}) \vee (f(q) \in E \neq 0)$.

Beweis **227-3** `f)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((f(q) = p \neq \mathcal{U}) \vee (f(q) \in E))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(f(q) = p \neq \mathcal{U}) \vee (f(q) \in E)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f(q) = p \neq \mathcal{U}$.

Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1.1.Fall` "$f(q) = p \neq \mathcal{U}$"
folgt via **227-2**: $q \in f^{-1}[\{p\}]$.

`1.2.Fall` $f(q) \in E$.

Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1.2.Fall` "$f(q) \in E$"
folgt via **18-29**: $q \in f^{-1}[E]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(q \in f^{-1}[\{p\}]) \vee (q \in f^{-1}[E])$.

Konsequenz via **2-2**: `A1` "$q \in (f^{-1}[\{p\}]) \cup (f^{-1}[E])$"

`2:` Via **9-8** gilt: $(f^{-1}[\{p\}]) \cup (f^{-1}[E]) = f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

`3:` Aus `A1` gleich "$q \in (f^{-1}[\{p\}]) \cup (f^{-1}[E])$" und
aus 2 "$(f^{-1}[\{p\}]) \cup (f^{-1}[E]) = f^{-1}[\{p\} \cup E]$"
folgt: $q \in f^{-1}[\{p\} \cup E]$.

□

227-4. Hier wird Einiges über TeilKlassen oder Elemente von $f^{-1}[E \setminus \{p\}]$, wobei f ein Funktion ist, ausgesagt:

227-4(Satz)

Aus "f Funktion" und ...

a) ... *und* "$D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$"
folgt "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in E \neq 0)$".

b) ... *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in E)$" *folgt* "$D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$".

c) ... *und* "$q \in D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$" *folgt* "$p \neq f(q) \in E \neq 0$".

d) ... *folgt* "$\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in E \neq 0)$".

e) ... *und* "$q \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]$" *folgt* "$p \neq f(q) \in E \neq 0$".

f) ... *und* "$p \neq f(q) \in E$" *folgt* "$q \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]$".

Beweis **227-4** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}])$.

Thema1 $\alpha \in D$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in D$" und
aus VS gleich "$\ldots D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]$.

3: Aus 2 "$\alpha \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]$" und
aus VS gleich "f Funktion..."
folgt via **18-29**: $f(\alpha) \in E \setminus \{p\}$.

4: Aus 3 "$f(\alpha) \in E \setminus \{p\}$"
folgt via **5-15**: $p \neq f(\alpha) \in E$.

5: Aus 4 "$\ldots f(\alpha) \in E$"
folgt via **0-20**: $0 \neq E$.

6: Aus 4 "$p \neq f(\alpha) \in E$" und
aus 5 "$0 \neq E$"
folgt: $p \neq f(\alpha) \in E \neq 0$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in E \neq 0)$.

Beweis **227-4** `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in E))$.

`Thema1` $\beta \in D$.

`2:` Aus `Thema1`“$\beta \in D$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in E)$”
folgt: $p \neq f(\beta) \in E$.

`3:` Aus `2`“$p \neq f(\beta) \in E$”
folgt via **5-15**: $f(\beta) \in E \setminus \{p\}$.

`4:` Aus `VS` gleich “f Funktion…” und
aus `3`“$\ldots f(\beta) \in E \setminus \{p\}$”
folgt via **18-29**: $\beta \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in D) \Rightarrow (\beta \in f^{-1}[E \setminus \{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}])$.

Aus `VS` gleich “f Funktion…”,
aus `VS` gleich “$\ldots D \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$” und
aus `VS` gleich “$\ldots q \in D \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \neq f(q) \in E \neq 0$.

`d)` `VS` gleich f Funktion.

`1:` Via **0-6** gilt: $f^{-1}[E \setminus \{p\}] \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$.

`2:` Aus `VS` gleich “f Funktion …” und
aus `1`“$f^{-1}[E \setminus \{p\}] \subseteq f^{-1}[E \setminus \{p\}]$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\forall \alpha : (\alpha \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in E \neq 0)$.

`e)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (q \in f^{-1}[E \setminus \{p\}])$.

Aus `VS` gleich “f Funktion…” und
aus `VS` gleich “$\ldots q \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $p \neq f(q) \in E \neq 0$.

Beweis **227-4** `f)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \neq f(q) \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \neq f(q) \in E$"
folgt via **5-15**: $f(q) \in E \setminus \{p\}$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "$f(q) \in E \setminus \{p\}$"
folgt via **18-29**: $q \in f^{-1}[E \setminus \{p\}]$.

$\square$

227-5. Mit der vorliegenden Darstellung von $\{p\} \cup f[f^{-1}[\{p\} \cup E]]$ vereinfacht sich später Einiges:

227-5(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$\{p\} \cup f[f^{-1}[\{p\} \cup E]] = \{p\} \cup (E \cap \mathsf{ran}\, f)$".

Beweis **227-5** `VS` gleich f Funktion.

1: Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **18-33**: $f[f^{-1}[\{p\} \cup E]] = (\{p\} \cup E) \cap \mathsf{ran}\, f$.

2:
$$\{p\} \cup f[f^{-1}[\{p\} \cup E]]$$
$$\stackrel{1}{=} \{p\} \cup ((\{p\} \cup E) \cap \mathsf{ran}\, f)$$
$$\stackrel{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} (\{p\} \cup (\{p\} \cup E)) \cap (\{p\} \cup \mathsf{ran}\, f)$$
$$\stackrel{\mathbf{AG}\cup}{=} ((\{p\} \cup \{p\}) \cup E) \cap (\{p\} \cup \mathsf{ran}\, f)$$
$$\stackrel{\mathbf{2-14}}{=} (\{p\} \cup E) \cap (\{p\} \cup \mathsf{ran}\, f)$$
$$\stackrel{\mathbf{DG}\cup\cap}{=} \{p\} \cup (E \cap \mathsf{ran}\, f).$$

3: Aus 2
folgt: $\{p\} \cup f[f^{-1}[\{p\} \cup E]] = \{p\} \cup (E \cap \mathsf{ran}\, f)$.

□

227-6. Ergänzend zu **11-19**, **18-29** wird hier eine Äquivalenz $f(p) \in f[f^{-1}[E]]$ betreffend - wobei f eine Funktion ist - etabliert:

227-6(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $f(p) \in f[f^{-1}[E]]$.

`ii)` $p \in f^{-1}[E]$.

Beweis **227-6** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $f(p) \in f[f^{-1}[E]]$.

`1`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion"
folgt via **18-33**: $f[f^{-1}[E]] = E \cap \mathsf{ran}\, f$.

`2`: Aus `VS` gleich "$f(p) \in f[f^{-1}[E]]$" und
aus `1` "$f[f^{-1}[E]] = E \cap \mathsf{ran}\, f$"
folgt: $f(p) \in E \cap \mathsf{ran}\, f$.

`3`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `2` "$f(p) \in E \cap \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **18-29**: $p \in f^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\, f]$.

`4`: Via **11-19** gilt: $f^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\, f] = f^{-1}[E]$.

`5`: Aus `3` "$p \in f^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\, f]$" und
aus `4` "$f^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\, f] = f^{-1}[E]$"
folgt: $p \in f^{-1}[E]$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $p \in f^{-1}[E]$.

`1`: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `VS` gleich "$p \in f^{-1}[E]$"
folgt via **18-29**: $p \in f^{-1}[E] \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2`: Aus `1` "$p \in f^{-1}[E] \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(p) \in f[f^{-1}[E]]$.

□

227-7. Anwendungsfreundlich Vorliegendes ergibt sich aus **227-6**:

227-7(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $f(p) \in f[f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]]$.

`ii)` $p \in f^{-1}[E \cup C]$.

`iii)` $p \in f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$.

<u>Beweis</u> **227-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $f(p) \in f[f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]]$.

1: Via **9-8** gilt: $f^{-1}[E \cup C] = f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$.

2: Aus `VS` gleich "$f(p) \in f[f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]]$" und
aus 1 "$f^{-1}[E \cup C] = f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$"
folgt: $f(p) \in f[f^{-1}[E \cup C]]$.

3: Aus →) "f Funktion" und
aus 2 "$f(p) \in f[f^{-1}[E \cup C]]$"
folgt via **227-6**: $p \in f^{-1}[E \cup C]$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $p \in f^{-1}[E \cup C]$.

1: Via **9-8** gilt: $f^{-1}[E \cup C] = f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$.

2: Aus `VS` gleich "$p \in f^{-1}[E \cup C]$" und
aus 1 "$f^{-1}[E \cup C] = f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$"
folgt: $p \in f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $p \in f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$.

1: Via **9-8** gilt: $f^{-1}[E \cup C] = f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$.

2: Aus `VS` gleich "$p \in f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$" und
aus 1 "$f^{-1}[E \cup C] = f^{-1}[E] \cup f^{-1}[C]$"
folgt: $p \in f^{-1}[E \cup C]$.

3: Aus →) "f Funktion" und
aus 2 "$p \in f^{-1}[E \cup C]$"
folgt via **227-6**: $p \in f[f^{-1}[E \cup C]]$.

□

$$x. \in Q \text{ und } Q \in .x \text{ und } x. \in .y \text{ und } x. \notin Q \text{ und } Q \notin .x \text{ und } x. \notin .y.$$
$$x. = Q \text{ und } Q = .x \text{ und } x. = .y \text{ und } x. \neq Q \text{ und } Q \neq .x \text{ und } x. \neq .y.$$

Ersterstellung: 04/01/13 **Letzte Änderung: 04/07/13**

228-1. Die Beschreibung des "punktweisen Verhaltens" von Klassen - meist: Funktionen - auf bestimmten Klassen wird durch die vorliegenden, auf $\in$ und $=$ abzielenden Begriffs-Bildungen belebt. Mit der jeweiligen Einschränkung auf $\mathsf{dom}\, x$ (oder $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$) werden sinn-entstellende Aussagen wie "$x. = p$ auf $(\mathsf{dom}\, x)^C$ für *beliebige* p" vermieden:

...

...

228-1(Definition)

1) "$x. \in Q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q)$.

2) "$Q \in .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta)$.

3) "$x. \in .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$ und
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$.

4) "$x. \notin Q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)$.

5) "$Q \notin .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)$.

6) "$x. \notin .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\,)$ und
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)$.

7) "$x. = Q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q)$.

8) "$Q = .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q = \beta)$.

9) "$x. = .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$ und
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$.

10) "$x. \neq Q$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q)$.

11) "$Q \neq .x$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ und
$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \neq \beta)$.

12) "$x. \neq .y$ **auf** E" genau dann, wenn $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$ und
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma)$.

228-2. Hier wird Einiges über $\neg(x. \in Q \text{ auf } E)$ und Ähnliches ausgesagt:

228-2(Satz)

a) *“$\neg(x. \in Q\ \mathit{auf}\ E)$” genau dann, wenn “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$” oder “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \notin Q)$”.*

b) *Aus “$p \in E$” und “$(p, q) \in x$” und “$q \notin Q$” folgt “$\neg(x. \in Q\ \mathit{auf}\ E)$”.*

c) *Aus “$\neg(Q \in .x\ \mathit{auf}\ E)$” genau dann, wenn “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$” oder “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (Q \notin \Psi)$”.*

d) *Aus “$p \in E$” und “$(p, q) \in x$” und “$Q \notin q$” folgt “$\neg(Q \in .x\ \mathit{auf}\ E)$”.*

e) *Aus “$\neg(x. \in .y\ \mathit{auf}\ E)$” genau dann, wenn “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$” oder “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y$” oder “$\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \notin \Phi)$”.*

f) *Aus “$p \in E$” und “$(p, q) \in x$” und “$(p, r) \in$” und “$q \notin r$” folgt “$\neg(x. \in .y\ \mathit{auf}\ E)$”.*

g) *Aus “$\neg(x. \notin Q\ \mathit{auf}\ E)$” genau dann, wenn “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$” oder “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \in Q)$”.*

h) *Aus “$p \in E$” und “$(p, q) \in x$” und “$q \in Q$” folgt “$\neg(x. \notin Q\ \mathit{auf}\ E)$”.*

i) *Aus “$\neg(Q \notin .x\ \mathit{auf}\ E)$” genau dann, wenn “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$” oder “$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (Q \in \Psi)$”.*

j) *Aus “$p \in E$” und “$(p, q) \in x$” und “$Q \in q$” folgt “$\neg(Q \notin .x\ \mathit{auf}\ E)$”.*

k) *Aus “$\neg(x. \notin .y\ \mathit{auf}\ E)$” genau dann, wenn “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$” oder “$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y$” oder “$\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \in \Phi)$”.*

l) *Aus “$p \in E$” und “$(p, q) \in x$” und “$(p, r) \in y$” und “$q \in r$” folgt “$\neg(x. \notin .y\ \mathit{auf}\ E)$”.*

<u>Beweis</u> **228-2** `a)`

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(x. \in Q \text{ auf } E)$
$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q)))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \in Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow (\neg((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q))))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x. \in Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q))))$.

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(x. \in Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q))))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\neg(x. \in Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\neg(\Psi \in Q))))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(\neg(x. \in Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \notin Q)))$.

`b)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q \notin Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q \notin Q)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \notin Q)$.

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\neg(x. \in Q \text{ auf } E)$.

Beweis **228-2** `c)`

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(Q \in .x \text{ auf } E)$
$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta)))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow (\neg((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta))))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta))))$.

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta))))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\neg(Q \in \Psi))))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (Q \notin \Psi)))$.

`d) VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (Q \notin q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (Q \notin q)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (Q \notin \Psi)$.

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bweisenen `c)`: $\neg(Q \in .x \text{ auf } E)$.

<u>Beweis</u> **228-2** `e)`

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(x. \in .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma))).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)))).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)))).$

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \Leftrightarrow (E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)).$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)))).$

`6:` Via **223-10** gilt: $(E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)).$

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)))).$

`8:` Aus `7`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee (\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\neg(\Psi \in \Phi)))).$

`9:` Aus `8`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee (\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \notin \Phi))).$

`f)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q \notin r).$

`1:` Aus `VS` gleich “$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q \notin r)$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \notin \Phi).$

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewisenen `e)` : $\neg(x. \in .y \text{ auf } E).$

<u>Beweis **228-2** `g)`</u>

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(x. \notin Q \text{ auf } E)$

$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \notin Q \text{ auf } E))$

$\Leftrightarrow (\neg((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q))))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x. \notin Q \text{ auf } E))$

$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q))))$.

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(x. \notin Q \text{ auf } E))$

$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q))))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\neg(x. \in Q \text{ auf } E))$

$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\neg(\Psi \notin Q))))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(\neg(x. \in Q \text{ auf } E))$

$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \in Q)))$.

`h)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q \in Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q \in Q)$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \in Q)$.

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\neg(x. \notin Q \text{ auf } E)$.

Beweis **228-2** `i)`

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(Q \notin .x \text{ auf } E)$
$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta))).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow (\neg((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)))).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)))).$

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x).$

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)))).$

`6:` Aus `5`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\neg(Q \notin \Psi)))).$

`7:` Aus `6`
folgt: $(\neg(Q \in .x \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (Q \in \Psi))).$

`j)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (Q \in q).$

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (Q \in q)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (Q \in \Psi).$

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $\neg(Q \notin .x \text{ auf } E).$

Beweis **228-2** `k)`

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(x. \notin .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma))))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma))))$.

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \Leftrightarrow (E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma))))$.

`6:` Via **223-10** gilt: $(E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y))$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma))))$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee (\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\neg(\Psi \notin \Phi))))$.

`9:` Aus `8`
folgt: $(\neg(x. \in .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee (\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \in \Phi)))$.

`l)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q \in r)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q \in r)$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \in \Phi)$.

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewiesenen `k)`: $\neg(x. \notin .y \text{ auf } E)$.

□

228-3. Es gilt $Q = .x$ auf E genau dann, wenn $x. = Q$ auf E, so dass nach **228-3** nur noch *eine* dieser beiden Notationen - nämlich "$x. = Q$ auf E" - zum Einsatz kommt. Bei $Q \neq .x$ auf E und $x. \neq Q$ auf E liegen die Dinge ähnlich und es wird nach **228-3** nur mehr "$x. \neq Q$ auf E" verwendet. Klarer Weise ist "$x. = .y$ auf E" genau dann der Fall, wenn "$y. = .x$ auf E" und "$x. \neq .y$ auf E" gilt genau dann, wenn "$y. \neq .x$ auf E" .

228-3(Satz)

a) *"$Q = .x$ auf E" genau dann, wenn "$x. = Q$ auf E".*

b) *"$Q \neq .x$ auf E" genau dann, wenn "$x. \neq Q$ auf E".*

c) *"$x. = .y$ auf E" genau dann, wenn "$y. = .x$ auf E".*

d) *"$x. \neq .y$ auf E" genau dann, wenn "$y. \neq .x$ auf E".*

Beweis **228-3** a) $Q = .x$ auf E

$$\overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q = \beta))$$

$$\Leftrightarrow (E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q))$$

$$\overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x. = Q \text{ auf } E.$$

b) $Q \neq .x$ auf E

$$\overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \neq \beta))$$

$$\Leftrightarrow (E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q))$$

$$\overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} x. \neq Q \text{ auf } E.$$

Beweis **228-3** c) $x. = .y$ auf $E \overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = \gamma))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\gamma = \beta))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \gamma, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in y) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x)) \Rightarrow (\beta = \gamma))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in y) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x)) \Rightarrow (\beta = \gamma))$

$\overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} y. = .x$ auf E.

d) $x. \neq .y$ auf $E \overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\gamma \neq \beta))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \gamma, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in y) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))$

$\Leftrightarrow \quad (E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in y) \wedge ((\alpha, \gamma) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))$

$\overset{\textbf{228-1(Def)}}{\Leftrightarrow} y. \neq .x$ auf E.

$\square$

228-4. Nun wird Einiges über "$\neg(x. = Q$ auf $E)$" und Ähnliches formuliert:

228-4(Satz)

a) *Aus* "$\neg(x. = Q \text{ auf } E)$" *genau dann, wenn* "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \neq Q)$".

b) *Aus* "$p \in E$" *und* "$(p, q) \in x$" *und* "$q \neq Q$" *folgt* "$\neg(x. = Q \text{ auf } E)$".

c) *Aus* "$\neg(x. = .y \text{ auf } E)$" *genau dann, wenn* "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y$" *oder* "$\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \neq \Phi)$".

d) *Aus* "$p \in E$" *und* "$(p, q) \in x$" *und* "$(p, r) \in y$" *und* "$q \neq r$" *folgt* "$\neg(x. = .y \text{ auf } E)$".

e) *Aus* "$\neg(x. \neq Q \text{ auf } E)$" *genau dann, wenn* "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi = Q)$".

f) *Aus* "$p \in E$" *und* "$(p, q) \in x$" *und* "$q = Q$" *folgt* "$\neg(x. \neq Q \text{ auf } E)$".

g) *Aus* "$\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)$" *genau dann, wenn* "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x$" *oder* "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y$" *oder* "$\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi = \Phi)$".

h) *Aus* "$p \in E$" *und* "$(p, q) \in x$" *und* "$(p, r) \in y$" *und* "$q = r$" *folgt* "$\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)$".

Beweis **228-4** a)

1: Via **228-1(Def)** gilt: $(x. = Q \text{ auf } E)$
$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q)))$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x. = Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow (\neg((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q))))$.

3: Aus 2
folgt: $(\neg(x. = Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q))))$.

4: Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $(\neg(x. = Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q))))$.

6: Aus 5
folgt: $(\neg(x. = Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\neg(\Psi = Q))))$.

7: Aus 6
folgt: $(\neg(x. = Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \neq Q)))$.

b) VS gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q \neq Q)$.

1: Aus VS gleich "$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q \neq Q)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi \neq Q)$.

2: Aus 1
folgt via des bereits bewiesenen a): $\neg(x. = Q \text{ auf } E)$.

<u>Beweis</u> **228-4** c)

1: Via **228-1(Def)** gilt: $(x.=.y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma))).$

2: Aus 1
folgt: $(\neg(x.=.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)))).$

3: Aus 2
folgt: $(\neg(x.=.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \vee(\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)))).$

4: Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \Leftrightarrow (E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)).$

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $(\neg(x.=.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \vee(\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)))).$

6: Via **223-10** gilt: $(E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)).$

7: Aus 5 und
aus 6
folgt: $(\neg(x.=.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee(\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)))).$

8: Aus 7
folgt: $(\neg(x.=.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\neg(\Psi = \Phi)))).$

9: Aus 8
folgt: $(\neg(x.=.y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y)) \vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \neq \Phi))).$

d) VS gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q \neq r).$

1: Aus VS gleich "$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q \neq r)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi \neq \Phi).$

2: Aus 1
folgt via des bereits bewiesenen c): $\neg(x.=.y \text{ auf } E).$

<u>Beweis</u> **228-4** `e)`

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(x. \neq Q \text{ auf } E)$
$\Leftrightarrow ((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q)))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \neq Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow (\neg((E \subseteq \mathsf{dom}\, x) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q))))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x. \neq Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q))))$.

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, x)) \Leftrightarrow (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(x. \neq Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\neg(\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q))))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\neg(x. \neq Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\neg(\Psi \neq Q))))$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(\neg(x. \neq Q \text{ auf } E))$
$\Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi = Q)))$.

`f) VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q = Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge (q = Q)$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Psi = Q)$.

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\neg(x. \neq Q \text{ auf } E)$.

<u>Beweis</u> **228-4** `g)`

`1:` Via **228-1(Def)** gilt: $(x. \neq .y \text{ auf } E) \Leftrightarrow ((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma)))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg((E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\wedge(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)))$
$\vee(\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))))$.

`4:` Via **0-3** gilt: $(\neg(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))) \Leftrightarrow (E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$
$\vee(\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))))$.

`6:` Via **223-10** gilt: $(E \not\subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)) \Leftrightarrow ((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y))$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $(\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y))$
$\vee(\neg(\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma))))$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y))$
$\vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\neg(\Psi \neq \Phi))))$.

`9:` Aus `8`
folgt: $(\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (((E \not\subseteq \mathsf{dom}\, x) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, y))$
$\vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi = \Phi)))$.

`h)` `VS` gleich $(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q = r)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(p \in E) \wedge ((p, q) \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (q = r)$”
folgt: $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Psi = \Phi)$.

`2:` Aus `1`
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\neg(x. \neq .y \text{ auf } E)$.

□

228-5. Der leeren Menge kommt bei "punktweisen Verhalten auf E" eine ganz spezielle Rolle zu. Auch wird der Unterschied - etwa - zwischen "$x. \neq Q$ auf E" und "$\neg(x. = Q$ auf $E)$" dokumentiert. Abkürzend für Beweisführungen für die leere Menge wird ab sofort "0quodlibet" eingeführt, wonach auf alle Elemente der leeren Menge beliebige Aussagen zutreffen:

228-5(Satz)

a) $x. \in Q$ *auf* 0.

b) $Q \in .x$ *auf* 0.

c) $x. \in .y$ *auf* 0.

d) $x. \notin Q$ *auf* 0.

e) $Q \notin .x$ *auf* 0.

f) $x. \notin .y$ *auf* 0.

g) $x. = Q$ *auf* 0.

h) $x. = .y$ *auf* 0.

i) $x. \neq Q$ *auf* 0.

j) $x. \neq .y$ *auf* 0.

Beweis **228-5** a)

1.1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

1.2: Via 0quodlibet gilt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q)$.

2: Aus 1.1"$0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus 1.2"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \in Q$ auf 0.

b)

1.1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

1.2: Via 0quodlibet gilt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta)$.

2: Aus 1.1"$0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus 1.2"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \in .x$ auf 0.

Beweis **228-5** c)

1.1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

1.2: Via 0quodlibet gilt:
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$.

2: Aus 1.1 "$0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus 1.2 "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \in .y$ auf 0.

d)

1.1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

1.2: Via 0quodlibet gilt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)$.

2: Aus 1.1 "$0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus 1.2 "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \notin Q$ auf 0.

e)

1.1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

1.2: Via 0quodlibet gilt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)$.

2: Aus 1.1 "$0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus 1.2 "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \notin .x$ auf 0.

f)

1.1: Via **0-18** gilt: $0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

1.2: Via 0quodlibet gilt:
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)$.

2: Aus 1.1 "$0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$" und
aus 1.2 "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \notin .y$ auf 0.

Beweis **228-5** `g)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, x.$

`1.2:` Via 0quodlibet gilt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q).$

`2:` Aus `1.1`“$0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus `1.2`“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q)$”
folgt via **228-1(Def)**: $x. = Q$ auf 0.

`h)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y).$

`1.2:` Via 0quodlibet gilt:
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma).$

`2:` Aus `1.1`“$0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$” und
aus `1.2`“$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$”
folgt via **228-1(Def)**: $x. = .y$ auf 0.

`i)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq \mathsf{dom}\, x.$

`1.2:` Via 0quodlibet gilt: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q).$

`2:` Aus `1.1`“$0 \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus `1.2`“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q)$”
folgt via **228-1(Def)**: $x. \neq Q$ auf 0.

`j)`

`1.1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y).$

`1.2:` Via 0quodlibet gilt:
$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma).$

`2:` Aus `1.1`“$0 \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$” und
aus `1.2`“$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in 0) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma)$”
folgt via **228-1(Def)**: $x. \neq .y$ auf 0.

□

228-6. Punktweises Verhalten auf E vererbt sich auf TeilKlasse von E:

228-6(Satz)

Aus "$e \subseteq E$" und ...

a) ... *und* "$x. \in Q$ *auf* E" *folgt* "$x. \in Q$ *auf* e".

b) ... *und* "$Q \in .x$ *auf* E" *folgt* "$Q \in .x$ *auf* e".

c) ... *und* "$x. \in .y$ *auf* E" *folgt* "$x. \in .y$ *auf* e".

d) ... *und* "$x. \notin Q$ *auf* E" *folgt* "$x. \notin Q$ *auf* e".

e) ... *und* "$Q \notin .x$ *auf* E" *folgt* "$Q \notin .x$ *auf* e".

f) ... *und* "$x. \notin .y$ *auf* E" *folgt* "$x. \notin .y$ *auf* e".

g) ... *und* "$x. = Q$ *auf* E" *folgt* "$x. = Q$ *auf* e".

h) ... *und* "$x. = .y$ *auf* E" *folgt* "$x. = .y$ *auf* e".

i) ... *und* "$x. \neq Q$ *auf* E" *folgt* "$x. \neq Q$ *auf* e".

j) ... *und* "$x. \neq .y$ *auf* E" *folgt* "$x. \neq .y$ *auf* e".

<u>Beweis **228-6**</u> `a)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x. \in Q \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \in Q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \in Q$ auf E",
aus `2`"$\alpha \in E$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta \in Q$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \in Q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \in Q$ auf e.

<u>Beweis **228-6**</u> `b)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (Q \in .x \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots Q \in .x$ auf E”
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$e \subseteq E \ldots$” und
aus `1.1`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **0-6**: `A1` | “$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$”

> `Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in e \ldots$” und
> aus `VS` gleich “$e \subseteq E \ldots$”
> folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.
>
> `3:` Aus `VS` gleich “$\ldots Q \in .x$ auf E”,
> aus `2`“$\alpha \in E$” und
> aus `Thema1.2`“$\ldots (\alpha, \beta) \in x$”
> folgt via **228-1(Def)**: $Q \in \beta$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \in \beta)$”
folgt via **228-1(Def)**: $Q \in .x$ auf e.

Beweis **228-6** `c)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x. \in .y \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \in .y$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \in .y$ auf E",
aus `2`"$\alpha \in E$",
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x \ldots$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta \in \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma \in y)) \Rightarrow (\beta \in \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \in .y$ auf e.

<u>Beweis **228-6**</u> `d)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x . \notin Q \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x . \notin Q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$"

> `Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.
>
> `2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
> aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
> folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.
>
> `3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x . \notin Q$ auf E",
> aus `2`"$\alpha \in E$" und
> aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
> folgt via **228-1(Def)**: $\beta \notin Q$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x . \notin Q$ auf e.

Beweis **228-6** `e)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (Q \notin .x \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots Q \notin .x$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots Q \notin .x$ auf E",
aus 2"$\alpha \in E$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \notin \beta$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (Q \notin \beta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \notin .x$ auf e.

Beweis **228-6** `f)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x. \notin .y)$ auf $E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \notin .y$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \notin .y$ auf E",
aus `2`"$\alpha \in E$",
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x \ldots$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta \notin \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma \in y)) \Rightarrow (\beta \notin \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \notin .y$ auf e.

Beweis **228-6** `g)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x. = Q \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. = Q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. = Q$ auf E",
aus 2"$\alpha \in E$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta = Q$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta = Q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. = Q$ auf e.

Beweis **228-6** `h)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x. = .y \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. = .y$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. = .y$ auf E",
aus 2"$\alpha \in E$",
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x \ldots$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma \in y)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. = .y$ auf e.

<u>Beweis **228-6**</u> `i)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x. \neq Q \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \neq Q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \neq Q$ auf E",
aus `2`"$\alpha \in E$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta \neq Q$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq Q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \neq Q$ auf e.

Beweis **228-6** `j)` `VS` gleich $(e \subseteq E) \wedge (x. \neq .y \text{ auf } E)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \neq .y$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$" und
aus `1.1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"
folgt via **0-6**: `A1` | "$e \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$"

`Thema1.2` $(\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in e \ldots$" und
aus `VS` gleich "$e \subseteq E \ldots$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x. \neq .y$ auf E",
aus 2"$\alpha \in E$",
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x \ldots$" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in y$"
folgt via **228-1(Def)**: $\beta \neq \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma) \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$e \subseteq \mathsf{dom}\, x$" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in e) \wedge ((\alpha, \beta) \in x) \wedge ((\alpha, \gamma \in y)) \Rightarrow (\beta \neq \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \neq .y$ auf e.

$\square$

228-7. Aus $x. = .x$ auf E folgt $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$. $x. \neq .x$ auf E gilt genau dann, wenn $E = 0$:

<u>**228-7(Satz)**</u>

a) *Aus "$x. = .x$ auf E" folgt "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$".*

b) *$x. \neq .x$ auf 0.*

c) *"$x. \neq .x$ auf E" genau dann, wenn "$E = 0$".*

d) *"$\neg(x. \neq .x$ auf $E)$" genau dann, wenn "$0 \neq E$".*

<u>Beweis **228-7**</u> `a)` `VS` gleich $x. = .x$ auf E.

1: Aus `VS` gleich "$x. = .x$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$.

2: Via **2-14** gilt: $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x) = \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus 1"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$" und
aus 2"$(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x) = \mathsf{dom}\, x$"
folgt: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`b)`

Via **228-5** gilt: $x. \neq .x$ auf 0.

Beweis **228-7** c) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x. \neq .x$ auf E.

1: Es gilt: $(0 \neq E) \vee (E = 0)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $0 \neq E$.

2: Aus 1.1.Fall“$0 \neq E$”
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

3: Aus VS gleich “$x. \neq .x$ auf E”
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathrm{dom}\, x) \cap (\mathrm{dom}\, x)$.

4: Aus 2“$\ldots \Omega \in E$” und
aus 3“$E \subseteq (\mathrm{dom}\, x) \cap (\mathrm{dom}\, x)$”
folgt via **0-4**: $\Omega \in (\mathrm{dom}\, x) \cap (\mathrm{dom}\, x)$.

5: Aus 4“$\Omega \in (\mathrm{dom}\, x) \cap (\mathrm{dom}\, x)$”
folgt via **2-2**: $\Omega \in \mathrm{dom}\, x$.

6: Aus 5“$\Omega \in \mathrm{dom}\, x$”
folgt via **7-7**: $\exists \Psi : (\Omega, \Psi) \in x$.

7: Aus VS gleich “$x. \neq .x$ auf E”,
aus 2“$\ldots \Omega \in E$”,
aus 6“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$” und
aus 6“$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$”
folgt via **228-1(Def)**: $\Psi \neq \Psi$.

8: Es gilt 7“$\Psi \neq \Psi$”.
Es gilt “$\Psi = \Psi$”.
Ex falso quodlibet folgt: $E = 0$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $E = 0$.

c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $E = 0$.

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $x. \neq .x$ auf 0.

2: Aus 1“$x. \neq .x$ auf 0” und
aus VS gleich “$E = 0$”
folgt: $x. \neq .x$ auf E.

Beweis **228-7** `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(x. \neq .x \text{ auf } E) \Leftrightarrow (E = 0)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x. \neq .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (\neg(E = 0))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\neg(x. \neq .x \text{ auf } E)) \Leftrightarrow (0 \neq E)$.

$\square$

228-8. Punktweises Gleichsein auf E bringt einige spezielle Erkenntnisse mit sich:

228-8(Satz)

a) *Aus* "$x.=Q$ *auf* E" *folgt* "$E=0$" *oder* "$(0\neq E)\wedge(Q\ \mathit{Menge})$".

b) *Aus* "$x.=Q$ *auf* E" *und* "$0\neq E$"
folgt "Q *Menge*" *und* "$Q\in\mathsf{ran}\,x$".

c) *Aus* "$x.=Q$ *auf* E" *und* "Q *Unmenge*" *folgt* "$E=0$".

d) *Aus* "$x.=Q$ *auf* E" *folgt* "$E\subseteq x^{-1}[\{Q\}]$".

<u>Beweis **228-8**</u> `a)` `VS` gleich $x. = Q$ auf E.

`1`: Es gilt: $(E = 0) \vee (0 \neq E)$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E = 0$.

`1.2.Fall` $0 \neq E$.

`2`: Aus `1.2.Fall` "$0 \neq E$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`3`: Aus `VS` gleich "$x. = Q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`4`: Aus `2`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `3`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

`5`: Aus `4`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-2**: $\exists \Psi : (\Psi \text{ Menge}) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

`6`: Aus `VS` gleich "$x. = Q$ auf E",
aus `2`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `5`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\Psi = Q$.

`7`: Aus `6`"$\Psi = Q$" und
aus `5`"$\ldots \Psi$ Menge$\ldots$"
folgt: Q Menge.

`8`: Aus `1.2.Fall` "$0 \neq E$" und
aus `7`"Q Menge"
folgt: $(0 \neq E) \wedge (Q \text{ Menge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(E = 0) \vee ((0 \neq E) \wedge (Q \text{ Menge}))$.

`b)` `VS` gleich $(x. = Q \text{ auf } E) \wedge (0 \neq E)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq E$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in E$.

`2`: Aus `VS` gleich "$x. = Q$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

`3`: Aus `1`"$\ldots \Omega \in E$" und
aus `2`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 3"$\Omega \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in \mathsf{ran}\, x) \wedge ((\Omega, \Psi) \in x)$.

5: Aus VS gleich "$x. = Q$ auf E",
aus 1"$\ldots \Omega \in E$" und
aus 4"$\ldots (\Omega, \Psi) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\Psi = Q$.

6: Aus 5"$\Psi = Q$" und
aus 4"$\ldots \Psi \in \mathsf{ran}\, x \ldots$"
folgt: $\boxed{Q \in \mathsf{ran}\, x}$

7: Aus 6"$Q \in \mathsf{ran}\, x$"
folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{Q \text{ Menge}}$

<u>Beweis **228-8**</u> `c)` `VS` gleich $(x. = Q \text{ auf } E) \wedge (Q \text{ Unmenge})$.

`1:` Es gilt: $(0 \neq E) \vee (E = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x. = Q$ auf $E \dots$" und
aus `1.1.Fall` "$0 \neq E$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: Q Menge.

`3:` Es gilt `2`"Q Menge".
Es gilt `VS` gleich "$\dots Q$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $E = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $E = 0$.

Beweis **228-8** `d)` `VS` gleich $x. = Q$ auf E.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in E$.
2: Aus `VS` gleich "$x. = Q$ auf E" folgt via **228-1(Def)**:	$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.
3: Aus `Thema1`"$\alpha \in E$" und aus 2"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" folgt via **0-4**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.
4: Aus 3"$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$" folgt via **7-2**:	$\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x$.
5: Aus `VS` gleich "$x. = Q$ auf E", aus `Thema1`"$\alpha \in E$" und aus 4"$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" folgt via **228-1(Def)**:	$\Omega = Q$.
6: Aus 5"$\Omega = Q$" und aus 4"$\ldots \Omega$ Menge$\ldots$" folgt via **1-6**:	$\Omega \in \{Q\}$.
7: Aus 4"$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" und aus 6"$\Omega \in \{Q\}$" folgt via **11-22**:	$\alpha \in x^{-1}[\{Q\}]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1}[\{Q\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq x^{-1}[\{Q\}]$.

$\square$

228-9. Interessanter Weise folgt aus $x.\in Q$ auf E die Inklusion $E\subseteq x^{-1}[Q]$:

228-9(Satz)

Aus "$x.\in Q$ *auf* E" *folgt* "$E\subseteq x^{-1}[Q]$".

Beweis **228-9** `VS` gleich $x.\in Q$ auf E.

`Thema1` $\alpha\in E$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x.\in Q$ auf E"
folgt via **228-1(Def)**: $E\subseteq \mathsf{dom}\,x$.

`3:` Aus `Thema1`"$\alpha\in E$" und
aus `2`"$E\subseteq \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **0-4**: $\alpha\in \mathsf{dom}\,x$.

`4:` Aus `3`"$\alpha\in \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega:(\alpha,\Omega)\in x$.

`5:` Aus `VS` gleich "$x.\in Q$ auf E",
aus `Thema1`"$\alpha\in E$" und
aus `4`"$\ldots(\alpha,\Omega)\in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\Omega\in Q$.

`6:` Aus `4`"$(\alpha,\Omega)\in x$" und
aus `5`"$\Omega\in Q$"
folgt via **11-22**: $\alpha\in x^{-1}[Q]$.

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha:(\alpha\in E)\Rightarrow(\alpha\in x^{-1}[Q])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E\subseteq x^{-1}[Q]$.

□

228-10. $x. \in Q$ auf E und $x. \neq p$ auf E reichen für $E \subseteq x^{-1}[Q \setminus \{p\}]$:

228-10(Satz)

Aus "$x. \in Q$ auf E" und "$x. \neq p$ auf E" folgt "$E \subseteq x^{-1}[Q \setminus \{p\}]$".

Beweis **228-10** VS gleich $(x. \in Q \text{ auf } E) \wedge (x. \neq p \text{ auf } E)$.

Thema1 $\alpha \in E$.

2: Aus VS gleich "$x. \in Q$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus Thema1"$\alpha \in E$" und
aus 2"$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 3"$\alpha \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in x$.

5.1: Aus VS gleich "$x. \in Q$ auf $E \ldots$",
aus Thema1"$\alpha \in E$" und
aus 4"$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\Omega \in Q$.

5.2: Aus VS gleich "$\ldots x. \neq p$ auf E",
aus Thema1"$\alpha \in E$" und
aus 4"$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$"
folgt via **228-1(Def)**: $\Omega \neq p$.

6: Aus 5.1"$\Omega \in Q$" und
aus 5.2"$\Omega \neq p$"
folgt via **5-15**: $\Omega \in Q \setminus \{p\}$.

7: Aus 4"$\ldots (\alpha, \Omega) \in x$" und
aus 6"$\Omega \in Q \setminus \{p\}$"
folgt via **11-22**: $\alpha \in x^{-1}[Q \setminus \{p\}]$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (\alpha \in x^{-1}[Q \setminus \{p\}])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq x^{-1}[Q \setminus \{p\}]$.

$\square$

228-11. Aus $p \notin \mathsf{ran}\, x$ und $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ folgt $x. \neq p$ auf E:

228-11(Satz)

a) *Aus "$p \notin \mathsf{ran}\, x$" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" folgt "$x. \neq p$ auf E".*

b) *Aus "$p \notin \mathsf{ran}\, x$" folgt "$x. \neq p$ auf $\mathsf{dom}\, x$".*

Beweis **228-11** a) VS gleich $(p \notin \mathsf{ran}\, x) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

Thema1.1 $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$.

2: Aus Thema1.1"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{ran}\, x$.

3: Aus 2"$\beta \in \mathsf{ran}\, x$" und
aus VS gleich "$p \notin \mathsf{ran}\, x \ldots$"
folgt via **0-1**: $\beta \neq p$.

Ergo Thema1.1: A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq p)$"

1.2: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \neq p)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \neq p$ auf E.

b) VS gleich $p \notin \mathsf{ran}\, x$.

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus VS gleich "$p \notin \mathsf{ran}\, x$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $x. \neq p$ auf $\mathsf{dom}\, x$.

□

228-12. Aus $Q \cap \mathsf{ran}\, x = 0$ und $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$ folgt $x. \notin Q$ auf E:

<u>228-12(Satz)</u>

a) *Aus "$Q \cap \mathsf{ran}\, x = 0$" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$" folgt "$x. \notin Q$ auf E".*

b) *Aus "$Q \cap \mathsf{ran}\, x = 0$" folgt "$x. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, x$".*

<u>Beweis</u> **228-12** a) `VS` gleich $(Q \cap \mathsf{ran}\, x = 0) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, x)$.

`Thema1.1` $(\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)$

2: Aus `Thema1.1`"$\ldots (\alpha, \beta) \in x$"
folgt via **7-5**: $\beta \in \mathsf{ran}\, x$.

3: Aus 2"$\beta \in \mathsf{ran}\, x$" und
aus `VS` gleich "$Q \cap \mathsf{ran}\, x = 0 \ldots$"
folgt via **161-1**: $\beta \notin Q$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)$"

1.2: Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in E) \wedge ((\alpha, \beta) \in x)) \Rightarrow (\beta \notin Q)$"
folgt via **228-1(Def)**: $x. \notin Q$ auf E.

b) `VS` gleich $Q \cap \mathsf{ran}\, x = 0$.

1: Via **0-6** gilt: $\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus `VS` gleich "$Q \cap \mathsf{ran}\, x = 0$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $x. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, x$.

$\square$

f Funktion:
Punktweises Verhalten von f.

Ersterstellung: 10/01/13 **Letzte Änderung: 04/07/13**

229-1. Für Funktionen f nimmt das "punktweise Verhalten" bezüglich $\in, \notin$ vertraute Form an:

229-1(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q)$" folgt "$f. \in Q$ auf E".*

b) *Aus "f Funktion" und "$f. \in Q$ auf E" und "$x \in E$" folgt "$f(x) \in Q$".*

c) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \in f(\alpha))$" folgt "$Q \in .f$ auf E".*

d) *Aus "f Funktion" und "$Q \in .f$ auf E" und "$x \in E$" folgt "$Q \in f(x)$".*

e) *Aus "f, g Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, g$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in g(\alpha))$" folgt "$f. \in .g$ auf E".*

f) *Aus "f, g Funktion" und "$f. \in .g$ auf E" und "$x \in E$" folgt "$f(x) \in g(x)$".*

g) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin Q)$" folgt "$f. \notin Q$ auf E".*

h) *Aus "f Funktion" und "$f. \notin Q$ auf E und "$x \in E$" folgt "$f(x) \notin Q$".*

i) *Aus "f Funktion" und "Q Menge" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha))$" folgt "$Q \notin .f$ auf E".*

j) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha))$" folgt "$Q \notin .f$ auf E".*

k) *Aus "f Funktion" und "$Q \notin .f$ auf E" und "$x \in E$" folgt "$Q \notin f(x)$".*

l) *Aus "f, g Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin g(\alpha))$" folgt "$f. \notin .g$ auf E".*

m) *Aus "f, g Funktion" und "$f. \notin .g$ auf E" und "$x \in E$" folgt "$f(x) \notin g(x)$".*

<u>Beweis **229-1**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q))$.

`Thema1.1` $\beta \in E$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in E$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q)$”
folgt: $f(\beta) \in Q$.

`3:` Aus `2`“$f(\beta) \in Q$”
folgt via **ElementAxiom**: $f(\beta)$ Menge.

`4:` Aus `3`“$f(\beta)$ Menge”
folgt via **17-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` “$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$”

`Thema1.2` $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q)$”
folgt: $f(\beta) \in Q$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “f Funktion…” und
aus `Thema1.2`“$\ldots (\beta, \gamma) \in f$”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`“$\gamma = f(\beta)$” und
aus `2.1`“$f(\beta) \in Q$”
folgt: $\gamma \in Q$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma \in Q)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$” und
aus `A2` gleich “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma \in Q)$”
folgt via **228-1(Def)**: $f. \in Q$.

<u>Beweis **229-1**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f. \in Q \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in Q$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1` "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `2` "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in Q$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `3` "$(x, f(x)) \in f$"
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) \in Q$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \in f(\alpha)))$.

> `Thema1.1` $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in E \ldots$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \in f(\alpha))$"
> folgt: $Q \in f(\beta)$.
>
> `2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
> aus `Thema1.1` "$\ldots (\beta, \gamma) \in f$"
> folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.
>
> `3:` Aus `2.2` "$\gamma = f(\beta)$" und
> aus `2.1` "$Q \in f(\beta)$"
> folgt: $Q \in \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (Q \in \gamma)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (Q \in \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \in .f$ auf E.

<u>Beweis **229-1**</u> `d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (Q \in .f \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots Q \in .f$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots Q \in .f$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `3`"$(x, f(x)) \in f$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \in f(x)$.

`e)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, g) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in g(\alpha)))$.

`Thema1.1` $\beta \in E$. `2:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E$" und aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in g(\alpha))$" folgt: $f(\beta) \in g(\beta)$. `3:` Aus `2`"$f(\beta) \in g(\beta)$" folgt via **ElementAxiom**: $f(\beta)$ Menge. `4:` Aus `3`"$f(\beta)$ Menge" folgt via **17-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta \in \mathsf{dom}\, f)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

...

Beweis **229-1** `e)`
`VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, g) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in g(\alpha)))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in g(\alpha))$"
folgt: $f(\beta) \in g(\beta)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion..." und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \gamma) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion..." und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \delta) \in g$"
folgt via **18-20**: $\delta = g(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$" und
aus `2.1`"$f(\beta) \in g(\beta)$"
folgt: $\gamma \in g(\beta)$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \in g(\beta)$" und
aus `2.3`"$\delta = g(\beta)$"
folgt: $\gamma \in \delta$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	"$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma \in \delta)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, g \ldots$"
folgt via **2-12**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`2:` Aus `1.3`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma \in \delta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $f. \in .g$ auf E.

<u>Beweis **229-1**</u> `f)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (f. \in .g \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in .g$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1` "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **0-4**: $x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`3:` Aus `2` "$x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **2-2**: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, g)$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion..." und
aus `3` "$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion..." und
aus `3` "$\ldots x \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **18-22**: $(x, g(x)) \in g$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in .g$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$",
aus `4.1` "$(x, f(x)) \in f$" und
aus `4.2` "$(x, g(x)) \in g$"
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) \in g(x)$.

Beweis **229-1** `g)`
`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin Q))$.

`Thema1.1` $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin Q)$”
folgt: $f(\beta) \notin Q$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “f Funktion…” und
aus `Thema1.1`“$\ldots (\beta, \gamma) \in f$”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`“$\gamma = f(\beta)$” und
aus `2.1`“$f(\beta) \notin Q$”
folgt: $\gamma \notin Q$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma \notin Q)$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma \notin Q)$”
folgt via **228-1(Def)**: $f. \notin Q$ auf E.

`h)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f. \notin Q \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots f. \notin Q$ auf $E \ldots$”
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in E$” und
aus `1`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **0-4**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich “f Funktion…” und
aus `2`“$x \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich “$\ldots f. \notin Q$ auf $E \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots x \in E$” und
aus `3`“$(x, f(x)) \in f$”
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) \notin Q$.

Beweis **229-1** i)

VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (Q \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha)))$.

1.1: Es gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, f)) \vee (E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

wfFallunterscheidung

1.1.1.Fall $\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots Q$ Menge$\ldots$"
folgt via **0-22**: $Q \in \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.1.1.Fall "$\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$"
folgt via **0-3**: $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus 2.2 "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \mathsf{dom}\, f)$.

4.1: Aus 3 "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha))$"
folgt: $Q \notin f(\Omega)$.

4.2: Aus 3 "$\ldots \Omega \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(\Omega) = \mathcal{U}$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $Q \notin \mathcal{U}$.

6: Es gilt 2.1 "$Q \in \mathcal{U}$".
Es gilt 5 "$Q \notin \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

Ende wfFallunterscheidung In beiden Fällen gilt: A1 | "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

...

Beweis **229-1** `i)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (Q \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha)))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha))$"
folgt: $Q \notin f(\beta)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion... " und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \gamma) \in f$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$" und
aus `2.1`"$Q \notin f(\beta)$"
folgt: $Q \notin \gamma$.

Ergo `Thema1.2`: $\boxed{\texttt{A2} \,\big|\, \text{“}\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (Q \notin \gamma)\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (Q \notin \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \notin .f$ auf E.

<u>Beweis **229-1**</u> `j)`
`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha)))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (Q \notin f(\alpha))$"
folgt: $Q \notin f(\beta)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `Thema1.1`"$\ldots (\beta, \gamma) \in f$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$" und
aus `2.1`"$Q \notin f(\beta)$"
folgt: $Q \notin \gamma$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (Q \notin \gamma)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (Q \notin \gamma)$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \notin .f$ auf E.

`k)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (Q \notin .f \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots Q \notin .f$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots Q \notin .f$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `3`"$(x, f(x)) \in f$"
folgt via **228-1(Def)**: $Q \notin f(x)$.

<u>Beweis</u> **229-1** `1)`

`VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin g(\alpha)))$.

`1.1:` Es gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, g)) \vee (E \subseteq \mathsf{dom}\, g)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, g)$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"$\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, g)$" folgt via **0-3**: $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g$.

`3:` Aus `2`"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g$" folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \mathsf{dom}\, g)$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$" folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin g(\alpha))$" folgt: $f(\Omega) \notin g(\Omega)$.

`4.3:` Aus `3`"$\ldots \Omega \notin \mathsf{dom}\, g$" folgt via **17-4**: $g(\Omega) = \mathcal{U}$.

`5.1:` Aus `4.1`"$\Omega \in \mathsf{dom}\, f$" folgt via **17-5**: $f(\Omega)$ Menge.

`5.2:` Aus `4.2`"$f(\Omega) \notin g(\Omega)$" und aus `4.3`"$g(\Omega) = \mathcal{U}$" folgt: $f(\Omega) \notin \mathcal{U}$.

`6:` Aus `5.2`"$f(\Omega) \notin \mathcal{U}$" folgt via **0-23**: $f(\Omega)$ Unmenge.

`7:` Es gilt `5.1`"$f(\Omega)$ Menge".
Es gilt `6`"$f(\Omega)$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $E \subseteq \mathsf{dom}\, g$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$E \subseteq \mathsf{dom}\, g$"

...

Beweis **229-1** `1)`
`VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin g(\alpha)))$.

...

`Thema1.2` $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \notin g(\alpha))$”
folgt: $f(\beta) \notin g(\beta)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$f \ldots$ Funktion...” und
aus `Thema1.2`“$\ldots (\beta, \gamma) \in f \ldots$”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots g$ Funktion...” und
aus `Thema1.2`“$\ldots (\beta, \delta) \in g$”
folgt via **18-20**: $\delta = g(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`“$\gamma = f(\beta)$” und
aus `2.1`“$f(\beta) \notin g(\beta)$”
folgt: $\gamma \notin g(\beta)$.

`4:` Aus `3`“$\gamma \notin g(\beta)$” und
aus `2.3`“$\delta = g(\beta)$”
folgt: $\gamma \notin \delta$.

Ergo `Thema1.2`:

`A2`	“$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma \notin \delta)$”

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$” und
aus `A1` gleich “$E \subseteq \mathsf{dom}\, g$”
folgt via **2-12**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`2:` Aus `1.3`“$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$” und
aus `A2` gleich “$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma \notin \delta)$”
folgt via **228-1(Def)**: $f. \notin .g$ auf E.

<u>Beweis **229-1**</u> `m)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (f. \notin .g \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in .g$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **0-4**: $x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`3:` Aus `2`"$x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **2-2**: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, g)$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion$\ldots$" und
aus `3`"$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion$\ldots$" und
aus `3`"$\ldots x \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **18-22**: $(x, g(x)) \in g$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \notin .g$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$",
aus `4.1`"$(x, f(x)) \in f$" und
aus `4.2`"$(x, g(x)) \in g$"
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) \notin g(x)$.

$\square$

229-2. Nur scheinbar aus der Reihe wird nun gezeigt, dass aus $E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cup (\mathsf{dom}\,y)$ und aus $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha))$ die Aussage $E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$ folgt:

229-2(Satz)

Aus "$E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cup (\mathsf{dom}\,y)$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha))$" *folgt* "$E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$".

Beweis **229-2**

`VS` gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\,x) \cup (\mathsf{dom}\,y)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha)))$.

`Thema1` $\beta \in E$.

2: Aus `Thema1.1`"$\beta \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha))$"
folgt: $x(\beta) = y(\beta)$.

3: Aus `Thema1`"$\beta \in E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq (\mathsf{dom}\,f) \cup (\mathsf{dom}\,g) \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\beta \in \mathsf{dom}\,f) \vee (\beta \in \mathsf{dom}\,g)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\beta \in \mathsf{dom}\,x$.

4: Aus `3.1.Fall`"$\beta \in \mathsf{dom}\,x$"
folgt via **17-5**: $x(\beta)$ Menge.

5: Aus 4"$x(\beta)$ Menge" und
aus 2"$x(\beta) = y(\beta)$"
folgt: $y(\beta)$ Menge.

6: Aus 5"$y(\beta)$ Menge"
folgt via **17-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\,y$.

7: Aus `3.1.Fall`"$\beta \in \mathsf{dom}\,x$" und
aus 6"$\beta \in \mathsf{dom}\,y$"
folgt via **2-2**: $\beta \in (\mathsf{dom}\,x) \cap (\mathsf{dom}\,y)$.

...

...

<u>Beweis **229-2**</u>
`VS` gleich $(E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cup (\mathsf{dom}\, y)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (x(\alpha) = y(\alpha)))$.

...

`Thema1` $\beta \in E$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $\beta \in \mathsf{dom}\, y$.

4: Aus `3.2.Fall` "$\beta \in \mathsf{dom}\, y$" folgt via **17-5**: $y(\beta)$ Menge.

5: Aus 4 "$y(\beta)$ Menge" und aus 2 "$x(\beta) = y(\beta)$" folgt: $x(\beta)$ Menge.

6: Aus 5 "$x(\beta)$ Menge" folgt via **17-5**: $\beta \in \mathsf{dom}\, x$.

7: Aus 6 "$\beta \in \mathsf{dom}\, x$" und aus `3.2.Fall` "$\beta \in \mathsf{dom}\, y$" folgt via **2-2**: $\beta \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\beta \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \beta : (\beta \in E) \Rightarrow (\beta \in (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

□

229-3. Für Funktionen f nimmt das "punktweise Verhalten" bezüglich $=, \neq$ vertraute Form an:

229-3(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "p Menge" und*
"$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$" *folgt "$f. = p$ auf E".*

b) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und*
"$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$" *folgt "$f. = p$ auf E".*

c) *Aus "f Funktion" und "$f. = p$ auf E" und "$x \in E$"*
folgt "$f(x) = p$".

d) *Aus "f, g Funktion" und "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cup (\mathsf{dom}\, g)$"*
und "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$" folgt "$f. = .g$ auf E".

e) *Aus "f, g Funktion" und "$f. = .g$ auf E" und "$x \in E$"*
folgt "$f(x) = g(x)$".

f) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und*
"$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq p)$" *folgt "$f. \neq p$ auf E".*

g) *Aus "f Funktion" und "$f. \neq p$ auf E" und "$x \in E$"*
folgt "$f(x) \neq p$".

h) *Aus "f, g Funktion" und "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"*
und "$\forall\alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq g(\alpha))$" folgt "$f. \neq .g$ auf E".

i) *Aus "f, g Funktion" und "$f. \neq .g$ auf E" und "$x \in E$"*
folgt "$f(x) \neq g(x)$".

<u>Beweis **229-3**</u> `a)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p))$.

`1.1:` Es gilt: $(\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, f)) \vee (E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $\neg(E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p$ Menge$\ldots$"
folgt via **0-17**: $p \neq \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.1.Fall`"$\neq (E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$"
folgt via **0-3**: $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `2.2`"$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-5**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\Omega \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$"
folgt: $f(\Omega) = p$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Omega \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(\Omega) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $p = \mathcal{U}$.

`6:` Es gilt `2.1`"$p \neq \mathcal{U}$".
Es gilt `5`"$p = \mathcal{U}$".
Ex falso quodlibet folgt: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"

...

Beweis **229-3** `a)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \text{ Menge}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)).$

...

`Thema1.2` $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f).$

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$\beta \in E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$”
folgt: $f(\beta) = p.$

`2.2:` Aus `VS` gleich “f Funktion...” und
aus `Thema1.2`“$\ldots (\beta, \gamma) \in f$”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta).$

`3:` Aus `2.2`“$\gamma = f(\beta)$” und
aus `2.1`“$f(\beta) = p$”
folgt: $\gamma = p.$

Ergo `Thema1.2`: `A2` “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma = p)$”

`1.3:` Aus `A1` gleich “$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$” und
aus `A2` gleich “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma = p)$”
folgt via **228-1(Def)**: $f. = p$ auf E.

<u>Beweis **229-3**</u> `b)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$"
folgt: $f(\beta) = p$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \gamma) \in f$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$" und
aus `2.1`"$f(\beta) = p$"
folgt: $\gamma = p$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \,\big|\, \text{“}\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma = p)\text{”}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma = p)$"
folgt via **228-1(Def)**: $f. = p$ auf E.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f. = p \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. = p$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `2`"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. = p$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `3`"$(x, f(x)) \in f$"
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) = p$.

<u>Beweis **229-3**</u> `d) VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cup (\mathsf{dom}\, g))$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha)))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cup (\mathsf{dom}\, g) \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"
folgt via **229-2**: `A1` | "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"

> `Thema1.2` $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)$.
>
> `2.1:` Aus `Thema1.2`"$\beta \in E \ldots$" und
> aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = g(\alpha))$"
> folgt: $f(\beta) = g(\beta)$.
>
> `2.2:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion..." und
> aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \gamma) \in f \ldots$"
> folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.
>
> `2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion..." und
> aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \delta) \in g$"
> folgt via **18-20**: $\delta = g(\beta)$.
>
> `3:` Aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$" und
> aus `2.1`"$f(\beta) = g(\beta)$"
> folgt: $\gamma = g(\beta)$.
>
> `4:` Aus `3`"$\gamma = g(\beta)$" und
> aus `2.3`"$\delta = g(\beta)$"
> folgt: $\gamma = \delta$.

Ergo `Thema1.2`:
`A2` | "$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma = \delta)$"

`1.3:` Aus `A1` gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma = \delta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $f. = .g$ auf E.

<u>Beweis</u> **229-3** `e)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (f. = .g \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. = .g$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **0-4**: $x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`3:` Aus `2`"$x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **2-2**: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, g)$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…" und
aus `3`"$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion…" und
aus `3`"$\ldots x \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **18-22**: $(x, g(x)) \in g$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. = .g$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$",
aus `4.1`"$(x, f(x)) \in f$" und
aus `4.2`"$(x, g(x)) \in g$"
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) = g(x)$.

Beweis **229-3** `f)`

`VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq p))$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in E \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq p)$”
folgt: $f(\beta) = p$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “f Funktion…” und
aus `Thema1.2`“$\ldots (\beta, \gamma) \in f$”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`“$\gamma = f(\beta)$” und
aus `2.1`“$f(\beta) \neq p$”
folgt: $\gamma \neq p$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma \neq p)$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta, \gamma : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f)) \Rightarrow (\gamma \neq p)$”
folgt via **228-1(Def)**: $f. \neq p$ auf E.

`g)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f. \neq p \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots f. \neq p$ auf $E \ldots$”
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in E$” und
aus `1`“$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **0-4**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus `VS` gleich “f Funktion…” und
aus `2`“$x \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4:` Aus `VS` gleich “$\ldots f. \neq p$ auf $E \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots x \in E$” und
aus `3`“$(x, f(x)) \in f$”
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) \neq p$.

Beweis **229-3** `h)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g))$
$\wedge(\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq g(\alpha)))$.

`Thema1.1` $(\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`"$\beta \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq g(\alpha))$"
folgt: $f(\beta) \neq g(\beta)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f ... Funktion... " und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \gamma) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion... " und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \delta) \in g$"
folgt via **18-20**: $\delta = g(\beta)$.

`3:` Aus `2.2`"$\gamma = f(\beta)$" und
aus `2.1`"$f(\beta) \neq g(\beta)$"
folgt: $\gamma \neq g(\beta)$.

`4:` Aus `3`"$\gamma \neq g(\beta)$" und
aus `2.3`"$\delta \neq g(\beta)$"
folgt: $\gamma \neq \delta$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1` "$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma \neq \delta)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in E) \wedge ((\beta, \gamma) \in f) \wedge ((\beta, \delta) \in g)) \Rightarrow (\gamma \neq \delta)$"
folgt via **228-1(Def)**: $f. \neq .g$ auf E.

<u>Beweis</u> **229-3** `i)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (f. \neq .g \text{ auf } E) \wedge (x \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \neq .g$ auf $E \ldots$"
folgt via **228-1(Def)**: $E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$" und
aus `1`"$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **0-4**: $x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$.

`3:` Aus `2`"$x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$"
folgt via **2-2**: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (x \in \mathsf{dom}\, g)$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion$\ldots$" und
aus `3`"$x \in \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **18-22**: $(x, f(x)) \in f$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion$\ldots$" und
aus `3`"$\ldots x \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **18-22**: $(x, g(x)) \in g$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \neq .g$ auf $E \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E$",
aus `4.1`"$(x, f(x)) \in f$" und
aus `4.2`"$(x, g(x)) \in g$"
folgt via **228-1(Def)**: $f(x) \neq g(x)$.

$\square$

229-4. Nun wird Einiges über $\neg(f. \in Q$ auf $E)$ und $\neg(f. \notin Q$ auf $E)$ Ähnliches für Funktionen ausgesagt:

229-4(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$\neg(f. \in Q$ auf $E)$"
folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \notin Q)$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) \notin Q$"
folgt "$\neg(f. \in Q$ auf $E)$".*

c) *Aus "f Funktion" und "$\neg(Q \in .f$ auf $E)$"
folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (Q \notin f(\Omega))$".*

d) *Aus "f Funktion" und "$x \in E$" und "$Q \notin f(x)$"
folgt "$\neg(Q \in .f$ auf $E)$".*

e) *Aus "f, g Funnktion" und "$\neg(f. \in .g$ auf $E)$"
folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g$"
oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \notin g(\Omega))$".*

f) *Aus "f, g Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) \notin g(x)$"
folgt "$\neg(f. \in .g$ auf $E)$".*

g) *Aus "f Funktion" und "$\neg(f. \notin Q$ auf $E)$"
folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \in Q)$".*

h) *Aus "f Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) \in Q$"
folgt "$\neg(f. \notin Q$ auf $E)$".*

i) *Aus "f Funktion" und "$\neg(Q \notin .f$ auf $E)$"
folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (Q \in f(\Omega))$".*

j) *Aus "f Funktion" und "$x \in E$" und "$Q \in f(x)$"
folgt "$\neg(Q \notin .f$ auf $E)$".*

k) *Aus "f, g Funnktion" und "$\neg(f. \notin .g$ auf $E)$"
folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g$"
oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \in g(\Omega))$".*

l) *Aus "f, g Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) \in g(x)$"
folgt "$\neg(f. \notin .g$ auf $E)$".*

<u>Beweis **229-4**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. \in Q \text{ auf } E)).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(f. \in Q \text{ auf } E)$"
folgt via **228-2**:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi \notin Q)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f.$

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi \notin Q).$

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega).$

`3:` Aus `2` "$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots \Psi \notin Q$"
folgt: $f(\Omega) \notin Q.$

`4:` Aus `1.2.Fall` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2.Fall` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `3` "$f(\Omega) \notin Q$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \notin Q).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \notin Q)).$$

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) \notin Q).$

`1:` Es gilt: $(f. \in Q \text{ auf } E) \vee (\neg(f. \in Q \text{ auf } E)).$

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. \in Q \text{ auf } E.$

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$",
aus `1.1.Fall` "$f. \in Q$ auf E" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E \ldots$"
folgt via **229-1**: $f(x) \in Q.$

`3:` Es gilt `2` "$f(x) \in Q$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots f(x) \notin Q$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. \in Q \text{ auf } E).$

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. \in Q \text{ auf } E).$

Beweis **229-4** `c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\neg(Q \in .f \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(Q \in .f \text{ auf } E)$"
folgt via **228-2**:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (Q \notin \Psi)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (Q \notin \Psi)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1.2.Fall` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`3:` Aus 2 "$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots Q \notin \Psi$"
folgt: $Q \notin f(\Omega)$.

`4:` Aus `1.2.Fall` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2.Fall` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 3 "$Q \notin f(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (Q \notin f(\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (Q \notin f(\Omega))).$$

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (Q \notin f(x))$.

`1:` Es gilt: $(Q \in .f \text{ auf } E) \vee (\neg(Q \in .f \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $Q \in .f \text{ auf } E$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion...",
aus `1.1.Fall` "$Q \in .f \text{ auf } E$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E \ldots$"
folgt via **229-1**: $Q \in f(x)$.

`3:` Es gilt 2 "$Q \in f(x)$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots Q \notin f(x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(Q \in .f \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(Q \in .f \text{ auf } E)$.

<u>Beweis **229-4**</u> `e)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. \in .g \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(f. \in .g \text{ auf } E)$"
folgt via **228-2**: $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$
$\vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi \notin \Phi))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi \notin \Phi)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion…" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots (\Omega, \Phi) \in g \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Phi = g(\Omega)$.

`3:` Aus `2.1`"$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \Psi \notin \Phi$"
folgt: $f(\Omega) \notin \Phi$.

`4:` Aus `3`"$f(\Omega) \notin \Phi$" und
aus `2.2`"$\Phi = g(\Omega)$"
folgt: $f(\Omega) \notin g(\Omega)$.

`5:` Aus `1.2.Fall`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4`"$f(\Omega) \notin g(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \notin g(\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \notin g(\Omega)))$.

<u>Beweis **229-4**</u> `f)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) \notin g(x))$.

`1:` Es gilt: $(f. \in .g \text{ auf } E) \vee (\neg(f. \in .g \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. \in .g$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich " f, g Funktion... ",
aus `1.1.Fall` " $f. \in .g$ auf E" und
aus `VS` gleich " $\ldots x \in E \ldots$ "
folgt via **229-1**: $f(x) \in g(x)$.

`3:` Es gilt 2" $f(x) \in g(x)$ " .
Es gilt `VS` gleich " $\ldots f(x) \notin g(x)$ " .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. \in .g \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. \in .g \text{ auf } E)$.

`g)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. \notin Q \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich " $\ldots \neg(f. \notin Q \text{ auf } E)$ "
folgt via **228-2**:

$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi \in Q)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi \in Q)$.

`2:` Aus `VS` gleich " f Funktion... " und
aus `1.2.Fall` " $\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`3:` Aus 2" $\Psi = f(\Omega)$ " und
aus `1.2.Fall` " $\ldots \Psi \in Q$"
folgt: $f(\Omega) \in Q$.

`4:` Aus `1.2.Fall` " $\exists \Omega \ldots$" ,
aus `1.2.Fall` " $\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 3" $f(\Omega) \in Q$ "
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \in Q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \in Q)).$$

Beweis **229-4** `h)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) \in Q)$.

`1:` Es gilt: $(f. \notin Q \text{ auf } E) \vee (\neg(f. \notin Q \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. \notin Q$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `1.1.Fall` "$f. \notin Q$ auf E" und
aus `VS` gleich "…$x \in E$…"
folgt via **229-1**: $f(x) \notin Q$.

`3:` Es gilt 2"$f(x) \notin Q$".
Es gilt `VS` gleich "…$f(x) \in Q$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. \notin Q \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. \notin Q \text{ auf } E)$.

`i)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\neg(Q \notin .f \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "…$\neg(Q \notin .f$ auf $E)$"
folgt via **228-2**:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (Q \in \Psi)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (Q \in \Psi)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1.2.Fall` "…$(\Omega, \Psi) \in f$…"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`3:` Aus 2"$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall` "…$Q \in \Psi$"
folgt: $Q \in f(\Omega)$.

`4:` Aus `1.2.Fall` "$\exists \Omega$…",
aus `1.2.Fall` "…$\Omega \in E$…" und
aus 3"$Q \in f(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (Q \in f(\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (Q \in f(\Omega))).$$

<u>Beweis</u> **229-4** `j)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (Q \in f(x))$.

`1:` Es gilt: $(Q \notin .f \text{ auf } E) \vee (\neg(Q \notin .f \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $Q \notin .f$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `1.1.Fall` "$Q \notin .f$ auf E" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E \ldots$"
folgt via **229-1**: $Q \notin f(x)$.

`3:` Es gilt 2"$Q \notin f(x)$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots Q \in f(x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(Q \notin .f \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(Q \notin .f \text{ auf } E)$.

□

Beweis **229-4** `k)` `VS` gleich $(f,g \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. \notin .g \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(f. \notin .g \text{ auf } E)$"
folgt via **228-2**: $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$
$\vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi \in \Phi))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi \in \Phi)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion$\ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion$\ldots$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots (\Omega, \Phi) \in g \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Phi = g(\Omega)$.

`3:` Aus `2.1` "$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots \Psi \in \Phi$"
folgt: $f(\Omega) \in \Phi$.

`4:` Aus `3` "$f(\Omega) \in \Phi$" und
aus `2.2` "$\Phi = g(\Omega)$"
folgt: $f(\Omega) \in g(\Omega)$.

`5:` Aus `1.2.Fall` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2.Fall` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4` "$f(\Omega) \in g(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \in g(\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \in g(\Omega)))$.

<u>Beweis **229-4**</u> `1)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) \in g(x))$.

`1:` Es gilt: $(f. \notin .g \text{ auf } E) \vee (\neg(f. \notin .g \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. \notin .g$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion…",
aus `1.1.Fall` "$f. \notin .g$ auf E" und
aus `VS` gleich "…$x \in E$…"
folgt via **229-1**: $f(x) \notin g(x)$.

`3:` Es gilt `2`"$f(x) \notin g(x)$".
Es gilt `VS` gleich "…$f(x) \in g(x)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. \notin .g \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. \notin .g \text{ auf } E)$.

□

229-5. Nun wird Einiges über $\neg(f. = p \text{ auf } E)$ und $\neg(f. \neq p \text{ auf } E)$ und Ähnliches für Funktionen f ausgesagt:

229-5(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$\neg(f. = p$ auf $E)$" folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \neq p)$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) \neq p$" folgt "$\neg(f. = p$ auf $E)$".*

c) *Aus "f, g Funnktion" und "$\neg(f. = .g$ auf $E)$" folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \neq g(\Omega))$".*

d) *Aus "f, g Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) \neq g(x)$" folgt "$\neg(f. = .g$ auf $E)$".*

e) *Aus "f Funktion" und "$\neg(f. \neq p$ auf $E)$" folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) = p)$".*

f) *Aus "f Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) = p$" folgt "$\neg(f. \neq p$ auf $E)$".*

g) *Aus "f, g Funnktion" und "$\neg(f. \neq .g$ auf $E)$" folgt "$E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$" oder $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g$" oder "$\exists\Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) = g(\Omega))$".*

h) *Aus "f, g Funktion" und "$x \in E$" und "$f(x) = g(x)$" folgt "$\neg(f. \neq .g$ auf $E)$".*

Beweis **229-5** `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. = p \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(f. = p \text{ auf } E)$"
folgt via **228-4**:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi \neq p)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi \neq p)$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1.2.Fall`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`3:` Aus `2`"$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \Psi \neq p$"
folgt: $f(\Omega) \neq p$.

`4:` Aus `1.2.Fall`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `3`"$f(\Omega) \neq p$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \neq p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \neq p)).$$

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) \neq p)$.

`1:` Es gilt: $(f. = p \text{ auf } E) \vee (\neg(f. = p \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. = p$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion...",
aus `1.1.Fall`"$f. = p$ auf E" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E \ldots$"
folgt via **229-3**: $f(x) = p$.

`3:` Es gilt `2`"$f(x) = p$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots f(x) \neq p$".
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. = p \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. = p \text{ auf } E)$.

Beweis **229-5** `c)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. = .g \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(f. = .g \text{ auf } E)$"
folgt via **228-4**: $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$
$\vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi \neq \Phi))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi \neq \Phi)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion…" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots (\Omega, \Phi) \in g \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Phi = g(\Omega)$.

`3:` Aus `2.1` "$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall` "$\ldots \Psi \neq \Phi$"
folgt: $f(\Omega) \neq \Phi$.

`4:` Aus `3` "$f(\Omega) \neq \Phi$" und
aus `2.2` "$\Phi = g(\Omega)$"
folgt: $f(\Omega) \neq g(\Omega)$.

`5:` Aus `1.2.Fall` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2.Fall` "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4` "$f(\Omega) \neq g(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \neq g(\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) \neq g(\Omega)))$.

Beweis **229-5** `d)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) \neq g(x))$.

`1:` Es gilt: $(f. = .g \text{ auf } E) \vee (\neg(f. = .g \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. = .g$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich “f, g Funktion... ”,
aus `1.1.Fall`“$f. = .g$ auf E” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \in E \ldots$”
folgt via **229-3**: $f(x) = g(x)$.

`3:` Es gilt `2`“$f(x) = g(x)$”.
Es gilt `VS` gleich “$\ldots f(x) \neq g(x)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. = .g \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. = .g \text{ auf } E)$.

`e)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. \neq p \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots \neg(f. \neq p \text{ auf } E)$”
folgt via **228-4**:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi = p)).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge (\Psi = p)$.

`2:` Aus `VS` gleich “f Funktion... ” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$”
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`3:` Aus `2`“$\Psi = f(\Omega)$” und
aus `1.2.Fall`“$\ldots \Psi = p$”
folgt: $f(\Omega) = p$.

`4:` Aus `1.2.Fall`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `1.2.Fall`“$\ldots \Omega \in E \ldots$” und
aus `3`“$f(\Omega) = p$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) = p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) = p)).$$

<u>Beweis **229-5** `f)`</u> `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) = p)$.

`1:` Es gilt: $(f. \neq p \text{ auf } E) \vee (\neg(f. \neq p \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. \neq p$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." ,
aus `1.1.Fall` "$f. \neq p$ auf E" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in E \ldots$"
folgt via **229-3**: $f(x) \neq p$.

`3:` Es gilt `2` "$f(x) \neq p$" .
Es gilt `VS` gleich "$\ldots f(x) = p$" .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. \neq p \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. \neq p \text{ auf } E)$.

Beweis **229-5** `g)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (\neg(f. \neq .g \text{ auf } E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \neg(f. \neq .g \text{ auf } E)$"
folgt via **228-4**: $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$
$\vee(\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi = \Phi))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g)$.

`1.2.Fall` $\exists \Omega, \Psi, \Phi : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, \Psi) \in f) \wedge ((\Omega, \Phi) \in g) \wedge (\Psi = \Phi)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots (\Omega, \Psi) \in f \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Psi = f(\Omega)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion…" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots (\Omega, \Phi) \in g \ldots$"
folgt via **18-20**: $\Phi = g(\Omega)$.

`3:` Aus `2.1`"$\Psi = f(\Omega)$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \Psi = \Phi$"
folgt: $f(\Omega) = \Phi$.

`4:` Aus `3`"$f(\Omega) = \Phi$" und
aus `2.2`"$\Phi = g(\Omega)$"
folgt: $f(\Omega) = g(\Omega)$.

`5:` Aus `1.2.Fall`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2.Fall`"$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus `4`"$f(\Omega) = g(\Omega)$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) = g(\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(E \not\subseteq \mathsf{dom}\, f) \vee (E \not\subseteq \mathsf{dom}\, g) \vee (\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (f(\Omega) = g(\Omega)))$.

<u>Beweis **229-5**</u> `h)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (x \in E) \wedge (f(x) = g(x))$.

`1:` Es gilt: $(f. \neq .g \text{ auf } E) \vee (\neg(f. \neq .g \text{ auf } E))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f. \neq .g$ auf E.

`2:` Aus `VS` gleich “ f, g Funktion. . . ” ,
aus `1.1.Fall` “ $f. \neq .g$ auf E” und
aus `VS` gleich “ $\ldots x \in E \ldots$”
folgt via **229-3**: $f(x) \neq g(x)$.

`3:` Es gilt `2` “ $f(x) \neq g(x)$ ” .
Es gilt `VS` gleich “ $\ldots f(x) = g(x)$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $\neg(f. \neq .g \text{ auf } E)$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(f. \neq .g \text{ auf } E)$.

□

229-6. Für jede Funktion f folgt aus $E \subseteq f^{-1}[\{p\}]$ die Aussage $f. = p$ auf E. Ähnlich doch anders ist für jede Funktion f und alle E mit $E \subseteq f^{-1}[Q]$ die Aussage $f. \in Q$ auf E verfügbar. Es gilt $f. = .f$ auf E für Funktionen f auf Teil-Klassen E von $\mathsf{dom}\, f$:

229-6(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq f^{-1}[\{p\}]$" folgt "$f. = p$ auf E".*

b) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq f^{-1}[Q]$" folgt "$f. \in Q$ auf E".*

c) *Aus "f Funktion" und "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" folgt "$f. = .f$ auf E".*

Beweis **229-6** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq f^{-1}[\{p\}])$.

1.1: Via **11-19** gilt: $f^{-1}[\{p\}] \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq f^{-1}[\{p\}]$" und
aus VS gleich "f Funktion…"
folgt via **227-2**: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p \text{ Menge})$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq f^{-1}[\{p\}]$" und
aus 1.1 "$f^{-1}[\{p\}] \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **11-19**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

2.2: Aus 1.2
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$.

3: Aus VS gleich "f Funktion…",
aus 2.1 "$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus 2 "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = p)$"
folgt via **229-3**: $f. = p$ auf E.

b) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq f^{-1}[Q])$.

1: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq f^{-1}[Q]$" und
aus VS gleich "f Funktion…"
folgt via **227-1**: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q \neq 0)$.

2: Aus 1 folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q)$.

3: Aus VS gleich "f Funktion…" und
aus 2 "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q)$"
folgt via **229-1**: $f. \in y$ auf E.

c) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq \mathsf{dom}\, f)$.

1: Via **2-7** gilt: $\mathsf{dom}\, f \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cup (\mathsf{dom}\, f)$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\, f \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cup (\mathsf{dom}\, f)$"
folgt via **0-6**: A1 gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cup (\mathsf{dom}\, f)$"

> Thema2.2 $\alpha \in E$.
>
> Es gilt: $f(\alpha) = f(\alpha)$.

Ergo Thema2.2: A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = f(\alpha))$"

3: Aus VS gleich "f Funktion…",
aus VS gleich "f Funktion…",
aus A1 gleich "$E \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cup (\mathsf{dom}\, f)$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) = f(\alpha))$"
folgt via **229-3**: $f. = .f$ auf E.

□

229-7. Hier wird der Aussage $E \subseteq f^{-1}[y \setminus \{p\}]$ ein auf punktweises Verhalten von f abzielendes Gesicht für Funktionen f gegeben:

229-7(Satz)

Aus "f Funktion" und "$E \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{p\}]$"
folgt "$(f. \in Q$ auf $E) \wedge (f. \neq p$ auf $E)$".

<u>Beweis</u> **229-7** `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (E \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{p\}])$.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `VS` gleich "…$E \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{p\}]$"
folgt via **229-6**: $f. \in Q \setminus \{p\}$ auf E.

`Thema2.1` $\alpha \in E$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `1`"$f. \in Q \setminus \{p\}$ auf E" und
aus `Thema2.1`"$\alpha \in E$"
folgt via **229-1**: $f(\alpha) \in Q \setminus \{p\}$.

`4:` Aus `3`"$f(\alpha) \in Q \setminus \{p\}$"
folgt via **5-15**: $p \neq f(\alpha) \in Q$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in Q)$"

`2.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in Q)$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \neq f(\alpha))$.

`2.3:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \neq f(\alpha) \in Q)$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q)$.

`2.4:` Via **11-19** gilt: $f^{-1}[Q \setminus \{p\}] \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (p \neq f(\alpha))$"
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq p)$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `2.3`"$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \in Q)$"
folgt via **229-1**: $\boxed{f. \in Q \text{ auf } E}$

`3.3:` Aus `VS` gleich "…$E \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{p\}]$" und
aus `2.4`"$f^{-1}[Q \setminus \{p\}] \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`4:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus `3.3`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus `3.1`"$\forall \alpha : (\alpha \in E) \Rightarrow (f(\alpha) \neq p)$"
folgt via **229-3**: $\boxed{f. \neq p \text{ auf } E}$

□

229-8. Ist f eine Funktion und gilt $f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$, so folgt $Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$. Falls f eine Funktion ist und wenn $f. \neq p$ auf $\mathsf{dom}\, f$ gilt, dann folgt $p \notin \mathsf{ran}\, f$:

229-8(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$" folgt "$Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$f. \neq p$ auf $\mathsf{dom}\, f$" folgt "$p \notin \mathsf{ran}\, f$".*

Beweis **229-8** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f. \notin Q \text{ auf } \mathsf{dom}\, f)$.

Thema1 $\alpha \in Q \cap \mathsf{ran}\, f$.

2: Aus Thema1"$\alpha \in Q \cap \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in Q) \wedge (\alpha \in \mathsf{ran}\, f)$.

3: Aus VS gleich "f Funktion..." und
aus 2"...$\alpha \in \mathsf{ran}\, f$" folgt via **18-24**: $\exists \Omega : (f(\Omega) = \alpha) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.

4: Aus 3"...$f(\Omega) = \alpha$..." und
aus 2"$\alpha \in Q$..."
folgt: $f(\Omega) \in Q$.

5: Aus VS gleich "f Funktion...",
aus 3"...$\Omega \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus 4"$f(\Omega) \in Q$"
folgt via **229-4**: $\neg(f. \notin Q \text{ auf } \mathsf{dom}\, f)$.

6: Es gilt 5"$\neg(f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f)$".
Es gilt VS gleich "$f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$".
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha \notin Q \cap \mathsf{ran}\, f$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in Q \cap \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\alpha \notin Q \cap \mathsf{ran}\, f)$.

Konsequenz via **0-19**: $Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$.

<u>Beweis **229-8**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f. \neq p \text{ auf } \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{ran}\, f) \vee (p \notin \mathsf{ran}\, f)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{ran}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **18-24**: $\exists \Omega : (f(\Omega) = p) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus `VS` gleich "f Funktion…",
aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$" und
aus 2 "$\ldots f(\Omega) = p \ldots$"
folgt via **229-5**: $\neg(f. \neq p \text{ auf } \mathsf{dom}\, f)$.

`4:` Es gilt 3 "$\neg(f. \neq p \text{ auf } \mathsf{dom}\, f)$".
Es gilt `VS` gleich "$\ldots f. \neq p \text{ auf } \mathsf{dom}\, f$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin \mathsf{ran}\, f$.

`Ende wfFallunterscheidung` $p \notin \mathsf{ran}\, f$.

□

$x \setminus z \subseteq x \cup y$, $x \setminus z \subseteq y \cup x$ und nicht nur hieraus resultierende Inklusionen von Bildern unter Klassen.

Ersterstellung: 20/01/13 **Letzte Änderung: 23/01/13**

230-1. Die hier angeführten Semi-Formeln elementarer KlassenAlgebra erscheinen klar. Aussagen `cd)` sind Spezialfälle von `ab)`:

230-1(Satz)

a) $x \setminus z \subseteq x \cup y$.

b) $x \setminus z \subseteq y \cup x$.

c) $x \setminus y \subseteq x \cup y$.

d) $x \setminus y \subseteq y \cup x$.

Beweis **230-1** `ab)`

1: Via **5-5** gilt: $x \setminus z \subseteq x$.

2.1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

2.2: Via **2-7** gilt: $x \subseteq y \cup x$.

3.a): Aus 1"$x \setminus z \subseteq x$" und
aus 2.1"$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **0-6**: $x \setminus z \subseteq x \cup y$.

3.b): Aus 1"$x \setminus z \subseteq x$" und
aus 2.2"$x \subseteq y \cup x$"
folgt via **0-6**: $x \setminus z \subseteq y \cup x$.

`c)`

Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \setminus y \subseteq x \cup y$.

`d)`

Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $x \setminus y \subseteq y \cup x$.

□

230-2. Die nunmehrige Aussagen - teilweise Anwendungen von **230-1** via **8-9** - sind später gut einsetzbar:

<u>**230-2(Satz)**</u>

a) $w[x] \subseteq w[x \cup y]$.

b) $w[x] \subseteq w[y \cup x]$.

c) $w[x \cap y] \subseteq w[x]$.

d) $w[x \cap y] \subseteq w[y]$.

e) $w[x \setminus y] \subseteq w[x]$.

f) $w[x \setminus z] \subseteq w[x \cup y]$.

g) $w[x \setminus z] \subseteq w[y \cup x]$.

h) $w[x \setminus y] \subseteq w[x \cup y]$.

i) $w[x \setminus y] \subseteq w[y \cup x]$.

<u>Beweis **230-2**</u> a)

1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1"$x \subseteq x \cup y$"
folgt via **8-9**: $w[x] \subseteq w[x \cup y]$.

b)

1: Via **2-7** gilt: $x \subseteq y \cup x$.

2: Aus 1"$x \subseteq y \cup x$"
folgt via **8-9**: $w[x] \subseteq w[y \cup x]$.

c)

1: Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq x$.

2: Aus 1"$x \cap y \subseteq x$"
folgt via **8-9**: $w[x \cap y] \subseteq w[x]$.

<u>Beweis **230-2**</u> `d)`

`1:` Via **2-7** gilt: $x \cap y \subseteq y$.

`2:` Aus `1`“$x \cap y \subseteq y$”
folgt via **8-9**: $w[x \cap y] \subseteq w[y]$.

`e)`

`1:` Via **5-5** gilt: $x \setminus y \subseteq x$.

`2:` Aus `1`“$x \setminus y \subseteq x$”
folgt via **8-9**: $w[x \setminus y] \subseteq w[x]$.

`f)`

`1:` Via **230-1** gilt: $x \setminus z \subseteq x \cup y$.

`2:` Aus `1`“$x \setminus z \subseteq x \cup y$”
folgt via **8-9**: $w[x \setminus z] \subseteq w[x \cup y]$.

`g)`

`1:` Via **230-1** gilt: $x \setminus z \subseteq y \cup x$.

`2:` Aus `1`“$x \setminus z \subseteq y \cup x$”
folgt via **8-9**: $w[x \setminus z] \subseteq w[y \cup x]$.

`h)`

`1:` Via **230-1** gilt: $x \setminus y \subseteq x \cup y$.

`2:` Aus `1`“$x \setminus y \subseteq x \cup y$”
folgt via **8-9**: $w[x \setminus y] \subseteq w[x \cup y]$.

`i)`

`1:` Via **230-1** gilt: $x \setminus y \subseteq y \cup x$.

`2:` Aus `1`“$x \setminus y \subseteq y \cup x$”
folgt via **8-9**: $w[x \setminus y] \subseteq w[y \cup x]$.

$\square$

230-3. Im vorliegenden Satz sind weitere einfache Formeln der KlassenAlgebra und deren Einsatz bei Bildern untergebracht:

230-3(Satz)

a) $x \cup y = (x \setminus y) \cup y$.

b) $x \cup y = (y \setminus x) \cup x$.

c) $w[x] \cup w[y \setminus x] = w[x \cup y]$.

d) $w[y] \cup w[x \setminus y] = w[x \cup y]$.

e) $w[x \setminus y] \cup w[y] = w[x \cup y]$.

f) $w[y \setminus x] \cup w[x] = w[x \cup y]$.

<u>Beweis</u> **230-3** a)

1: $$x \cup y \overset{\mathbf{5-22}}{=} y \cup (x \setminus y) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (x \setminus y) \cup y.$$

2: Aus 1 folgt: $$x \cup y = (x \setminus y) \cup y.$$

b)

1: $$x \cup y \overset{\mathbf{5-22}}{=} x \cup (y \setminus x) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} (y \setminus x) \cup x.$$

2: Aus 1 folgt: $$x \cup y = (y \setminus x) \cup x.$$

c)

1: $$w[x] \cup w[y \setminus x] \overset{\mathbf{9-8}}{=} w[x \cup (y \setminus x)] \overset{\mathbf{5-22}}{=} w[x \cup y].$$

2: Aus 1 folgt: $$w[x] \cup w[y \setminus x] = w[x \cup y].$$

d)

1: $$w[y] \cup w[x \setminus y] \overset{\mathbf{9-8}}{=} w[y \cup (x \setminus y)] \overset{\mathbf{5-22}}{=} w[x \cup y].$$

2: Aus 1 folgt: $$w[y] \cup w[x \setminus y] = w[x \cup y].$$

e)

1: $$w[x \setminus y] \cup w[y] \overset{\mathbf{9-8}}{=} w[(x \setminus y) \cup y] \overset{\mathtt{a)}}{=} w[x \cup y].$$

2: Aus 1 folgt: $$w[x \setminus y] \cup w[y] = w[x \cup y].$$

f)

1: $$w[y \setminus x] \cup w[x] \overset{\mathbf{9-8}}{=} w[(y \setminus x) \cup x] \overset{\mathtt{b)}}{=} w[x \cup y].$$

2: Aus 1 folgt: $$w[y \setminus x] \cup w[x] = w[x \cup y].$$

□

χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f: Einiges über $\mathsf{dom}\,\chi$.

Ersterstellung: 03/11/12 **Letzte Änderung: 26/01/13**

231-1. Aus χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f folgt $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$ und *diese* Darstellung von $\mathsf{dom}\,\chi$ ist in der Tat zu umständlich für einfache Zugänge. Deswegen soll hier und im Folgenden einiges über $\mathsf{dom}\,\chi$ ohne expliziten Bezug zu $\mathcal{P}^{-1}_{\text{endl}}[Q \setminus \{\chi(0)\}]\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}^{-1}[\{\chi(0)\}]$ ausgesagt werden. Es wird mit Notwendigem begonnen. Die Schreibweise “$\chi(0) \neq .f. \in Q$ auf Ω” in `c)` bedeutet - natürlich - “$(\chi(0) \neq .f$ auf $\Omega) \wedge (f \in .Q$ auf $\Omega)$”. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - d) - f) - e)`:

231-1(Satz)

As gelte:

$\rightarrow$) χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

$\rightarrow$) $A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

Dann folgt:

`a)` $A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`b)` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \wedge (\Omega$ *endlich*$)$
$\wedge(\Psi \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (\Psi$ *Menge*$) \wedge (A = \Omega \cup \Psi)$.

`c)` $\exists \Omega, \Psi : (\Omega$ *endlich*$) \wedge (\chi(0) \neq .f. \in Q$ *auf* $\Omega)$
$\wedge(\Psi$ *Menge*$) \wedge (f. = \chi(0)$ *auf* $\Psi) \wedge (A = \Omega \cup \Psi)$.

`d)` $A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

`e)` $f. \in \{\chi(0)\} \cup Q$ *auf* A.

`f)` $A \subseteq \mathsf{dom}\,f$.

<u>Beweis **231-1**</u> `ab)`

`1:` Aus →) “ χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f ”
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2.a):` Aus →) “ $A \in \mathsf{dom}\,\chi$ ” und
aus `1` “ $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$ ”
folgt: $A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3.b):` Aus `2` “ $A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$ ”
folgt via **221-1**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \wedge (\Omega \text{ endlich})$
$\wedge(\Psi \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (A = \Omega \cup \Psi)$.

`c)`

`1.1:` Aus →) “ χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f ”
folgt via **226-3**: f Funktion.

`1.2:` Aus →) “ χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f ” und
aus →) “ $A \in \mathsf{dom}\,\chi$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \wedge (\Omega \text{ endlich})$
$\wedge(\Psi \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (\Psi \text{ Menge}) \wedge (A = \Omega \cup \Psi)$.

`2.1:` Aus `1.1` “ f Funktion ” und
aus `1.2` “ $\ldots \Omega \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \ldots$ ”
folgt via **229-7**: $(f. \neq \chi(0) \text{ auf } \Omega) \wedge (f. \in Q \text{ auf } \Omega)$.

`2.2:` Aus `1.1` “ f Funktion ” und
aus `1.2` “ $\ldots (\Psi \subseteq f^{-1}[\{\chi(0\}] \ldots$ ”
folgt via **229-6**: $f. = p$ auf Ψ.

`3:` Aus `1.2` “ $\exists \Omega, \Psi \ldots$ ”,
aus `1.2` “ $\ldots \Omega$ endlich… ”,
aus `2.1` “ $(f. \neq \chi(0) \text{ auf } \Omega) \wedge (f. \in Q \text{ auf } \Omega)$ ”,
aus `1.2` “ $\ldots \Psi$ Menge… ”,
aus `2.2` “ $f. = p$ auf Ψ ” und
aus `1.2` “ $\ldots A = \Omega \cup \Psi$ ”
folgt:

$\exists \Omega, \Psi : (\Omega \text{ endlich}) \wedge (\chi(0) \neq .f. \in Q \text{ auf } \Omega)$
$\wedge(\Psi \text{ Menge}) \wedge (f. = \chi(0) \text{ auf } \Psi) \wedge (A = \Omega \cup \Psi)$.

<u>Beweis **231-1** `def)`</u>

`1.1:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: f Funktion.

`1.2:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-6**: $(\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])) \wedge (\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f))$.

`2.1:` Aus →) "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1.2` "$\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \ldots$"
folgt via **0-4**: $A \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$.

`2.2:` Aus →) "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1.2` "$\ldots \mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f)$"
folgt via **0-4**: $A \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f)$.

`3.d):` Aus `2.1` "$A \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$"
folgt via **0-26**: $A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

`3.f):` Aus `2.2` "$A \in \mathcal{P}(\mathsf{dom}\,f)$"
folgt via **0-26**: $A \subseteq \mathsf{dom}\,f$.

`4.e):` Aus `1.1` "f Funktion" und
aus `3.e)` "$A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0) \cup Q]$"
folgt via **229-6**: $f. \in \{\chi(0)\} \cup Q$ auf A.

$\Box$

231-2. Hier wird weiter Notwendiges über $\mathsf{dom}\,\chi$, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, ausgesagt:

231-2(Satz)

*Aus "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"*
folgt "$\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$".

Beweis **231-2** VS gleich χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f.

1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

2: Via **221-3** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$
$\subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

3: Aus 1"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 2"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$
$\subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

$\Box$

231-3. Hier wird weiter Notwendiges über $\mathsf{dom}\,\chi$, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, unter Zusatzvoraussetzungen ausgesagt:

231-3(Satz)

*Aus "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f" und ...*

a) *... und "$f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \subseteq D$" und "$f^{-1}[\{\chi(0)\}] \subseteq D$" folgt "$\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(D)$".*

b) *... und "$f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q] \subseteq D$" folgt "$\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(D)$".*

c) *... und "$\chi(0) \in Q$" folgt "$\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q])$".*

Beweis **231-3** a) VS gleich $(\chi \text{ ist } (\square, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f)$
$\wedge(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \subseteq D) \wedge (f^{-1}[\{\chi(0)\}] \subseteq D.$

1.1: Aus VS gleich "χ ist $(\square, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]).$

1.2: Aus VS gleich "$\ldots f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \subseteq D \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots f^{-1}[\{\chi(0)\}] \subseteq D$"
folgt via **221-3**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(D).$

2: Aus 1.1"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 1.2"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(D)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(D).$

b) VS gleich $(\chi \text{ ist } (\square, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q] \subseteq D).$

1.1: Via **230-2** gilt: $f^{-1}[\{\chi(0)\}] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q].$

1.2: Via **230-2** gilt: $f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q].$

2.1: Aus 1.1"$f^{-1}[\{\chi(0)\}] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$" und
aus VS gleich "$\ldots f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q] \subseteq D$"
folgt via **0-6**: $f^{-1}[\{\chi(0)\}] \subseteq D.$

2.2: Aus 1.2"$f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$" und
aus VS gleich "$\ldots f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q] \subseteq D$"
folgt via **0-6**: $f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \subseteq D.$

3: Aus VS gleich "χ ist $(\square, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$",
aus 2.1"$f^{-1}[\{\chi(0)\}] \subseteq D$" und
aus 2.2"$f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \subseteq D$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(D).$

c) VS gleich $(\chi \text{ ist } (\square, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (\chi(0) \in Q).$

1: Aus VS gleich "χ ist $(\square, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]).$

2: Aus VS gleich "$\ldots \chi(0) \in Q$"
folgt via **222-2**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q]).$

3: Aus 1"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 2"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q])$"
folgt: $\mathsf{dom}\,\chi \subseteq \mathcal{P}(f^{-1}[Q]).$

$\square$

231-4. Hier werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass Mengen in $\mathsf{dom}\,\chi$, χ ist $(\square, Q)$**alg2** von f, sind.

<u>**231-4(Satz)**</u>

*Aus "χ ist $(\square, Q)$**alg2** von f" und ...*

a) ... *und* "$A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$" *und* "$A$ *endlich*" *folgt* "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$".

b) ... *und* "$\chi(0) \neq .f. \in Q$ *auf* A" *und* "A *endlich*" *folgt* "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$".

c) ... *und* "$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$" *und* "$N$ *Menge*" *folgt* "$N \in \mathsf{dom}\,\chi$".

d) ... *und* "$f. = \chi(0)$ *auf* N" *und* "N *Menge*" *folgt* "$N \in \mathsf{dom}\,\chi$".

e) ... *und* "$A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$" *und* "$A$ *endlich*" *folgt* "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$".

f) ... *und* "$f. \in \{\chi(0)\} \cup Q$ *auf* A" *und* "A *endlich*" *folgt* "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$".

g) ... *und* "$A \subseteq f^{-1}[Q]$" *und* "A *endlich*" *folgt* "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$".

h) ... *und* "$f. \in Q$ *auf* A" *und* "A *endlich*" *folgt* "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$".

<u>Beweis **231-4**</u> a)

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\square, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \wedge (A \text{ endlich})$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "χ ist $(\square, Q)$**alg2** von f ..."
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "... $A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$ ..." und
aus `VS` gleich "... A endlich"
folgt via **221-2**: $A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2`: Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

<u>Beweis</u> **231-4** `b)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (\chi(0) \neq .f. \in Q \text{ auf } A) \wedge (A \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \chi(0). \neq f \ldots$ auf $A \ldots$"
folgt via **228-3**: $f. \neq \chi(0)$ auf A.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in Q$ auf $A \ldots$" und
aus `1`"$f. \neq \chi(0)$ auf A"
folgt via **228-10**: $A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$.

`3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$",
aus `2`"$A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`c)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (N \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N$ Menge"
folgt via **221-2**: $N \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $N \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`d)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (f. = \chi(0) \text{ auf } N) \wedge (N \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f = .\chi(0)$ auf $N \ldots$"
folgt via **228-8**: $N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$.

`2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$",
aus `1`"$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $N \in \mathsf{dom}\,\chi$.

Beweis **231-4** `e)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \wedge (A \text{ endlich})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f\ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \; {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich"
folgt via **222-1**: $A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \; {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`f)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (f. \in \{\chi(0\} \cup Q \text{ auf } A) \wedge (A \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in \{\chi(0)\} \cup Q$ auf $A \ldots$"
folgt via **228-9**: $A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

`2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f\ldots$",
aus `1`"$A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`g)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A \subseteq f^{-1}[Q]) \wedge (A \text{ endlich})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f\ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \; {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A \subseteq f^{-1}[Q] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich"
folgt via **222-1**: $A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \; {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}} \; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

<u>Beweis **231-4** `h)`</u>

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (f. \in Q \text{ auf } A) \wedge (A \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in Q$ auf $A \ldots$"
folgt via **228-9**: $A \subseteq f^{-1}[Q]$.

`2:` Via **230-2** gilt: $f^{-1}[Q] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

`3:` Aus `1`"$A \subseteq f^{-1}[Q]$" und
aus `2`"$f^{-1}[Q] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$"
folgt via **0-6**: $A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

`4:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$",
aus `4`"$A \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $A \in \mathsf{dom}\, \chi$.

$\Box$

231-5. Nun geht es um einige spezielle binäre Vereinigungen die in $\mathsf{dom}\,\chi$ sind, wobei χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f:

231-5(Satz)

*Aus "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f" und ...*

a) *... und "$A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$" und "$A$ endlich" und "$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$" und "$N$ Menge"*
folgt "$A \cup N \in \mathsf{dom}\,\chi$".

b) *... und "$\chi(0) \neq .f. \in Q$ auf A" und "A endlich" und "$f. = \chi(0)$ auf N" und "N Menge"*
folgt "$A \cup N \in \mathsf{dom}\,\chi$".

c) *... und "$A \subseteq f^{-1}[Q]$" und "A endlich" und "$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$" und "$N$ Menge"*
folgt "$A \cup N \in \mathsf{dom}\,\chi$".

d) *... und "$f. \in Q$ auf A" und "A endlich" und "$f. = \chi(0)$ auf N" und "N Menge"*
folgt "$A \cup N \in \mathsf{dom}\,\chi$".

Beweis **231-5** `a)`

`VS` gleich $(\chi$ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f) \wedge (A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \wedge (A$ endlich$)$ $\wedge (N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (N$ Menge$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f..."
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "... $A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$ ...",
aus `VS` gleich "... A endlich ...",
aus `VS` gleich "... $N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$ ..." und
aus `VS` gleich "... N Menge"
folgt via **221-1**: $A \cup N \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $A \cup N \in \mathsf{dom}\,\chi$.

<u>Beweis **231-5**</u> `b)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\textbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (\chi(0) \neq .f. \in Q \text{ auf } A) \wedge (A \text{ endlich})$
$\wedge(f. = \chi(0) \text{ auf } N) \wedge (N \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \chi(0) \neq .f \ldots$ auf $A \ldots$"
folgt via **228-3**: $f. \neq \chi(0)$ auf A.

`2.1:` Aus `1`"$f. \neq \chi(0)$ auf A" und
aus `VS` gleich "$\ldots f. \in Q$ auf $A \ldots$"
folgt via **228-10**: $A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. = \chi(0)$ auf $N \ldots$"
folgt via **228-8**: $N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$.

`3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f \ldots$",
aus `2.1`"$A \subseteq f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$",
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich$\ldots$",
aus `2.2`"$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $A \cup N \in \mathsf{dom}\, \chi$.

Beweis **231-5** `c)`

`VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\textbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A \subseteq f^{-1}[Q]) \wedge (A \text{ endlich})$
$\wedge(N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (N \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f \ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$A \subseteq f^{-1}[Q] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich $\ldots$"
folgt via **221-2**: $A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N$ Menge"
folgt via **221-2**: $N \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `1.2` "$A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus `1.3` "$N \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **221-2**: $A \cup N \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3:` Aus `2` "$A \cup N \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus `1.1` "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $A \cup N \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`d)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\textbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (\chi(f. \in Q \text{ auf } A) \wedge (A \text{ endlich})$
$\wedge(f. = \chi(0) \text{ auf } N) \wedge (N \text{ Menge})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. \in Q$ auf $A \ldots$"
folgt via **228-9**: $A \subseteq f^{-1}[Q]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f. = \chi(0)$ auf $N \ldots$"
folgt via **228-8**: $N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$.

`2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f \ldots$",
aus `1.1` "$A \subseteq f^{-1}[Q]$",
aus `VS` gleich "$\ldots A$ endlich$\ldots$",
aus `1.2` "$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $A \cup N \in \mathsf{dom}\,\chi$.

$\Box$

231-6. Im vorliegenden Satz geht es um KlassenAlgebra in $\mathsf{dom}\,\chi$, wobei χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von f:

231-6(Satz)

Aus "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von f" und ...

a) *... und "$B \subseteq A \in \mathsf{dom}\,\chi$" folgt "$B \in \mathsf{dom}\,\chi$".*

b) *... und "$A \in \mathsf{dom}\,\chi$" folgt "$A \cap E, E \cap A, A \setminus E \in \mathsf{dom}\,\chi$".*

c) *... und "$A, B \in \mathsf{dom}\,\chi$" folgt "$A \cup B, B \cup A, A\Delta B, B\Delta A \in \mathsf{dom}\,\chi$".*

Beweis **231-6** a) VS gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (B \subseteq A \in \mathsf{dom}\,\chi)$.

1: Aus VS gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

2: Aus VS gleich "$\ldots B \subseteq A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $B \subseteq A \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

3: Aus 2 "$e \subseteq E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **221-2**: $B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

4: Aus 3 "$B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 1 "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $B \in \mathsf{dom}\,\chi$.

Beweis **231-6** `b)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A \in \mathsf{dom}\,\chi)$.

`1.1:` Via **2-7** gilt: $A \cap E \subseteq A$.

`1.2:` Via **2-7** gilt: $E \cap A \subseteq A$.

`1.3:` Via **5-5** gilt: $A \setminus E \subseteq A$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1.1` "$A \cap E \subseteq A$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{A \cap E \in \mathsf{dom}\,\chi}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1.2` "$E \cap A \subseteq A$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{E \cap A \in \mathsf{dom}\,\chi}$

`2.3:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots A \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1.3` "$A \setminus E \subseteq A$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{A \setminus E \in \mathsf{dom}\,\chi}$

`c)` `VS` gleich $(\chi \text{ ist } (\Box, Q)\mathbf{alg2} \text{ von } f) \wedge (A, B \in \mathsf{dom}\,\chi)$.

`1:` Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)\mathbf{alg2}$ von $f \ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots A, B \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $A, B \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3:` Aus `2` "$ABD \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **221-2**: $A \cup B, B \cup A, A\Delta B, B\Delta A$
$\in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`4:` Aus `3` "$A \cup B, B \cup A, A\Delta B, B\Delta A$
$\in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus `1` "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $A \cup B, B \cup A, A\Delta B, B\Delta A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

$\Box$

231-7. Hier geht es um TeilKlassen von $\mathsf{dom}\,\chi$, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - d) - c) - b)`:

231-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

Dann folgt:

a) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

b) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

c) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

d) $\mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

Beweis **231-7**

1: Aus `VS` gleich "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f \ldots$"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

2.1: Via **221-3** gilt:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]).$$

2.2: Via **221-3** gilt:
$$\mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]).$$

2.3: Via **221-3** gilt:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]))$$
$$\subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]).$$

3.a): Aus 2.1"$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])$
$\subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

3.d): Aus 2.2"$\mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$
$\subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt: $\mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

3.1: $$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \stackrel{\mathbf{230-3}}{=} \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]).$$

3.2: Via **2-7** gilt: $Q \subseteq \{\chi(0)\} \cup Q$.

...

Beweis **231-7** ...

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]) =$
$\ldots = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$” und
aus `2.3`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}((f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \cup (f^{-1}[\{\chi(0)\}]))$
$\subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$”
folgt:
$$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]).$$

`4.2:` Aus `3.2`“$Q \subseteq \{\chi(0)\} \cup Q$”
folgt via **8-9**: $f^{-1}[Q] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

`5.c):` Aus `4.1`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$
$\subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$” und
aus `1`“$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$”
folgt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

`5.1:` Aus `4.1`“$f^{-1}[Q] \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$”
folgt via **32-7**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q]) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$.

`6.b):` Aus `5.1`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q]) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$” und
aus `5.c)`“$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$”
folgt via **0-6**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

□

231-8. Unter Einsatz von **231-7** folgt Vorliegendes:

231-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

$\rightarrow\!)$ "$f(p) = \chi(0)$" *oder* "$f(p) \in Q$".

Dann folgt "$\{p\} \in \mathsf{dom}\,\chi$".

Beweis **231-8**

1.1: Aus $\rightarrow\!)$"χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: f Funktion.

1.2: Aus $\rightarrow\!)$"χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-6**: $\chi(0)$ Menge.

2: Aus 1.2"$\chi(0)$ Menge"
folgt via **0-17**: $\chi(0) \neq \mathcal{U}$.

3: Aus $\rightarrow\!)$"$(f(p) = \chi(0)) \vee (f(p) \in Q)$" und
aus 2"$\chi(0) \neq \mathcal{U}$"
folgt: $(f(p) = \chi(0) \neq \mathcal{U}) \vee (f(p) \in Q)$.

4: Aus 1.1"f Funktion" und
aus 3"$(f(p) = \chi(0) \neq \mathcal{U}) \vee (f(p) \in Q)$"
folgt via **227-3**: $p \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$.

5: Aus 4"$p \in f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]$"
folgt via **32-5**: $\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$.

6: Aus $\rightarrow\!)$"χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **231-7**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$.

7: Aus 5"$\{p\} \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])$" und
aus 6"$\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]) \subseteq \mathsf{dom}\,\chi$"
folgt via **0-4**: $\{p\} \in \mathsf{dom}\,\chi$.

$\square$

231-9. Auch im Fall χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f kann $\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$ gelten:

231-9(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow\!)$ χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$.

`ii)` "$\chi(0) \notin \mathsf{ran}\,f$" *und* "$Q \cap \mathsf{ran}\,f = 0$".

`iii)` $\chi(0) \neq .f. \notin Q$ *auf* $\mathsf{dom}\,f$.

`iv)` "$f^{-1}[\{\chi(0)\}] = 0$" *und* "$f^{-1}[Q] = 0$".

Beweis **231-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$.

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus `1` "$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$"
folgt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = \{0\}$.

`3:` Aus `2` "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = \{0\}$"
folgt via **222-3**: $(\chi(0) \notin \mathsf{ran}\,f) \wedge (Q \cap \mathsf{ran}\,f = 0)$.

<u>Beweis **231-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(\chi(0) \notin \mathsf{ran}\, f) \wedge (Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0)$.

1.1: Aus VS gleich "$\chi(0) \notin \mathsf{ran}\, f \ldots$"
folgt via **228-11**: $f. \neq \chi(0)$ auf $\mathsf{dom}\, f$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$"
folgt via **228-12**: $\boxed{f. \notin Q \text{ auf } \mathsf{dom}\, f}$

2: Aus 1.1"$f. \neq \chi(0)$ auf $\mathsf{dom}\, f$"
folgt via **228-3**: $\boxed{\chi(0) \neq .f \text{ auf } \mathsf{dom}\, f}$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\chi(0) \neq .f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$.

1.1: Aus →)"χ ist $(\square, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: f Funktion.

1.2: Aus VS gleich "$\chi(0) \neq .f \ldots$ auf $\mathsf{dom}\, f$"
folgt via **228-3**: $f. \neq \chi(0)$ auf $\mathsf{dom}\, f$.

2.1: Aus 1.1"f Funktion" und
aus 1.2"$f. \neq \chi(0)$ auf $\mathsf{dom}\, f$"
folgt via **229-8**: $\chi(0) \notin \mathsf{ran}\, f$.

2.2: Aus 1.1"f Funktion" und
aus VS gleich "$\ldots f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$"
folgt via **229-8**: $Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$.

3.1: Aus 2.1"$\chi(0) \notin \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **12-12**: $\boxed{f^{-1}[\{\chi(0)\}] = 0}$

3.2: Aus 2.2"$Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$"
folgt via **213-8**: $\boxed{f^{-1}[Q] = 0)}$

Beweis **231-9** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(f^{-1}[\{\chi(0)\}] = 0) \wedge (f^{-1}[Q] = 0)$.

`1.1:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f^{-1}[\{\chi(0)\}] = 0 \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots f^{-1}[Q] = 0$"
folgt via **222-3**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = \{0\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$.

□

231-10. Nun wird **231-9** im Fall $\chi(0) \in Q$, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, betrachtet. Nach guten Vorbereitungen ergibt sich der Beweis durch Abgrasen früherer Resultate:

231-10(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

→) χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

→) $\chi(0) \in Q$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$.

`ii)` $Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$.

`iii)` $f. \notin Q$ *auf* $\mathsf{dom}\, f$.

`iv)` $f^{-1}[Q] = 0$.

Beweis **231-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$.

Aus →) “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$”
folgt via **231-9**: $Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$.

Aus `VS` gleich “$Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$”
folgt via **228-12**: $f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$.

`1:` Aus →) “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”
folgt via **226-3**: f Funktion.

`2:` Aus `1`“f Funktion” und
aus `VS` gleich “$f. \notin Q$ auf $\mathsf{dom}\, f$”
folgt via **229-10**: $Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$.

`3:` Aus `2`“$Q \cap \mathsf{ran}\, f = 0$”
folgt via **213-8**: $f^{-1}[Q] = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $f^{-1}[Q] = 0$.

`1.1:` Aus →) “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`1.2:` Aus →) “$\chi(0) \in Q$” und
aus `VS` gleich “$f^{-1}[Q] = 0$”
folgt via **222-4**: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \;{}_{\texttt{ni}}\!\cup_{\texttt{in}}\; \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = \{0\}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,\chi = \{0\}$.

□

231-11. Die Elemente von $\mathsf{dom}\,\chi$, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, haben klarer Weise die in **224-2** formulierten Eigenschaften:

231-11(Satz)

As gelte:

$\rightarrow\!)$ χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

$\rightarrow\!)$ $A \in \mathsf{dom}\,\chi$.

Dann folgt:

a) $A \cap f^{-1}[\{\chi(0\}] = A \setminus f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$.

b) $A \cap f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0\}] = A \setminus f^{-1}[\{\chi(0)\}]$.

c) $\chi(A \cap f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = \chi(A \setminus f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])$

d) $\chi(A \cap f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) = \chi(A \setminus f^{-1}[\{\chi(0)\}])$

Beweis **231-11**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”
folgt via **226-1(Def)**: χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\chi(0\}])$**alg1** von f.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”
folgt via **226-3**: $\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2:` Aus $\rightarrow\!)$ “$A \in \mathsf{dom}\,\chi$” und
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$”
folgt: $A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3.a):` Aus `1.1`“χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\chi(0\}])$**alg1** von f” und
aus `2`“$A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$”
folgt via **224-2**: $A \cap f^{-1}[\{\chi(0)\}] = A \setminus f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]$.

`3.b):` Aus `1.1`“χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\chi(0\}])$**alg1** von f” und
aus `2`“$A \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) \,{}_{\mathtt{ni}}\!\cup_{\mathtt{in}}\, \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$”
folgt via **224-2**: $A \cap f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] = A \setminus f^{-1}[\{\chi(0)\}]$.

`4.c):` Aus `3.a)`
folgt: $\chi(A \cap f^{-1}[\{\chi(0)\}]) = \chi(A \setminus f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}])$.

`4.d):` Aus `3.b)`
folgt: $\chi(A \cap f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}]) = \chi(A \setminus f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

$\Box$

$$(p,\mathcal{U}),(\mathcal{U},q),(\mathcal{U},\mathcal{U}).$$

Zu jeder Klasse gibt es eine ungleiche Menge(Unmenge,Klasse).

Ersterstellung: 14/02/13 **Letzte Änderung: 18/02/13**

232-1. Warum vorliegende Aussagen erst nun den Weg in die Essays finden liegt in dem Anspruch, an jeder Stelle so wenig wie möglich und so viel wie nötig einzubringen, begründet. Aussagen `cf)` folgt natürlich aus `ad)` oder aus `be)` und werden aus ästhetischen Gründen mitaufgenommen. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - d) - b) - e) - c) - f)`:

232-1(Satz)

`a)` $(p,\mathcal{U})$ *Unmenge.*

`b)` $(\mathcal{U},q)$ *Unmenge.*

`c)` $(\mathcal{U},\mathcal{U})$ *Unmenge.*

`d)` $(p,\mathcal{U}) \notin E$.

`e)` $(\mathcal{U},q) \notin E$.

`f)` $(\mathcal{U},\mathcal{U}) \notin E$.

Beweis **232-1** `ad)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2.a):` Aus `1`"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **92-3**: $(p,\mathcal{U})$ Unmenge.

`3.d):` Aus `2.a)`"$(p,\mathcal{U})$ Unmenge"
folgt via **0-1**: $(p,\mathcal{U}) \notin E$.

`be)`

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2.b):` Aus `1`"$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **92-3**: $(\mathcal{U},q)$ Unmenge.

`3.e):` Aus `2.b)`"$(p,\mathcal{U})$ Unmenge"
folgt via **0-1**: $(\mathcal{U},q) \notin E$.

`cf)`

`1.c):` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(\mathcal{U},\mathcal{U})$ Unmenge.

`1.f):` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(\mathcal{U},\mathcal{U}) \notin E$.

□

232-2. Zu jeder Klasse gibt es eine ungleiche (Un-)Menge. Konsequenter Weise gibt es zu jeder Klasse eine ungleiche Klasse:

232-2(Satz)

a) $\exists\Omega : (\Omega\ \mathit{Menge}) \wedge (\Omega \neq x)$.

b) $\exists\Omega : (\Omega\ \mathit{Unmenge}) \wedge (\Omega \neq x)$.

c) $\exists\Omega : \Omega \neq x$.

<u>Beweis **232-2**</u> `a)`

`1:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`2.1:` Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{0\}$ Menge.

`2.2:` Via **1-5** gilt: $0 \neq \{0\}$.

`2.3:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \{0\}$.

`3.1:` Aus `2.3`"$\ldots \Omega = \{0\}$" und
aus `2.1`"$\{0\}$ Menge"
folgt: Ω Menge.

`3.2:` Aus `2.2`"$0 \neq \{0\}$" und
aus `2.3`"$\ldots \Omega = \{0\}$"
folgt: $0 \neq \Omega$.

`4:` Aus `1.1.Fall`"$x = 0$" und
aus `3.2`"$0 \neq \Omega$"
folgt: $x \neq \Omega$.

`5:` Aus `2.3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.1`"Ω Menge" und
aus `4`"$x \neq \Omega$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \neq x)$.

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

`2.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

`2.2:` Via **$0\mathcal{U}$Axiom** gilt: 0 Menge.

`3.1:` Aus `2.1`"$\ldots \Omega = 0$" und
aus `2.2`"0 Menge"
folgt: Ω Menge.

`3.2:` Aus `1.2.Fall`"$0 \neq x$" und
aus `2.1`"$\ldots \Omega = 0$"
folgt: $\Omega \neq x$.

`4:` Aus `2.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.1`"Ω Menge" und
aus `3.2`"$\Omega \neq x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \neq x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \neq x)$.

Beweis **232-2** `b)`

`1:` Es gilt: $(x=\mathcal{U})\vee(x\neq\mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x=\mathcal{U}$.

`2.1:` Via **6-12** gilt: $\mathcal{U}\times\mathcal{U}\neq\mathcal{U}$.

`2.2:` Via **7-23** gilt: $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ Unmenge.

`2.3:` Es gilt: $\exists\Omega:\Omega=\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `2.3`“$\ldots\Omega=\mathcal{U}\times\mathcal{U}$” und aus `2.2`“$\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ Unmenge” folgt: Ω Unmenge.

`3.2:` Aus `2.3`“$\ldots\Omega=\mathcal{U}\times\mathcal{U}$” und aus `2.1`“$\mathcal{U}\times\mathcal{U}\neq\mathcal{U}$” folgt: $\Omega\neq\mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.2`“$\Omega\neq\mathcal{U}$” und aus `1.1.Fall`“$x=\mathcal{U}$” folgt: $\Omega\neq x$.

`5:` Aus `2.3`“$\exists\Omega\ldots$”, aus `3.1`“Ω Unmenge” und aus `4`“$\Omega\neq x$” folgt: $\exists\Omega:(\Omega \text{ Unmenge})\wedge(\Omega\neq x)$.

`1.2.Fall` $x\neq\mathcal{U}$.

`2.1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2.2:` Es gilt: $\exists\Omega:\Omega=\mathcal{U}$.

`3.1:` Aus `2.2`“$\ldots\Omega=\mathcal{U}$” und aus `1.2.Fall`“$x\neq\mathcal{U}$” folgt: $x\neq\Omega$.

`3.2:` Aus `2.2`“$\ldots\Omega=\mathcal{U}$” und aus `2.1`“$\mathcal{U}$ Unmenge” folgt: Ω Unmenge.

`4:` Aus `2.2`“$\exists\Omega\ldots$”, aus `3.2`“Ω Unmenge” und aus `3.1`“$x\neq\Omega$” folgt: $\exists\Omega:(\Omega \text{ Unmenge})\wedge(\Omega\neq x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$\exists\Omega:(\Omega \text{ Unmenge})\wedge(\Omega\neq x)$.

<u>Beweis</u> **232-2** `c)`

Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\exists \Omega : \Omega \neq x.$

$\square$

$$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \text{ und } o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } Q.$$
$$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \text{ und } \Box \text{ kommutativ auf } Q.$$
$$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \text{ und } \Box \text{ assoziativ auf } Q.$$
$$x(p) \text{ und } o \text{ ist } \Box\text{neutral auf } \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}.$$
$$x(p) \text{ und } \Box \text{ kommutativ auf } \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}.$$
$$x(p) \text{ und } \Box \text{ assoziativ auf } \{x(\lambda) : \lambda \in \mathsf{dom}\, x\}.$$

Ersterstellung: 18/02/13 **Letzte Änderung: 20/02/13**

233-1. Als Vorbereitung für das Folgende wird hier ein unscheinbar wirkendes Hilfsresultat gebracht:

233-1(Satz)

a) $q{}_{-}\Box{}_{-}\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

b) $\mathcal{U}{}_{-}\Box{}_{-}p = \mathcal{U}$.

c) $\mathcal{U}{}_{-}\Box{}_{-}\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

ALG-**Notation**.

Beweis **233-1** a)

1: Via **232-1** gilt: $(q, \mathcal{U}) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

2: Aus 1 "$(q, \mathcal{U}) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $q{}_{-}\Box{}_{-}\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

b)

1: Via **232-1** gilt: $(\mathcal{U}, p) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

2: Aus 1 "$(\mathcal{U}, p) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $\mathcal{U}{}_{-}\Box{}_{-}p = \mathcal{U}$.

c)

Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathcal{U}{}_{-}\Box{}_{-}\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

□

233-2. Aus der Arithmetik vertraute allgemeine Aussagen über $\Box$neutrale Elemente werden hier unter Einsatz von **233-1** in allgemeineren Rahmen bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `iv)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `i)`:

233-2(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$.

$\rightarrow$) *o ist $\Box$neutral auf Q.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $x\_\Box\_o = x$.

`ii)` $o\_\Box\_x = x$.

`iii)` $x\_\Box\_o = o\_\Box\_x = x$.

`iv)` $(x \in Q) \vee (x = \mathcal{U})$.

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **233-2**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $x\_\Box\_o = x$.

`1:` Es gilt: $(x \in Q) \vee (x \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in Q$.

`1.2.Fall` $x \notin Q$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin Q$" folgt via **92-1**: $(x, o) \notin Q \times Q$.

`3:` Aus `2` "$(x, o) \notin Q \times Q$" und aus →) "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$" folgt: $(x, o) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`4:` Aus `3` "$(x, o) \notin \mathsf{dom}\,\Box$" folgt via **93-3**: $x\_\Box\_o = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4` "$x\_\Box\_o = \mathcal{U}$" und aus `VS` gleich "$x\_\Box\_o = x$" folgt: $x = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \in Q) \vee (x = \mathcal{U})$.

Beweis **233-2** $\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $(x \in Q) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \in Q) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in Q$.

Aus →) "o ist $\Box$neutral auf Q" und
aus `1.1.Fall` "$x \in Q$"
folgt via **208-1(Def)**: $x \_ \Box \_ o = o \_ \Box \_ x = x$.

`1.2.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`2.1:` $x \_ \Box \_ o \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} \mathcal{U} \_ \Box \_ o \stackrel{\textbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} x$.

`2.2:` $o \_ \Box \_ x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} o \_ \Box \_ \mathcal{U} \stackrel{\textbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} x$.

`3:` Aus `2.1` "$x \_ \Box \_ o = \ldots = x$" und
aus `2.2` "$o \_ \Box \_ x = \ldots = x$"
folgt: $x \_ \Box \_ o = o \_ \Box \_ x = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \_ \Box \_ o = o \_ \Box \_ x = x$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \_ \Box \_ o = o \_ \Box \_ x = x$.

Aus `VS` gleich "$x \_ \Box \_ o = o \_ \Box \_ x = x$"
folgt: $o \_ \Box \_ x = x$.

<u>Beweis **233-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $o\_\square\_x = x$.

`1:` Es gilt: $(x \in Q) \vee (x \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in Q$.

Aus →) "o ist $\square$neutral auf Q" und
aus `1.1.Fall` "$x \in Q$"
folgt via **208-1(Def)**: $x\_\square\_o = x$.

`1.2.Fall` $x \notin Q$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin Q$"
folgt via **92-1**: $(o, x) \notin Q \times Q$.

`3:` Aus `2` "$(o, x) \notin Q \times Q$" und
aus →) "$\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$"
folgt: $(o, x) \notin \mathsf{dom}\,\square$.

`4:` Aus `3` "$(o, x) \notin \mathsf{dom}\,\square$"
folgt via **93-3**: $o\_\square\_x = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4` "$o\_\square\_x = \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$o\_\square\_x = x$"
folgt: $x = \mathcal{U}$.

`6:` $x\_\square\_o \stackrel{5}{=} \mathcal{U}\_\square\_o \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{5}{=} x$.

`7:` Aus `6`
folgt: $x\_\square\_o = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x\_\square\_o = x$.

$\square$

233-3. Hier zeigen sich aus der Arithmetik vertraute Aussagen über Kommutativität und Assoziativität in größerer Allgemeinheit:

233-3(Satz)

Aus "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$" *und* ...

a) ... *und* "$\Box$ *kommutativ auf* Q" *folgt* "$x\_\Box\_y = y\_\Box\_x$".

b) ... *und* "$\Box$ *assoziativ auf* Q" *folgt* "$x\_\Box\_(y\_\Box\_z) = (x\_\Box\_y)\_\Box\_z$".

ALG-**Notation**.

Beweis **233-3** a) VS gleich $(\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q) \wedge (\Box \text{ kommutativ auf } Q)$.

1: Es gilt: $((x,y) \in Q \times Q) \vee ((x,y) \notin Q \times Q)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x,y) \in Q \times Q$.

2: Aus 1.1.Fall“ $(x,y) \in Q \times Q$”
folgt via **6-6**: $(x \in Q) \wedge (y \in Q)$.

3: Aus VS gleich “… $\Box$ kommutativ auf Q” und
aus 2“ $(x \in Q) \wedge (y \in Q)$”
folgt via **210-1(Def)**: $x\_\Box\_y = y\_\Box\_x$.

1.2.Fall $(x,y) \notin Q \times Q$.

2: Aus 1.2.Fall“ $(x,y) \notin Q \times Q$”
folgt via **92-1**: $(x \notin Q) \vee (y \notin Q)$.

3: Aus 2
folgt: $(y \notin Q) \vee (x \notin Q)$.

4: Aus 3“ $(y \notin Q) \vee (x \notin Q)$”
folgt via **92-1**: $(y,x) \notin Q \times Q$.

5.1: Aus 1.2.Fall“ $(x,y) \notin Q \times Q$” und
aus VS gleich “$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \ldots$”
folgt: $(x,y) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

5.2: Aus 4“ $(y,x) \notin Q \times Q$” und
aus VS gleich “$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$”
folgt: $(y,x) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

6.1: Aus 5.1“ $(x,y) \notin \mathsf{dom}\,\Box$”
folgt via **93-3**: $x\_\Box\_y = \mathcal{U}$.

6.2: Aus 5.2“ $(y,x) \notin \mathsf{dom}\,\Box$”
folgt via **93-3**: $y\_\Box\_x = \mathcal{U}$.

7: Aus 6.1 und
aus 6.2
folgt: $x\_\Box\_y = y\_\Box\_x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x\_\Box\_y = y\_\Box\_x$.

Beweis **233-3** `b)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q) \wedge (\Box \text{ assoziativ auf } Q)$.

`1:` Es gilt: $(x, y, z \in Q) \vee (x \notin Q) \vee (y \notin Q) \vee (z \notin Q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x, y, z \in Q$.

Aus `VS` gleich "$\ldots \Box$ assoziativ auf Q" und
aus `1.1.Fall` "$x, y, z \in Q$"
folgt via **211-1(Def)**: $x\_\Box\_(y\_\Box\_z) = (x\_\Box\_y)\_\Box\_z$.

`1.2.Fall` $x \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin Q$"
folgt via **92-1**: $(x, y) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin Q$"
folgt via **92-1**: $(x, y\_\Box\_z) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(x, y) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \ldots$"
folgt: $(x, y) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(x, y\_\Box\_z) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \ldots$"
folgt: $(x, y\_\Box\_z) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(x, y) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $x\_\Box\_y = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(x, y\_\Box\_z) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $x\_\Box\_(y\_\Box\_z) = \mathcal{U}$.

`5:` $x\_\Box\_(y\_\Box\_z) \overset{4.2}{=} \mathcal{U} \overset{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U}\_\Box\_z \overset{4.1}{=} (x\_\Box\_y)\_\Box\_z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x\_\Box\_(y\_\Box\_z) = (x\_\Box\_y)\_\Box\_z$.

...

Beweis **233-3** `b)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q) \wedge (\Box \text{ assoziativ auf } Q)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $y \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall` "$y \notin Q$"
folgt via **92-1**: $(x, y) \notin Q \times Q$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$y \notin Q$"
folgt via **92-1**: $(y, z) \notin Q \times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(x, y) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \ldots$"
folgt: $(x, y) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(y, z) \notin Q \times Q$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q \ldots$"
folgt: $(y, z) \notin \mathsf{dom}\,\Box$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(x, y) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $x_{\_}\Box_{\_}y = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(y, z) \notin \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **93-3**: $y_{\_}\Box_{\_}z = \mathcal{U}$.

`5:` $x_{\_}\Box_{\_}(y_{\_}\Box_{\_}z) \stackrel{4.2}{=} x_{\_}\Box_{\_}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U}_{\_}\Box_{\_}z \stackrel{4.1}{=} (x_{\_}\Box_{\_}y)_{\_}\Box_{\_}z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x_{\_}\Box_{\_}(y_{\_}\Box_{\_}z) = (x_{\_}\Box_{\_}y)_{\_}\Box_{\_}z$.

...

Beweis **233-3** `b)` `VS` gleich $(\mathsf{dom}\,\square = Q\times Q)\wedge(\square \text{ assoziativ auf } Q)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $z \notin Q$.

`2.1:` Aus `1.4.Fall` "$z\notin Q$" folgt via **92-1**: $(y,z)\notin Q\times Q$.

`2.2:` Aus `1.4.Fall` "$z\notin Q$" folgt via **92-1**: $(x\_\square\_y,z)\notin Q\times Q$.

`3.1:` Aus `2.1` "$(y,z)\notin Q\times Q$" und aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\square = Q\times Q\ldots$" folgt: $(y,z)\notin \mathsf{dom}\,\square$.

`3.2:` Aus `2.2` "$(x\_\square\_y,z)\notin Q\times Q$" und aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,\square = Q\times Q\ldots$" folgt: $(x\_\square\_y,z)\notin \mathsf{dom}\,\square$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(y,z)\notin \mathsf{dom}\,\square$" folgt via **93-3**: $y\_\square\_z=\mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3.2` "$(x\_\square\_y,z)\notin \mathsf{dom}\,\square$" folgt via **93-3**: $(x\_\square\_y)\_\square\_z=\mathcal{U}$.

`5:` $x\_\square\_(y\_\square\_z)\stackrel{4.1}{=}x\_\square\_\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}\mathcal{U}\stackrel{4.2}{=}(x\_\square\_y)\_\square\_z$.

`6:` Aus `5` folgt: $x\_\square\_(y\_\square\_z)=(x\_\square\_y)\_\square\_z$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x\_\square\_(y\_\square\_z)=(x\_\square\_y)\_\square\_z$.

$\square$

233-4. Eine weitere auch an sich interessante Folgerung aus **233-1** ist die nun vorliegenden Aussagen, in denen eine "Q-wertige" Funktion f involviert ist und o auf Q $\Box$neutral ist:

233-4(Satz)

Es gelte:

→) $\mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$.

→) *o ist $\Box$neutral auf Q.*

→) *f Funktion.*

→) $\mathsf{ran}\, f \subseteq Q$.

Dann folgt "$f(p)\_\Box\_o = o\_\Box\_f(p) = f(p)$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **233-4**

`1.1:` Aus →) " f Funktion "
folgt via **124-1**: $(f(p) \in \mathsf{ran}\, f) \vee (f(p) = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $f(p) \in \mathsf{ran}\, f$.

Aus `1.1.1.Fall` " $f(p) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus →) " $\mathsf{ran}\, f \subseteq Q$ "
folgt via **0-4**: $f(p) \in Q$.

`1.1.2.Fall` $f(p) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | " $(f(p) \in Q) \vee (f(p) = \mathcal{U})$ "

`1.2:` Aus →) " $\mathsf{dom}\, \square = Q \times Q$ ",
aus →) " o ist $\square$neutral auf Q " und
aus `A1` gleich " $(f(p) \in Q) \vee (f(p) = \mathcal{U})$ "
folgt via **233-2**: $f(p)\_\square\_o = o\_\square\_f(p) = f(p)$.

□

233-5. Eine in einigen Zusammenhängen möglicherweise besser zitierbare Version von **233-4** ist vorliegende Aussage:

233-5(Satz)

Es gelte:

→) $\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$.

→) *o ist $\square$neutral auf Q.*

→) $f : D \to Q$.

Dann folgt "$f(p)\_\square\_o = o\_\square\_f(p) = f(p)$".

<u>`ALG`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **233-5**</u>

1: Aus →) "$f : D \to Q$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq Q)$.

2: Aus →) "$\mathsf{dom}\,\square = Q \times Q$",
aus →) "o ist $\square$neutral auf Q",
aus 1 "f Funktion. . . " und
aus 1 ". . . $\mathsf{ran}\, f \subseteq Q$"
folgt via **233-4**: $f(p)\_\square\_o = o\_\square\_f(p) = f(p)$.

$\square$

233-6. Die nunmehrigen Aussagen verallgemeinern einerseits **233-4**, indem weniger zu überprüfen ist, andererseits lassen sie auch **233-3** in etwas anderem Licht erscheinen:

233-6(Satz)

a) *Aus* “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha)\_\square\_o = x(\alpha))$”
folgt “$x(p)\_\square\_o = x(p)$”.

b) *Aus* “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (o\_\square\_x(\alpha) = x(\alpha))$”
folgt “$o\_\square\_x(p) = x(p)$”.

c) *Aus* “$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha)\_\square\_o = o\_\square\_x(\alpha) = x(\alpha))$”
folgt “$x(p)\_\square\_o = o\_\square\_x(p) = x(p)$”.

d) *Aus* “$\forall\alpha,\beta : (\alpha,\beta \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha)\_\square\_x(\beta) = x(\beta)\_\square\_x(\alpha))$”
folgt “$x(p)\_\square\_x(q) = x(q)\_\square\_x(p)$”.

e) *Aus* “$\forall\alpha,\beta,\gamma : (\alpha,\beta,\gamma \in \mathsf{dom}\, x)$
$\Rightarrow (x(\alpha)\_\square\_(x(\beta)\_\square\_x(\gamma)) = (x(\alpha)\_\square\_x(\beta))\_\square\_x(\gamma))$”
folgt “$x(p)\_\square\_(x(q)\_\square\_x(r)) = (x(p)\_\square\_x(q))\_\square\_x(r)$”.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **233-6** `a)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha)\_\Box\_o = x(\alpha))$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\, x$.

Aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha)\_\Box\_o = x(\alpha))$"
folgt: $x(p)\_\Box\_o = x(p)$.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-4**: $x(p) = \mathcal{U}$.

`3:` $x(p)\_\Box\_o \stackrel{2}{=} \mathcal{U}\_\Box\_o \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2}{=} x(p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x(p)\_\Box\_o = x(p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x(p)\_\Box\_o = x(p)$.

`b)` `VS` gleich $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (o\_\Box\_x(\alpha) = x(\alpha))$.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathsf{dom}\, x$.

Aus `1.1.Fall` "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus `VS` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (o\_\Box\_x(\alpha) = x(\alpha))$"
folgt: $o\_\Box\_x(p) = x(p)$.

`1.2.Fall` $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-4**: $x(p) = \mathcal{U}$.

`3:` $o\_\Box\_x(p) \stackrel{2}{=} o\_\Box\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2}{=} x(p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $o\_\Box\_x(p) = x(p)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $o\_\Box\_x(p) = x(p)$.

c) VS gleich $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha)\_\Box\_o = o\_\Box\_x(\alpha) = x(\alpha))$.

1: Es gilt: $(p \in \mathsf{dom}\, x) \vee (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in \mathsf{dom}\, x$.

Aus 1.1.Fall "$p \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus VS gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (x(\alpha)\_\Box\_o = o\_\Box\_x(\alpha) = x(\alpha))$"
folgt: $x(p)\_\Box\_o = o\_\Box\_x(p) = x(p)$.

1.2.Fall $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus 1.2.Fall "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-4**: $x(p) = \mathcal{U}$.

3.1: $x(p)\_\Box\_o \stackrel{2}{=} \mathcal{U}\_\Box\_o \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2}{=} x(p)$.

3.2: $o\_\Box\_x(p) \stackrel{2}{=} o\_\Box\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2}{=} x(p)$.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $x(p)\_\Box\_o = o\_\Box\_x(p) = x(p)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$x(p)\_\Box\_o = o\_\Box\_x(p) = x(p)$.

<u>Beweis **233-6**</u> `d)`

`VS` gleich $\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathsf{dom}\,x)\Rightarrow(x(\alpha)\_\Box\_x(\beta)=x(\beta)\_\Box\_x(\alpha)).$

`1:` Es gilt: $(p,q\in\mathsf{dom}\,x)\vee(p\notin\mathsf{dom}\,x)\vee(q\notin\mathsf{dom}\,x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p,q\in\mathsf{dom}\,x.$

Aus `1.1.Fall` "$p,q\in\mathsf{dom}\,x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta:(\alpha,\beta\in\mathsf{dom}\,x)\Rightarrow(x(\alpha)\_\Box\_x(\beta)=x(\beta)\_\Box\_x(\alpha))$"
folgt: $x(p)\_\Box\_x(q)=x(q)\_\Box\_x(p).$

`1.2.Fall` $p\notin\mathsf{dom}\,x.$

`2:` Aus `1.2.Fall` "$p\notin\mathsf{dom}\,x$"
folgt via **17-4**: $x(p)=\mathcal{U}.$

`3:` $x(p)\_\Box\_x(q)\stackrel{2}{=}\mathcal{U}\_\Box\_x(q)\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}x(q)\_\Box\mathcal{U}\stackrel{2}{=}x(q)\_\Box\_x(p).$

`4:` Aus `3`
folgt: $x(p)\_\Box\_x(q)=x(q)\_\Box\_x(p).$

`1.3.Fall` $q\notin\mathsf{dom}\,x.$

`2:` Aus `1.3.Fall` "$q\notin\mathsf{dom}\,x$"
folgt via **17-4**: $x(q)=\mathcal{U}.$

`3:` $x(p)\_\Box\_x(q)\stackrel{2}{=}x(p)\_\Box\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}\mathcal{U}\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}\mathcal{U}\_\Box\_x(p)\stackrel{2}{=}x(q)\_\Box\_x(p).$

`4:` Aus `3`
folgt: $x(p)\_\Box\_x(q)=x(q)\_\Box\_x(p).$

In allen Fällen gilt: $x(p)\_\Box\_x(q)=x(q)\_\Box\_x(p).$

Beweis **233-6** `e) VS` gleich $\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in\mathsf{dom}\,x)$
$\Rightarrow (x(\alpha)\_\Box\_(x(\beta)\_\Box\_x(\gamma)) = (x(\alpha)\_\Box\_x(\beta))\_\Box\_x(\gamma)).$

`1:` Es gilt: $(p,q,r\in\mathsf{dom}\,x)\vee(p\notin\mathsf{dom}\,x)\vee(q\notin\mathsf{dom}\,x)\vee(r\notin\mathsf{dom}\,x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p,q,r\in\mathsf{dom}\,x.$

Aus `1.1.Fall` "$p,q,r\in\mathsf{dom}\,x$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(\alpha,\beta,\gamma\in\mathsf{dom}\,x)$
$\Rightarrow (x(\alpha)\_\Box\_(x(\beta)\_\Box\_x(\gamma)) = (x(\alpha)\_\Box\_x(\beta))\_\Box\_x(\gamma))$"
folgt: $x(p)\_\Box\_(x(q)\_\Box\_x(r)) = (x(p)\_\Box\_x(q))\_\Box\_x(r).$

`1.2.Fall` $p\notin\mathsf{dom}\,x.$

`2:` Aus `1.2.Fall` "$p\notin\mathsf{dom}\,x$"
folgt via **17-4**: $x(p)=\mathcal{U}.$

`3:` $x(p)\_\Box\_(x(q)\_\Box\_x(r))$

$\stackrel{2}{=}\mathcal{U}\_\Box\_(x(q)\_\Box\_x(r))$

$\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}\mathcal{U}$

$\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}\mathcal{U}\_\Box\_x(r)$

$\stackrel{\mathbf{233-1}}{=}(\mathcal{U}\_\Box\_x(q))\_\Box\_x(r)$

$\stackrel{2}{=}(x(p)\_\Box\_x(q))\_\Box\_x(r).$

`4:` Aus `3`
folgt: $x(p)\_\Box\_(x(q)\_\Box\_x(r)) = (x(p)\_\Box\_x(q))\_\Box\_x(r).$

...

<u>Beweis **233-6**</u> `e) VS` gleich $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{dom}\, x)$
$\Rightarrow (x(\alpha)_-\Box_-(x(\beta)_-\Box_-x(\gamma)) = (x(\alpha)_-\Box_-x(\beta))_-\Box_-x(\gamma)).$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $q \notin \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `1.3.Fall`"$q \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-4**: $x(q) = \mathcal{U}.$

`3:`

$$x(p)_-\Box_-(x(q)_-\Box_-x(r)) \stackrel{2}{=} x(p)_-\Box_-(\mathcal{U}_-\Box_-x(r)) \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} x(p)_-\Box_-\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U}_-\Box_-x(r) \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} (x(p)_-\Box_-\mathcal{U})_-\Box_-x(r) \stackrel{2}{=} (x(p)_-\Box_-x(q))_-\Box_-x(r).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x(p)_-\Box_-(x(q)_-\Box_-x(r)) = (x(p)_-\Box_-x(q))_-\Box_-x(r).$

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $r \notin \mathsf{dom}\, x.$

`2:` Aus `1.4.Fall`"$r \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-4**: $x(r) = \mathcal{U}.$

`3:`

$$x(p)_-\Box_-(x(q)_-\Box_-x(r)) \stackrel{2}{=} x(p)_-\Box_-(x(q)_-\Box_-\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} x(p)_-\Box_-\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{233-1}}{=} (x(p)_-\Box_-x(q))_-\Box_-\mathcal{U} \stackrel{2}{=} (x(p)_-\Box_-x(q))_-\Box_-x(r).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x(p)_-\Box_-(x(q)_-\Box_-x(r)) = (x(p)_-\Box_-x(q))_-\Box_-x(r).$

...

<u>Beweis</u> **233-6** `e) VS` gleich $\forall \alpha, \beta, \gamma : (\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{dom}\, x)$
$\Rightarrow (x(\alpha)\_\Box\_(x(\beta)\_\Box\_x(\gamma)) = (x(\alpha)\_\Box\_x(\beta))\_\Box\_x(\gamma)).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$x(p)\_\Box\_(x(q)\_\Box\_x(r)) = (x(p)\_\Box\_x(q))\_\Box\_x(r).$$

$\Box$

χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f: Rechnen mit χ.

Ersterstellung: 31/01/13 **Letzte Änderung: 26/03/13**

234-1. Unter der Voraussetzung χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f ist $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$ und $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$:

234-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

Dann folgt:

a) $\Box$ *kommutativ auf* $\{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$.

b) $\chi(0)$ *ist* $\Box$*neutral auf* $\{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$.

<u>Beweis **234-1**</u>

`1.1:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-1(Def)**: χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f.

`1.2:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: f Funktion.

`2.1:` Aus `1.1` "χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f"
folgt via **224-7**:
$\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$.

`2.2:` Aus `1.1` "χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f"
folgt via **224-7**:
$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$.

`2.3:` Aus `1.2` "f Funktion"
folgt via **227-5**: $\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]] = \{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$.

`3:`
$$\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$$
$$\stackrel{\mathbf{9-8}}{=} \{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[(Q \setminus \{\chi(0)\}) \cup \{\chi(0)\}]]$$
$$\stackrel{\mathbf{230-3}}{=} \{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]]$$
$$\stackrel{2.3}{=} \{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f).$$

`4.a):` Aus `2.1` "$\Box$ kommutativ auf
$\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$" und
aus `3` "$\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]] = \ldots$
$\ldots = \{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$"
folgt: $\Box$ kommutativ auf $\{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$.

`4.b):` Aus `2.2` "$\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf
$\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$" und
aus `3` "$\{\chi(0)\} \cup f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]] = \ldots$
$\ldots = \{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$"
folgt: $\chi(0)$ ist $\Box$neutral auf $\{\chi(0)\} \cup (Q \cap \mathsf{ran}\, f)$.

$\Box$

234-2. Via **224-9,10,11** ergeben sich verschiedene Spezialfälle einer möglichen Assoziativität von $\square$. Meiner momentanen Einschätzung nach hat das vorliegende Resultat das größte Potential später eingesetzt zu werden:

234-2(Satz)

Es gelte:

→) χ *ist* $(\square, Q)$**alg2** *von* f.

→) $a, b, c \in (\{\chi(0)\} \cup Q) \cap \mathsf{ran}\, f$.

→) $p \neq q \neq r \neq p$.

→) $a = f(p)$ *und* $b = f(q)$ *und* $c = f(r)$.

Dann folgt "$a_{\_}\square_{\_}(b_{\_}\square_{\_}c) = (a_{\_}\square_{\_}b)_{\_}\square_{\_}c$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **234-2**</u>

`1.1:` Aus →) “ χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f ”
folgt via **226-1(Def)**: χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f.

`1.2:` Aus →) “ χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f ”
folgt via **226-3**: f Funktion.

`2:` Aus `1.2` “ f Funktion ”
folgt via **18-33**: $f[f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]] = (\{\chi(0)\} \cup Q) \cap \mathsf{ran}\, f$.

`3:`

$$f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$$

$$\stackrel{\mathbf{9-8}}{=} f[f^{-1}[(Q \setminus \{\chi(0)\}) \cup \{\chi(0)\})]]$$

$$\stackrel{\mathbf{230-3}}{=} f[f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q]]$$

$$\stackrel{\mathbf{2}}{=} (\{\chi(0)\} \cup Q) \cap \mathsf{ran}\, f.$$

`4:` Aus →) “ $a, b, c \in (\{\chi(0)\} \cup Q) \cap \mathsf{ran}\, f$ ” und
aus `3` “ $f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]] = \ldots = (\{\chi(0)\} \cup Q) \cap \mathsf{ran}\, f$ ”
folgt: $a, b, c \in f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$.

`5:` Aus →) “ $a = f(p) \ldots$ ” ,
aus →) “ $\ldots b = f(q) \ldots$ ” ,
aus →) “ $\ldots c = f(r)$ ” und
aus `4` “ $a, b, c \in f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$ ”
folgt: $f(p), f(q), f(r) \in f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$.

`6:` Aus `1.2` “ f Funktion ” und
aus `5` “ $f(p), f(q), f(r) \in f[f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]]$ ”
folgt via **227-7**: $p, q, r \in f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]$.

`7:` Aus `1.1` “ χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f ” ,
aus `6` “ $p, q, r \in f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}] \cup f^{-1}[\{\chi(0)\}]$ ” ,
aus →) “ $p \neq q \neq r \neq p$ ” und
aus →) “ $(a = f(p)) \wedge (b = f(q)) \wedge (c = f(r))$ ”
folgt via **224-8**: $a\_\Box\_(b\_\Box\_c) = (a\_\Box\_b)\_\Box\_c$.

$\Box$

234-3. Die nunmehrigen, vermutlich vertraut scheinenden Rechenregeln für χ, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, gelten *nicht nur auf* $\mathsf{dom}\,\chi$. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - e) - b) - c) - d)`:

234-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

Dann folgt:

a) $\chi(0)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)$.

b) $\chi(0)\_\Box\_\chi(E) = \chi(E)\_\Box\_\chi(0)$.

c) $\chi(E)\_\Box\_\chi(0) = \chi(E)$.

d) $\chi(E)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\chi(E) = \chi(E)$.

e) $\chi(E)\_\Box\_\chi(D) = \chi(D)\_\Box\_\chi(E)$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **234-3** `a)`

1: Aus $\rightarrow\!)$ "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-1(Def)**: χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f.

2: Aus 1 "χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f"
folgt via **224-7**: $\chi(0)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)$.

<u>Beweis</u> **234-3** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\chi$.

`2.1:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f \ldots$"
folgt via **226-1(Def)**:
χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f.

`2.2:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von $f \ldots$"
folgt via **226-3**:
$\mathsf{dom}\,\chi = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`3:` Aus `Thema1.1`"$\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\chi$" und
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\,\chi$
$= \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt:
$\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`4:` Aus `2.1`"χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg 1**
von f" und
aus `3`"$\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(f^{-1}[\{\chi(0)\} \cup Q])\ _{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$"
folgt via **224-6**:
$\chi(\alpha)_{-}\Box_{-}\chi(\beta) = \chi(\beta)_{-}\Box_{-}\chi(\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\chi) \Rightarrow (\chi(\alpha)_{-}\Box_{-}\chi(\beta) = \chi(\beta)_{-}\Box_{-}\chi(\alpha))$"

`1.2:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\,\chi) \Rightarrow (\chi(\alpha)_{-}\Box_{-}\chi(\beta) = \chi(\beta)_{-}\Box_{-}\chi(\alpha))$"
folgt via **233-6**: $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(D) = \chi(D)_{-}\Box_{-}\chi(E)$.

`b)`

Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(0)_{-}\Box_{-}\chi(E)$.

Beweis **234-3** `c)`

`Thema1.1`	$\alpha \in \mathsf{dom}\,\chi$.
Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f" und aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{dom}\,\chi$" folgt via **226-5**:	$\chi(\alpha)\_\Box\_\chi(0) = \chi(\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\chi) \Rightarrow (\chi(\alpha)\_\Box\_\chi(0) = \chi(\alpha))$"

`2.1:` Aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\,\chi) \Rightarrow (\chi(\alpha)\_\Box\_\chi(0) = \chi(\alpha))$"
folgt via **233-6**: $\chi(E)\_\Box\_\chi(0) = \chi(E)$.

`d)`

`1.1:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\chi(E)\_\Box\_\chi(0) = \chi(E)$.

`1.2:` Aus →) "χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $\chi(E)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\chi(E)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\chi(E)\_\Box\_\chi(0) = \chi(0)\_\Box\_\chi(E) = \chi(E)$.

□

234-4. Vielleicht nicht gerade an optimaler Stelle und für das Folgende mit vereinfachender Wirkung wird hier eine Äquivalenz betreffend $N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}]$, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, etabliert:

234-4(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` $N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`ii)` *"*$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$*" und "*$N$ *Menge".*

`iii)` *"*$f. = \chi(0)$ *auf* N*" und "*N *Menge".*

<u>Beweis **234-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

Aus `VS` gleich "$N \in \mathcal{P}^{-1}[f^{-1}[\{\chi(0)\}]$"
folgt via **0-26**: $(N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (N \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]) \wedge (N \text{ Menge})$.

`1`: Aus $\rightarrow$) "χ ist $(\square, Q)$**alg2** von f"
folgt via **226-3**: f Funktion.

`2`: Aus `1`"f Funktion" und
aus `VS` gleich "$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}] \ldots$"
folgt via **229-6**: $f. = \chi(0)$ auf N.

`3`: Aus `2`"$f. = \chi(0)$ auf N" und
aus `VS` gleich "$\ldots N$ Menge"
folgt: $(f. = \chi(0) \text{ auf } N) \wedge (N \text{ Menge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(f. = \chi(0) \text{ auf } N) \wedge (N \text{ Menge})$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots f. = \chi(0)$ auf $N \ldots$"
folgt via **228-8**: $N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$.

`2`: Aus `1`"$N \subseteq f^{-1}[\{\chi(0)\}]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots N$ Menge"
folgt via **0-26**: $N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

$\square$

234-5. Hier wird $\chi(N)$ von Mengen N mit $f. = \chi(0)$ auf N, χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f, untersucht:

234-5(Satz)

Es gelte:

→) χ *ist* $(\Box, Q)$**alg2** *von* f.

→) $f. = \chi(0)$ *auf* N.

→) N *Menge.*

Dann folgt:

a) $\chi(N) = \chi(0)$.

b) $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(N) = \chi(E)$.

c) $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(N) = \chi(N)_{-}\Box_{-}\chi(E) = \chi(E)$.

ALG-**Notation**.

Beweis **234-5**

`1.1:` Aus →) “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”
folgt via **226-1(Def)**: χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f.

`1.2:` Aus →) “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”
folgt via **234-3**: $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(E)$.

`1.3:` Aus →) “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”
folgt via **234-3**: $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(0)_{-}\Box_{-}\chi(E) = \chi(E)$.

`1.4:` Aus →) “χ ist $(\Box, Q)$**alg2** von f”,
aus →) “$f. = \chi(0)$ auf N” und
aus →) “N Menge”
folgt via **234-4**: $N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$.

`2.a):` Aus `1.1` “χ ist $(\Box, f^{-1}[Q \setminus \{\chi(0)\}], f^{-1}[\{\chi(0)\}])$**alg1** von f” und
aus `1.4` “$N \in \mathcal{P}(f^{-1}[\{\chi(0)\}])$”
folgt via **224-3**: $\chi(N) = \chi(0)$.

`3.b):` Aus `1.2` “$\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(E)$” und
aus `2.a)` “$\chi(N) = \chi(0)$”
folgt: $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(N) = \chi(E)$.

`3.c):` Aus `1.3` “$\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(0) = \chi(0)_{-}\Box_{-}\chi(E) = \chi(E)$” und
aus `2.a)` “$\chi(N) = \chi(0)$”
folgt: $\chi(E)_{-}\Box_{-}\chi(N) = \chi(N)_{-}\Box_{-}\chi(E) = \chi(E)$.

$\Box$

- **F. Erwe**, *Differential- und Integralrechnung. Band 1*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1962.
- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- `matlab Version 7.2.0.294 (R2006a) 27.01.2006`, *Dokumentation.*
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).