Teamnummer:	Schule:

Teamname:	Punkte:

Aufgabe 1: Höfliche Zahlen *(2+3+5 Punkte)*

a) Bezeichne x die natürliche Zahl, für die $(x+2)(x+4) = 2024$ gilt. Bestimmt die Zahl x unter Angabe einer Begründung.

b) Sei y das Produkt der kleinsten 2024 Primzahlen. Gebt die Einerstelle der Dezimalzahl y an und nennt sechs (verschiedene) Ziffern, die an der Zehnerstelle nicht auftauchen können. Beispielsweise ist 2 die Einerstelle der Zahl 131072 und 7 ihre Zehnerstelle. Begründet eure Antworten.

c) 2024 ist eine höfliche Zahl. Dabei heißt eine natürliche Zahl $z \geq 1$ genau dann *höflich*, wenn es natürliche Zahlen $a, b \geq 1$ gibt, sodass z als Summe der Zahl a und ihrer b Nachfolger geschrieben werden kann, das heißt, wenn

$$z = a + (a+1) + \cdots + (a+b).$$

Zeigt, dass eine natürliche Zahl z genau dann höflich ist, wenn sie keine Zweierpotenz ist, also wenn es keine ganze Zahl $n \geq 0$ mit $z = 2^n$ gibt.

Teamnummer:	Schule:
Teamname:	**Punkte:**

Aufgabe 2: Mach Platz! *(3+3+4 Punkte)*

Wir betrachten das unten abgebildete Spielbrett mit unendlicher Ausdehnung nach oben und rechts. Die Felder bezeichnen wir dabei entsprechend ihrer Position auf dem Brett mit den Koordinaten (x, y) für positive ganze Zahlen x, y. Das rot markierte Feld in Abbildung 1 etwa bezeichnen wir mit $(2, 4)$.

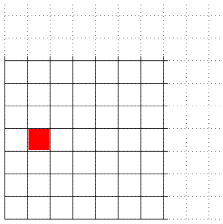


Abbildung 1: Skizze des Spielbretts

Auf diesem Spielbrett ist nur der folgende Spielzug zulässig: Ist sowohl das Feld direkt über als auch das Feld direkt rechts von einem Spielstein leer, so wird dieser Stein entfernt und auf die beiden freien Felder kommt jeweils ein neuer Stein.

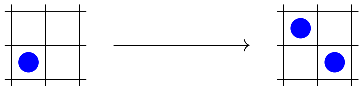


Abbildung 2: Zulässiger Spielzug

In jeder der drei folgenden Aufgaben startet ihr das Spiel jeweils mit einem einzelnen Stein auf Position $(1, 1)$, alle anderen Felder sind leer.

a) Zeigt, dass höchstens vier aufeinanderfolgende zulässige Spielzüge ausreichen, um dafür zu sorgen, dass auf den Positionen $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 1)$ kein einziger Stein liegt (siehe Abbildung 3 linkes Bild, grüner Bereich).

b) Angenommen, es sind bereits 2024 zulässige Spielzüge gespielt worden. Zeigt, dass eine positive ganze Zahl y existiert, sodass auf Feld $(1, y)$ ein Spielstein liegt. Begründet außerdem, dass nicht mehr als ein Stein auf den Feldern der ersten Reihe liegen kann.

c) Entscheidet und begründet, ob es möglich ist, dass nach endlich vielen zulässigen Spielzügen kein Stein auf den Positionen $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$ und $(3, 1)$ liegt (siehe Abbildung 3 rechtes Bild, roter Bereich).

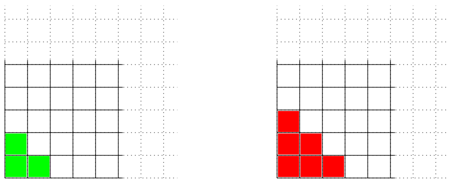


Abbildung 3: Freizuräumende Bereiche

Teamnummer:	Schule:
Teamname:	Punkte:

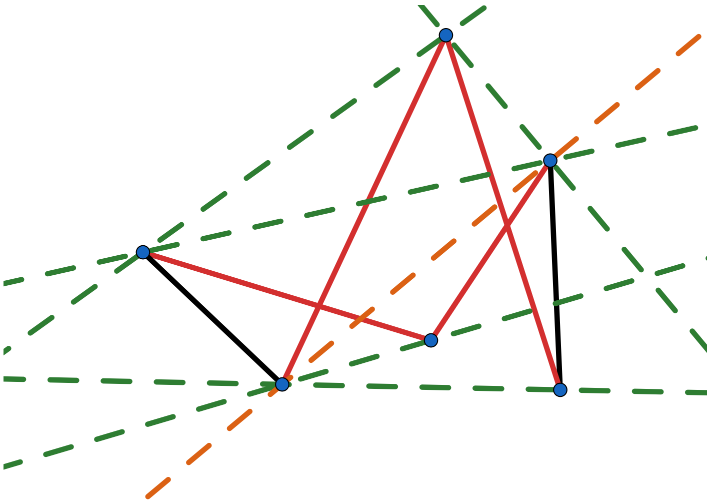
Aufgabe 3: Polygone und Tangenten *(4+4+2 Punkte)*

Wir betrachten ein Polygon P in der Ebene, das sich auch selbst schneiden darf. Sei S die Anzahl der Selbstschnitte von P.

Wir nennen eine Kante e von P *Wendekante*, wenn die beiden Nachbarkanten von e auf verschiedenen Seiten der Gerade durch e liegen. Sei W die Anzahl der Wendekanten.

Eine Gerade g durch zwei Eckpunkte A_1 und A_2 von P heißt *Tangente* an P, wenn sowohl die beiden Kanten mit Eckpunkt A_1 auf derselben Seite von g liegen als sich auch die beiden Kanten mit Eckpunkt A_2 auf derselben Seite der Geraden befinden. Liegen nun die beiden Kantenpaare bei A_1 und A_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden, so heißt g *Tangente 1. Art*. Liegen hingegen alle vier Kanten auf derselben Seite, so heißt g *Tangente 2. Art*. Es seien schließlich T_1 und T_2 die Anzahl der Tangenten 1. beziehungsweise 2. Art.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass P in allgemeiner Lage ist: Keine drei Eckpunkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden und keine drei Kanten haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.



Beispiel: Das Polygon P (durchgezogene Linien) hat zwei Selbstschnitte ($S = 2$). Weiterhin hat P sechs Kanten, wovon vier Wendekanten und rot markiert sind ($W = 4$). P hat insgesamt sechs Tangenten (gestrichtelte Linien): eine 1. Art ($T_1 = 1$, orange gestrichelt) und fünf 2. Art ($T_2 = 5$, grün gestrichelt).

a) Gebt ganze Zahlen a, b, c, d an, sodass für alle Polygone $a \cdot S + b \cdot T_1 + c \cdot T_2 + W/2 = d$ gilt. Illustriert die Gültigkeit eurer Gleichung an mindestens zwei Beispielen, für die keiner der Werte S, T_1, T_2, W bei allen Beispielen gleich ist (eines davon darf das Beispiel oben sein).

b) Beweist die Gleichung, die ihr im ersten Teil gefunden habt, für alle Polygone P in allgemeiner Lage.

c) Findet eine ähnliche Gleichung im Falle von zwei Polygonen P und Q in allgemeiner Lage, wobei wir nun nur Schnitte zwischen P und Q betrachten sowie Geraden, die durch einen Eckpunkt von P und einen Eckpunkt von Q verlaufen. Beweist eure Vermutung.

Teamnummer:	Schule:

Teamname:	Punkte:

Aufgabe 4: Rätsel für die Freiheit *(4+3+3 Punkte)*

Die beiden Königstöchter Amal und Dina wurden vom bösen Fürsten Zahhak entführt und gefangengenommen. Er gibt ihnen jedoch die Möglichkeit, freizukommen, wenn sie das folgende Rätsel lösen.

In seinen Gemächern hat Zahhak ein 8×8-Schachbrett stehen, wobei sich auf jedem der 64 Felder ein schwarzer oder ein weißer Stein befindet. Unter genau einem Stein befindet sich der Schlüssel zur Verliestür, der den Weg zur Freiheit verspricht. Er wird zunächst Amal hineinbitten und ihr zeigen, unter welchem Stein sich der Schlüssel befindet. Danach muss Amal genau einen Stein auf dem Brett durch einen Stein anderer Farbe ersetzen. Im Anschluss wird Dina hereingebeten. Sie soll allein durch einen Blick auf das Schachbrett erraten, unter welchem Stein sich der Schlüssel befindet. Liegt sie richtig, kommen die beiden Schwestern frei. Liegt sie falsch oder kommunizieren Amal und Dina in irgendeiner Weise in den Gemächern von Zahhak miteinander, so müssen sie den Rest ihres Lebens in Gefangenschaft verbringen.

Allerdings dürfen sich Amal und Dina am Vorabend der Durchführung des Rätsels in ihrer Zelle beratschlagen und sich eine Strategie überlegen. Ohne, dass sie es bemerken, hört Zahhak ihren Gesprächen aber zu und hat dadurch die Möglichkeit, ihre Strategie bei der Anordnung der schwarzen und weißen Steine und dem Versteck des Schlüssels zu berücksichtigen.

Bevor ihr euch mit dem 8×8-Schachbrett beschäftigt, schaut euch zunächst das Rätsel auf zwei kleineren Spielbrettern an, um ein Gefühl dafür zu bekommen.

a) Findet eine Strategie auf einem 2×1-Schachbrett, mit der immer die Position des Schlüssels richtig erraten werden kann.

b) Zeigt, dass es auf einem 3×1-Schachbrett hingegen keine solche Strategie geben kann. Das heißt, ihr sollt zeigen, dass Zahhak unter Kenntnis der Strategie von Amal und Dina stets eine Konfiguration des Brettes finden kann, bei der Amal und Dina scheitern werden.

c) Beschreibt eine Strategie auf dem 8×8-Schachbrett, mit der Amal und Dina ihre Freiheit erlangen können, und beweist, dass sie unabhängig von der von Zahhak gewählten Verteilung der Steine auf dem 8×8-Schachbrett und dem Schlüsselversteck zum Erfolg führt!