Teamnummer:	Schule:

Teamname:	Punkte:

Aufgabe 1: Zahlenspielereien mit 2024 *(2+4+4 Punkte)*

a) Wie viele verschiedene Zahlen lassen sich aus der Zahl 2024 durch Vertauschen ihrer Ziffern bilden? Dabei ist ein Ausdruck wie „0224“, der durch Vertauschen der ersten beiden Ziffern in 2024 entsteht, als die Zahl 224 zu verstehen. Bestimme unter allen Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern in 2024 gebildet werden können, die kleinste Zahl m sowie die größte Zahl M und ermittle die Anzahl aller Quadratzahlen im Intervall $[m, M]$.

b) Von diesen durch Vertauschen der Ziffern der Zahl 2024 entstandenen Zahlen werden nun je zwei verschiedene Zahlen miteinander addiert. Wieviele Möglichkeiten gibt es hierfür und wie viele verschiedene Zahlen entstehen dadurch?

c) Befinden sich unter den in (b) gebildeten Zahlen Palindrome, d.h. Zahlen, deren Ziffernfolge von links und von rechts gelesen die gleiche Zahl ergibt? Wie viele verschiedene Zahlenpalindrome entstehen in (b) und wie oft werden sie durch Addition verschiedener Zahlen in (b) gebildet?

Teamnummer:	Schule:

Teamname:	Punkte:

Aufgabe 2: Sophies Geld *(5+1+4 Punkte)*

Sophie möchte sich Karten für das Taylor-Swift-Konzert dieses Jahr in Hamburg kaufen, und hat dafür Geld gespart. In ihrer Spardose sind ausschließlich Ein- und Zwei-Euro-Münzen, insgesamt sind es mindestens 170 Münzen. (Sie hat sie neulich alle mal herausgeholt, aber bei 170 aufgehört zu zählen.) Wenn sie nun zufällig zwei Münzen aus ihrer Spardose herausnimmt, dann hat sie mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit genau 3 Euro in der Hand.

a) Beweist, dass die Anzahl der Münzen in Sophies Spardose eine Quadratzahl ist. Wie viele sind es mindestens?

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass gleich viele Ein- und Zwei-Euro-Münzen in der Spardose sind?

c) Kann sich Sophie mit dem Geld aus der Spardose mit Sicherheit ihren Wunsch erfüllen, die Konzertkarten zu kaufen? Die Karten kosten 300 Euro.

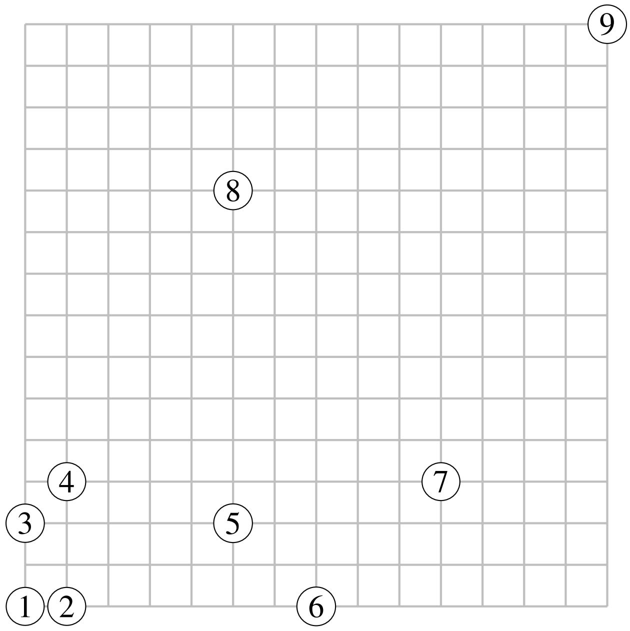
Teamnummer:	Schule:
Teamname:	Punkte:

Aufgabe 3: Abwurfspiel einmal anders *(2+3+1+2+2 Punkte)*

Ein paar Schulfreundinnen ($2n + 1$, um genau zu sein, wobei $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ eine natürliche Zahl ist) probieren ein neues Abwurfspiel aus. Sie stellen sich auf dem Schulhof so auf, dass die Abstände zwischen je zwei von ihnen verschieden sind. Auf ein Zeichen der Spielleiterin hin wirft jede von ihnen die Freundin ab, die ihr am nächsten steht (und trifft sie).

a) Betrachtet zunächst das folgende Beispiel, in dem sich 9 Freundinnen aufgestellt haben. Zeichnet die Wurflinien der Bälle ein. Welche Freundinnen werden nicht abgeworfen?

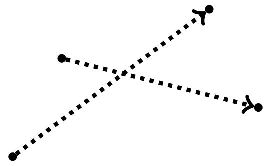
(Zeichnet eure Lösung gleich in die Abbildung ein.)



b) Hier und in allen folgenden Teilaufgaben betrachten wir wieder den allgemeinen Fall mit $2n + 1$ Freundinnen. Begründet, warum immer mindestens eine von ihnen nicht abgeworfen wird.

c) Begründet, warum die Wurflinien nie einen geschlossenen Linienzug (mit mindestens drei Linien) enthalten können.

d) Begründet, warum sich zwei Wurflinien nicht in genau einem inneren Punkt kreuzen können so wie hier



(Sie können sich aber in einem Punkt kreuzen, an dem eine der Freundinnen steht, oder sie können identisch sein.)

e) Begründet, warum keine der Freundinnen jemals von mehr als 5 Bällen getroffen wird.

Teamnummer:	Schule:

Teamname:	Punkte:

Aufgabe 4: Mysteriöse Funktion *(1+5+4 Punkte)*

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen und $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ eine Funktion, die die folgenden Bedingungen für alle $x, y, n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt:

$$f(xy + x + y) = f(x) + f(y) + 1$$
$$f(2^n) = n$$

a) Was ist $f(0)$?

b) Was ist $f(12)$?

c) Was ist $f(571)$?

Hinweis: Die Funktion f muss nicht explizit als Formel (z.B. $f(x) = x^2$) angegeben werden.