Aufgabe 1: Höfliche Zahlen *(2+3+5 Punkte)*

a) Bezeichne x die natürliche Zahl, für die $(x+2)(x+4) = 2024$ gilt. Bestimmt die Zahl x unter Angabe einer Begründung.

b) Sei y das Produkt der kleinsten 2024 Primzahlen. Gebt die Einerstelle der Dezimalzahl y an und nennt sechs (verschiedene) Ziffern, die an der Zehnerstelle nicht auftauchen können. Beispielsweise ist 2 die Einerstelle der Zahl 131072 und 7 ihre Zehnerstelle. Begründet eure Antworten.

c) 2024 ist eine höfliche Zahl. Dabei heißt eine natürliche Zahl $z \geq 1$ genau dann *höflich*, wenn es natürliche Zahlen $a, b \geq 1$ gibt, sodass z als Summe der Zahl a und ihrer b Nachfolger geschrieben werden kann, das heißt, wenn

$$z = a + (a+1) + \cdots + (a+b).$$

Zeigt, dass eine natürliche Zahl z genau dann höflich ist, wenn sie keine Zweierpotenz ist, also wenn es keine ganze Zahl $n \geq 0$ mit $z = 2^n$ gibt.

Lösung.

a) Sei $w := x + 3$. Dann ist $w^2 - 1 = (w-1)(w+1) = (x+2)(x+4) = 2024$, w ist also die positive Quadratwurzel von 2025. Nun $40^2 = 1600$ und $50^2 = 2500$. Schreiben wir $2025 = 1600+400+25 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 5^2 = (40+5)^2$ oder $2025 = 2500 - 500 + 25 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 5 + 5^2 = (50-5)^2$, so sehen wir unmittelbar $w = 45$ und daher $x = w - 3 = 42$. Alternativ folgt aus $w^2 = 2025$, dass w durch 5, aber nicht durch 2 teilbar ist. Wegen $40 < w < 50$ folgt daher wieder $w = 45$.

b) y ist durch 2 und 5 teilbar, also auch durch 10. Daher lautet die Einerstelle 0. $\frac{y}{10} = \frac{y}{2 \cdot 5}$ ist weder durch 2 noch durch 5 teilbar. Also können die sechs Ziffern $0, 2, 4, 5, 6, 8$ nicht als Zehnerstelle auftauchen.

c) Nach Definition ist z genau dann höflich, wenn es positive ganze Zahlen a, b gibt, sodass

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^{b} (a+k) \\ &= (b+1)a + \frac{1}{2} b(b+1) \\ &= \frac{1}{2}(b+1)(2a+b). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Gaußsche Summenformel verwendet. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$2z = (2a+b)(b+1). \tag{1}$$

Wäre eine Zweierpotenz $z = 2^n$ höflich, so müssten $2a + b$ und $b + 1$ beides gerade Zahlen sein, da beide Zahlen größer als 1 sind. Dann müsste b gleichzeitig ungerade und gerade sein, Widerspruch. Folglich sind alle Zweierpotenzen unhöflich.

Ist z keine Zweierpotenz, so existiert ein Primteiler $p \geq 3$ von z. Wir setzen $b := p - 1$ und $a := \frac{z}{p} - \frac{b}{2}$. Offenbar ist b eine positive gerade Zahl und folglich a eine ganze Zahl. Weiterhin

$$(2a+b)(b+1) = \left(2\frac{z}{p} - b + b\right)(p - 1 + 1) = 2z.$$

Insbesondere haben wir gezeigt, dass z höflich ist, sofern $a \geq 1$ gilt. Ist hingegen $a \leq 0$, so setzen wir $a' := 1 - a$ und $b' := b + 2a - 1$. Dann ist $a' \geq 1$ und $b' = b + 2\frac{z}{p} - b - 1 = 2\frac{z}{p} - 1 \geq 2 - 1 = 1$. Des Weiteren

$$(2a' + b')(b' + 1) = (2 - 2a + b + 2a - 1)(b + 2a - 1 + 1) = (b + 1)(2a + b) = 2z,$$

sodass z auch in diesem Fall höflich ist.

Punkteverteilung.
Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!

a) Es gibt **1 Punkt** für das richtige Ergebnis und **1 Punkt** für die Begründung (welche auch eine vollständige Fallunterscheidung sein könnte).

b) Es soll jeweils **1 Punkt** für die beiden Ergebnisse und insgesamt **1 Punkt** für die Begründung geben.

c) **1 Punkt** ist für das Herleiten von Gleichung (1) vorgesehen. **1 Punkt** gibt es weiterhin, wenn gezeigt wurde, dass Zweierpotenzen unhöflich sind. **3 Punkte** sind für den Nachweis vorgesehen, dass alle anderen Zahlen höflich sind. Sollte wie in der Musterlösung vorgegangen werden, könnte es einen Punkt für den Fall $a \geq 1$ und zwei Punkte für den Fall $a \leq 0$ geben.

Aufgabe 2: Mach Platz! *(3+3+4 Punkte)*

Wir betrachten das unten abgebildete Spielbrett mit unendlicher Ausdehnung nach oben und rechts. Die Felder bezeichnen wir dabei entsprechend ihrer Position auf dem Brett mit den Koordinaten (x, y) für positive ganze Zahlen x, y. Das rot markierte Feld in Abbildung 1 etwa bezeichnen wir mit $(2, 4)$.

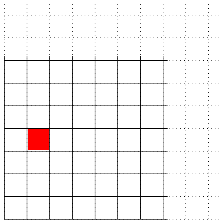


Abbildung 1: Skizze des Spielbretts

Auf diesem Spielbrett ist nur der folgende Spielzug zulässig: Ist sowohl das Feld direkt über als auch das Feld direkt rechts von einem Spielstein leer, so wird dieser Stein entfernt und auf die beiden freien Felder kommt jeweils ein neuer Stein.

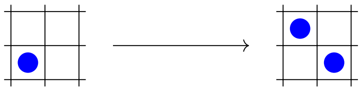


Abbildung 2: Zulässiger Spielzug

In jeder der drei folgenden Aufgaben startet ihr das Spiel jeweils mit einem einzelnen Stein auf Position $(1, 1)$, alle anderen Felder sind leer.

a) Zeigt, dass höchstens vier aufeinanderfolgende zulässige Spielzüge ausreichen, um dafür zu sorgen, dass auf den Positionen $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 1)$ kein einziger Stein liegt (siehe Abbildung 3 linkes Bild, grüner Bereich).

b) Angenommen, es sind bereits 2024 zulässige Spielzüge gespielt worden. Zeigt, dass eine positive ganze Zahl y existiert, sodass auf Feld $(1, y)$ ein Spielstein liegt. Begründet außerdem, dass nicht mehr als ein Stein auf den Feldern der ersten Reihe liegen kann.

c) Entscheidet und begründet, ob es möglich ist, dass nach endlich vielen zulässigen Spielzügen kein Stein auf den Positionen $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$ und $(3, 1)$ liegt (siehe Abbildung 3 rechtes Bild, roter Bereich).

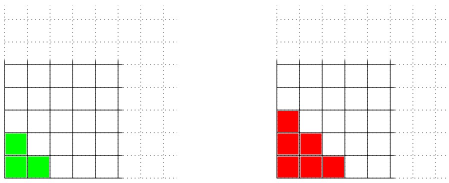


Abbildung 3: Freizuräumende Bereiche

Lösung.

a) Es gibt genau zwei mögliche Lösungen:

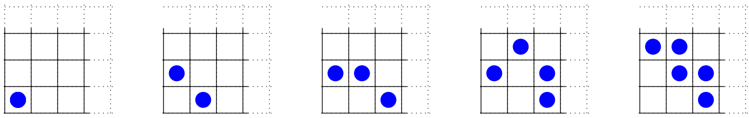


Abbildung 4: Lösung 1

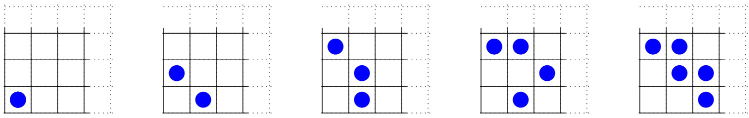


Abbildung 5: Lösung 2

b) Wir beweisen die Behauptung mit Hilfe einer vollständigen Induktion über die Anzahl n der gespielten zulässigen Spielzüge. Nach dem ersten Zug liegt je ein Stein auf $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$. Für $n = 1$ ist die Aussage also korrekt.

Sind nun $n \geq 1$ zulässige Züge gespielt, muss gemäß Induktionsvoraussetzung irgendwo genau ein Stein in der ersten Reihe liegen.

Sei $(1, k)$ die Position dieses Steins. Lässt Spielzug $n + 1$ den besagten Stein unberührt, so werden nur Spielsteine außerhalb der ersten Reihe entfernt oder hinzugefügt. Insbesondere gilt die Induktionsbehauptung mit $y = k$. Wird mit besagtem Stein hingegen ein gültiger Spielzug durchgeführt, so taucht nach den Spielregeln in der ersten Reihe genau ein neuer Stein auf Position $(1, k + 1)$ auf und der Stein auf Position $(1, k)$ wird entfernt. Hier gilt nun die Induktionsbehauptung mit $y = k + 1$.

c) Wir weisen jedem Feld ein Gewicht zu und zwar derart, dass das Gewicht von Feld (x, y) gerade die Summe der Gewichte von den beiden gleich gewichteten Feldern $(x + 1, y)$ und $(x, y + 1)$ ist. Konkret starten wir beim Feld $(1, 1)$ mit dem Gewicht 1, woraus sich für die Gewichte das Bild in Abbildung 6 ergibt.

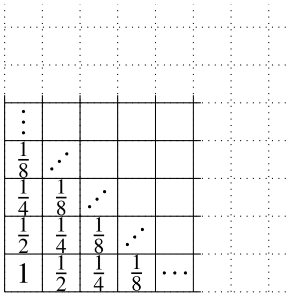


Abbildung 6: Gewichtetes Spielfeld

Nach Konstruktion ist dann das Gesamtgewicht aller Felder, die nach einer beliebigen (endlichen) Anzahl von zulässigen Spielzügen belegt ist genau 1 und das Gewicht des kompletten Feldes 4 (geometrische Reihe). Betrachten wir alle Felder in der ersten Zeile, der ersten Spalte und im rot markierten Bereich in Abbildung 3 rechts, so ist deren Gesamtgewicht gleich $1 + 1 + 1 + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$.

Angenommen, wir hätten eine zulässige Folge von Zügen gefunden, die den rot markierten Bereich von Steinen befreit. Gemäß Teilaufgabe b) gibt es dann in der ersten Reihe und (aus Symmetriegründen) auch in der ersten Spalte jeweils genau einen Stein. Das Gewicht beider Positionen zusammengenommen ist dann höchstens $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Alle anderen Felder außerhalb der ersten Zeile, der ersten Spalte und dem rot markierten Bereich haben zusammen ein Gesamtgewicht von genau $4 - 3 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Um nun noch auf das zu 1 fehlende Gesamtgewicht zu kommen, müssten alle diese Felder mit Steinen besetzt werden. Das ist mit endlich vielen Steinen nicht möglich.

Punkteverteilung.
Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!

a) Da der erste Spielzug erzwungen ist, gibt es jeweils **1 Punkt** von Bild 2 nach Bild 3; Bild 3 nach Bild 4 und von Bild 4 nach Bild 5.

b) Es soll jeweils **1 Punkt** für den Induktionsanfang, die Induktionsvoraussetzung und den Induktionsbeweis geben.

c) **1 Punkt** ist für die Idee vorgesehen, den Feldern geeignete Gewichte zuzuordnen; **1 Punkt** ist für die Berechnung des Gesamtgewichts nach einem Spielzug gedacht. Weiterhin gibt es **1 Punkt** dafür, die Aussage aus Teilaufgabe b) einzusetzen, um einen Teil des Gewichts nach oben abzuschätzen. Schließlich gibt es **1 Punkt** für die restliche Abschätzung und den Abschluss des Beweises.

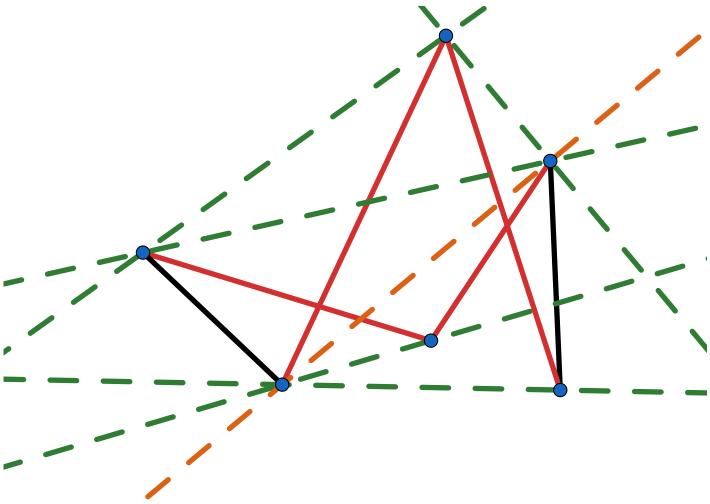
Aufgabe 3: Polygone und Tangenten *(4+4+2 Punkte)*

Wir betrachten ein Polygon P in der Ebene, das sich auch selbst schneiden darf. Sei S die Anzahl der Selbstschnitte von P.

Wir nennen eine Kante e von P *Wendekante*, wenn die beiden Nachbarkanten von e auf verschiedenen Seiten der Gerade durch e liegen. Sei W die Anzahl der Wendekanten.

Eine Gerade g durch zwei Eckpunkte A_1 und A_2 von P heißt *Tangente* an P, wenn sowohl die beiden Kanten mit Eckpunkt A_1 auf derselben Seite von g liegen als sich auch die beiden Kanten mit Eckpunkt A_2 auf derselben Seite der Geraden befinden. Liegen nun die beiden Kantenpaare bei A_1 und A_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden, so heißt g *Tangente 1. Art*. Liegen hingegen alle vier Kanten auf derselben Seite, so heißt g *Tangente 2. Art*. Es seien schließlich T_1 und T_2 die Anzahl der Tangenten 1. beziehungsweise 2. Art.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass P in allgemeiner Lage ist: Keine drei Eckpunkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden und keine drei Kanten haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.



Beispiel: *Das Polygon P (durchgezogene Linien) hat zwei Selbstschnitte ($S = 2$). Weiterhin hat P sechs Kanten, wovon vier Wendekanten und rot markiert sind ($W = 4$). P hat insgesamt sechs Tangenten (gestrichelte Linien): eine 1. Art ($T_1 = 1$, orange gestrichelt) und fünf 2. Art ($T_2 = 5$, grün gestrichelt).*

a) Gebt ganze Zahlen a, b, c, d an, sodass für alle Polygone $a \cdot S + b \cdot T_1 + c \cdot T_2 + W/2 = d$ gilt. Illustriert die Gültigkeit eurer Gleichung an mindestens zwei Beispielen, für die keiner der Werte S, T_1, T_2, W bei allen Beispielen gleich ist (eines davon darf das Beispiel oben sein).

b) Beweist die Gleichung, die ihr im ersten Teil gefunden habt, für alle Polygone P in allgemeiner Lage.

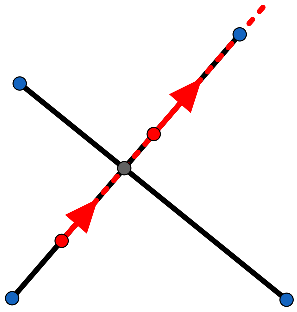
c) Findet eine ähnliche Gleichung im Falle von zwei Polygonen P und Q in allgemeiner Lage, wobei wir nun nur Schnitte zwischen P und Q betrachten sowie Geraden, die durch einen Eckpunkt von P und einen Eckpunkt von Q verlaufen. Beweist eure Vermutung.

Lösung.

a) $S + T_1 - T_2 + W/2 = 0$, im obigen Beispiel: $2 + 1 - 5 + 4/2 = 0$.

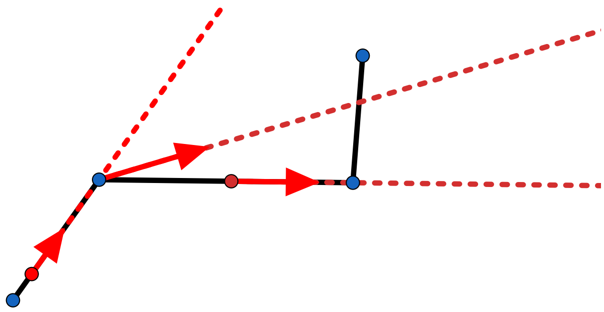
b) Wir geben P eine Orientierung und durchlaufen nun sukzessive die Ecken und Kanten des Polygons. An jedem inneren Punkt einer Kante betrachten wir den Strahl s, der in diesem Punkt startet und der Kante gemäß der Orientierung folgt. Entlang einer Kante ändert sich nur der Anfangspunkt des Strahls. An Eckpunkten drehen wir s entsprechend um den Winkel der beiden Kanten zueinander, sodass der Strahl die Richtung der nächsten Kante annimmt.

Wir betrachten nun die Zahl Z der (isolierten beziehungsweise transversalen) Schnittpunkte des Strahls s mit P. Wenn wir entlang von P gehen, wird sich diese Zahl zwischendurch ändern, nach einem Durchlauf gelangen wir aber zurück zu der Anzahl an Schnittpunkten zu Beginn. Folglich summieren sich alle Änderungen zu Null. Im Folgenden betrachten wir alle möglichen Situationen, in denen sich die Zahl der Schnittpunkte zwischen s und P ändern kann.



Der Strahl (rot gepunktet) verläuft durch einen Selbstschnitt des Polygons.

Wenn wir durch einen Selbstschnitt des Polygons gehen, so nimmt Z um 1 ab. Jeder Selbstschnitt wird zweimal durchlaufen, sodass der Beitrag der Selbstschnitte $-2S$ ist. Das gilt unabhängig von der Orientierung des Polygons.



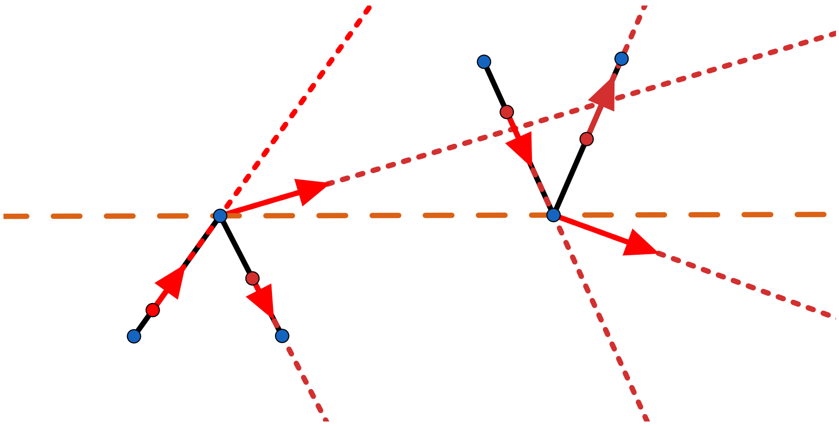
Der Strahl (rot gepunktet) verläuft durch eine Wendekante des Polygons.

Durchlaufen wir eine Wendekante e, so nimmt die Zahl Z ebenfalls um 1 ab. Dazu beobachten wir, dass der Strahl s spätestens bei Drehung um den ersten Eckpunkt die vom anderen Eckpunkt ausgehende Kante schneidet (zuvor hatten wir einen Schnittpunkt mit einer nachfolgenden Kante oder der Strahl war Teil einer Tangente), dies aber nicht mehr der Fall ist, wenn wir A_2 erreicht haben. Der entsprechende Beitrag der Wendekanten zur Gesamtänderung von Z ist daher $-W$. Dieser Beitrag ist wiederum unabhängig von der Orientierung von P.

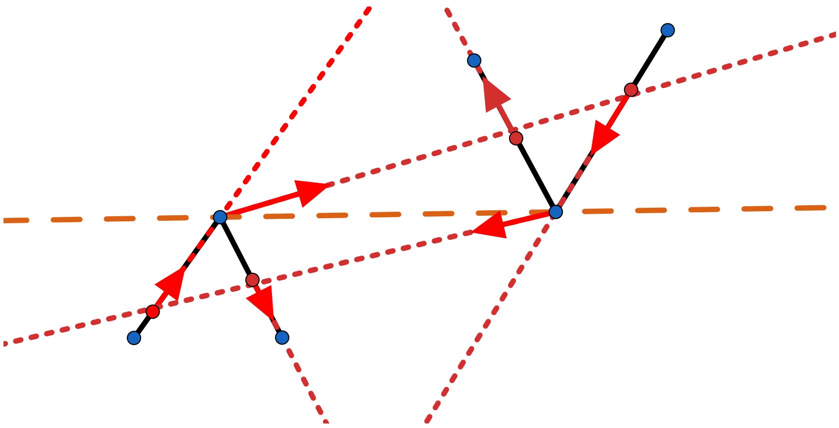
Betrachten wir nun den Fall, dass wir einen Berührpunkt einer Tangenten 1. Art durchlaufen. Spiegeln wir eines der Kantenpaare an der Tangente, so liegen anschließend beide Kantenpaare auf derselben Seite. Sind sie gleich orientiert, so verlieren wir bei der Bewegung von s zwei Schnittpunkte an einem Eckpunkt und keinen am zweiten Eckpunkt. Für beide möglichen Orientierungen summiert sich der Beitrag der Tangente zur Gesamtänderung von Z zu -2. Sind sie hingegen gegensätzlich orientiert, so verlieren wir beide Male zwei Schnittpunkte oder beide Male keinen, abhängig von der Orientierung des Polygons. Daher ist in einer Orientierung -4 und in der anderen Orientierung 0 der Beitrag zur Gesamtänderung von Z.

Im Falle von Tangenten 2. Art ist die Situation ähnlich. Der Unterschied besteht allerdings darin, dass wir keine Punkte verlieren, sondern gewinnen, sodass $+2$, $+4$ beziehungsweise 0 der Gesamtbeitrag einer Tangente 2. Art ist.

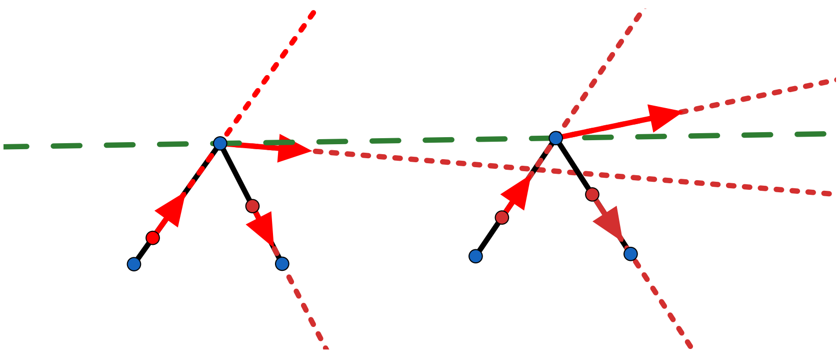
Summieren wir nun für beide Orientierungen von P alle Änderungsbeiträge zu Z auf, so erhalten wir $0 = -4S - 2W - 4T_1 + 4T_2 \Rightarrow S + T_1 - T_2 + W/2 = 0$.



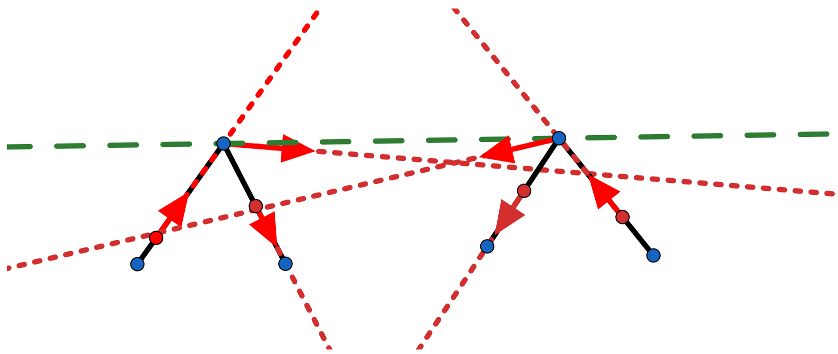
Der Strahl (rot gepunktet) verläuft durch eine Tangente 1. Art, gleiche Orientierung der Kantenpaare nach Spiegelung eines Kantenpaares.



Der Strahl (rot gepunktet) verläuft durch eine Tangente 1. Art, umgekehrte Orientierung der Kantenpaare nach Spiegelung eines Kantenpaares.



Der Strahl (rot gepunktet) verläuft durch eine Tangente 2. Art, gleiche Orientierung der Kantenpaare.



Der Strahl (rot gepunktet) verläuft durch eine Tangente 2. Art, umgekehrte Orientierung der Kantenpaare.

c) $S + T_1 - T_2 = 0$, wobei S die Anzahl der Schnittpunkte zwischen den Polygonen P und Q ist, T_1 die Anzahl an Tangenten 1. Art und T_2 die Anzahl an Tangenten 2. Art (wobei eine Tangente durch jeweils einen Eckpunkt von P und von Q verläuft). Der Beweis verläuft ganz analog zu b), nur dass Wendekanten keine Entsprechung mehr haben. □

Punkteverteilung.
Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!

a) **1 Punkt** gibt es für die korrekte Gleichung. **2 Punkte** sind für die Demonstration mindestens eines weiteren Beispiels mit korrekter Angabe von S, T_1, T_2, W vorgesehen, sodass kein Wert in allen Beispielen gleich ist (unterscheiden sich nicht alle Werte in den Beispielen, soll nicht mehr als ein Punkt vergeben werden). **1 Punkt** gibt es zusätzlich noch für die Illustration der Gleichung mit den angegebenen a, b, c, d anhand der Beispiele.

b) Sollte wie in der Musterlösung vorgegangen werden, so gibt es **1 Punkt** für die Idee, mit einem Strahl auf dem Polygon entlangzulaufen und die Schnittpunkte zwischen dem Strahl und dem Polygon zu betrachten. Jeweils **1 Punkt** gibt es dann für die Betrachtung der Selbstschnitte und Wendekanten sowie der Tangenten 1. und 2. Art. **1 Punkt** gibt es dann für die richtige Addition der einzelnen Beiträge bezüglich beider Orientierungen. Wurden im ersten Teil falsche Werte a, b, c, d angegeben, so kann es dennoch Punkte für Ansätze analog zur Musterlösung geben.

c) **1 Punkt** gibt es für die korrekte Angabe der Gleichung, **1 Punkt** für den Beweis. Dabei ist es völlig legitim, auf die Beweisführung im zweiten Teil zu verweisen, wenn zuvor die Entsprechung der Schnittpunkte und Tangenten 1. und 2. Art gemacht wurde.

Aufgabe 4: Rätsel für die Freiheit *(4+3+3 Punkte)*

Die beiden Königstöchter Amal und Dina wurden vom bösen Fürsten Zahhak entführt und gefangengenommen. Er gibt ihnen jedoch die Möglichkeit, freizukommen, wenn sie das folgende Rätsel lösen.

In seinen Gemächern hat Zahhak ein 8×8-Schachbrett stehen, wobei sich auf jedem der 64 Felder ein schwarzer oder ein weißer Stein befindet. Unter genau einem Stein befindet sich der Schlüssel zur Verliestür, der den Weg zur Freiheit verspricht. Er wird zunächst Amal hineinbitten und ihr zeigen, unter welchem Stein sich der Schlüssel befindet. Danach muss Amal genau einen Stein auf dem Brett durch einen Stein anderer Farbe ersetzen. Im Anschluss wird Dina hereingebeten. Sie soll allein durch einen Blick auf das Schachbrett erraten, unter welchem Stein sich der Schlüssel befindet. Liegt sie richtig, kommen die beiden Schwestern frei. Liegt sie falsch oder kommunizieren Amal und Dina in irgendeiner Weise in den Gemächern von Zahhak miteinander, so müssen sie den Rest ihres Lebens in Gefangenschaft verbringen.

Allerdings dürfen sich Amal und Dina am Vorabend der Durchführung des Rätsels in ihrer Zelle beratschlagen und sich eine Strategie überlegen. Ohne, dass sie es bemerken, hört Zahhak ihren Gesprächen aber zu und hat dadurch die Möglichkeit, ihre Strategie bei der Anordnung der schwarzen und weißen Steine und dem Versteck des Schlüssels zu berücksichtigen.

Bevor ihr euch mit dem 8×8-Schachbrett beschäftigt, schaut euch zunächst das Rätsel auf zwei kleineren Spielbrettern an, um ein Gefühl dafür zu bekommen.

a) Findet eine Strategie auf einem 2×1-Schachbrett, mit der immer die Position des Schlüssels richtig erraten werden kann.

b) Zeigt, dass es auf einem 3×1-Schachbrett hingegen keine solche Strategie geben kann. Das heißt, ihr sollt zeigen, dass Zahhak unter Kenntnis der Strategie von Amal und Dina stets eine Konfiguration des Brettes finden kann, bei der Amal und Dina scheitern werden.

c) Beschreibt eine Strategie auf dem 8×8-Schachbrett, mit der Amal und Dina ihre Freiheit erlangen können, und beweist, dass sie unabhängig von der von Zahhak gewählten Verteilung der Steine auf dem 8×8-Schachbrett und dem Schlüsselversteck zum Erfolg führt!

Lösung.

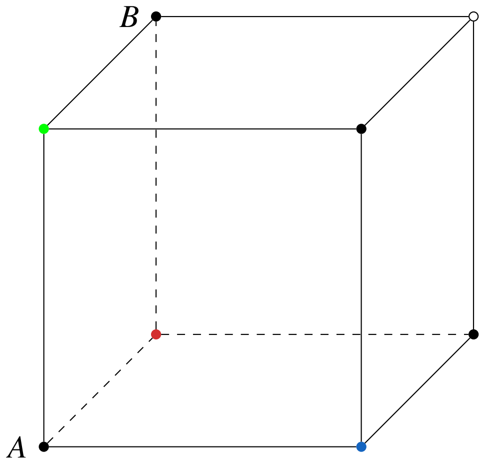
a) Wir überlegen uns, welche Konfigurationen Amal Dina hinterlassen kann. Sind beide Spielsteine auf dem Schachfeld weiß oder beide schwarz, so hinterlässt Amal in jedem Fall einen weißen und einen schwarzen Spielstein. Allerdings kann sie wählen, ob der weiße Spielstein links oder rechts ist. Auf diese Weise kann sie offenbar die Position des Schlüssels kodieren: Findet Dina zwei verschiedenfarbige Spielsteine vor, so befindet sich der Schlüssel unter dem weißen.

Sind die Spielsteine auf dem Schachfeld hingegen verschiedenfarbig, so wird Amal Dina zwei gleichfarbige Steine hinterlassen. Hierbei hat sie die Wahl, ob beide Steine weiß oder beide schwarz sind. Entsprechend kann Amal wieder die Position des Schlüssels kodieren: Findet Dina zwei weiße Steine vor, so befindet sich der Schlüssel links, sind beide Steine hingegen schwarz, so ist der Schlüssel rechts.

b) Auf dem 3×1-Feld gibt es $2^3 = 8$ verschiedene Möglichkeiten, schwarze und weiße Spielsteine anzuordnen. Kodiert 0 einen weißen und 1 einen schwarzen Spielstein, so entsprechen die acht Konfigurationen den Tupeln (x_1, x_2, x_3) mit $x_i \in \{0, 1\}$, also den acht Ecken eines Würfels. Zwei Ecken sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in einer Koordinate, also der

Farbe eines Spielsteins unterscheiden. Auf den Würfel übertragen bedeutet das Spiel, dass Zahhak eine Ecke des Würfels markiert und Amal sich eine benachbarte Ecke aussucht.

Für den Schlüssel gibt es drei mögliche Positionen, die durch drei Farben (zum Beispiel blau, grün, rot) gekennzeichnet werden können. Eine Strategie von Amal und Dina ist nichts weiter als eine Färbung aller Ecken des Würfels in jeweils einer der drei Farben. Sieht Dina eine Konfiguration von Spielsteinen, ordnet sie diese der entsprechenden Ecke des Würfels zu und wählt als Position des Schlüssels jene, die die Farbe der Ecke anzeigt.



Unmöglichkeit einer geeigneten Färbung des Würfels

Damit Amal in jedem Fall die richtige Position des Schlüssels kodiert, wäre es notwendig, dass sie von jeder Ecke des Würfels aus drei verschiedenfarbige Ecken erreichen kann. Eine solche Färbung des Würfels ist aber unmöglich: Wählt man eine Ecke A aus und färbt die drei anliegenden Ecken blau, grün und rot, so müsste die zu A diametral gegenüberliegende Ecke blau gefärbt sein, weil sie zu einer Ecke B benachbart ist, die schon eine rote und eine grüne Ecke als Nachbarn hat, doch genauso müsste sie auch grün und rot gefärbt sein, Widerspruch.

Wenn Zahhak Amal und Dina belauscht, so kann er in Bezug auf ihre Strategie eine Konfiguration von Spielsteinen wählen, die einer Ecke des Würfels entspricht, deren drei Nachbarecken nicht alle verschiedene Farben aufweisen. Den Schlüssel versteckt er dann an dem Ort, der jener Farbe entspricht, die zu besagter Ecke nicht benachbart ist. Egal, welchen Zug Amal nun durchführt: Amal würde Dina die falsche Farbe beziehungsweise die falsche Schlüsselposition kodieren.

c) Amal und Dina einigen sich zunächst auf eine Nummerierung der vierundsechzig Felder des Schachbrettes mit den Zahlen von 0 bis 63, beispielsweise von der linken oberen Ecke ausgehend ansteigend. Die Zahlen werden dabei im sechsstelligen Binärsystem dargestellt, gehen also von 000000 bis 111111. Weiterhin soll ein schwarzer Stein der Zahl 0 und ein weißer Stein der Zahl 1 entsprechen. Bezeichne nun i die Nummer eines Feldes und s_i die Zahl, die zum Stein auf i gehört. Definieren wir als Addition von zwei Zahlen die stellenweise Addition von Ziffern im Binärsystem ohne Übertrag (beispielsweise 110101 + 101101 = 011000), so können wir jeder Konfiguration von Steinen die Zahl

$$S := \sum_{i=000000}^{111111} i s_i$$

zuordnen. S ist eine Zahl zwischen 000000 und 111111, entspricht also genau einem der vierundsechzig Felder.

Wir behaupten, dass Amal durch das Tauschen von genau einem Stein die Konfiguration von Steinen immer derart ändern kann, dass S zu einer beliebigen Zahl S' zwischen 000000 und 111111 wird. Insbesondere kann sie auf diese Weise Dina die Position des Schlüssels auf dem Feld mit der Nummer S' kodieren. Wenn dies immer möglich ist, hat Zahhak auch keinerlei Möglichkeit, Amal und Dina an der richtigen Antwort zu hindern.

Ändert Amal die Farbe des Steines auf dem Feld mit der Nummer $S + S'$, so wird aus S wie gewünscht die Zahl $S + (S + S') = (S + S) + S' = 000000 + S' = S'$. Dazu sei angemerkt, dass unsere Addition assoziativ ist und die Subtraktion der Addition selbst entspricht. Das heißt, Amal addiert die Zahl der aktuellen Konfiguration und die Nummer des Feldes, auf dem sich der Schlüssel verbirgt, und tauscht genau den Stein auf jenem Feld, der genau diese Nummer hat, aus. Dina nennt dann das Feld, welches als Nummer die Zahl der neuen Konfiguration von Steinen hat, als die Position des Schlüssels.

Dieses Vorgehen funktioniert übrigens immer dann, wenn die Anzahl der Felder eine Zweierpotenz ist. Im Falle von drei Feldern würde das Problem entstehen, dass nicht jede mögliche Zahl S mehr einem Spielfeld entspricht.

Punkteverteilung.
Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!

a) Insgesamt sind **3 Punkte** für die Angabe einer funktionierenden Strategie vorgesehen. Davon kann ein Punkt bereits für die Auflistung aller verschiedenen Fälle vergeben werden. Schließlich gibt es noch **1 Punkt** für den Nachweis, dass die angegebene Strategie immer funktioniert.

b) Es gibt **1 Punkt** für die Idee, dass eine Strategie von Amal und Dina bedeutet, jeder Konfiguration die entsprechende Antwort von Dina zuzuordnen. **1 Punkt** gibt es weiterhin für eine geeignete Darstellung der Strategie, beispielsweise mittels dreier Farben. **1 Punkt** gibt es letztlich für die Angabe einer korrekten Strategie für Zahhak.

c) Sollte analog zur Musterlösung vorgegangen werden, so gibt es **1 Punkt** für die Idee, die Felder sowie die Farbe der Steine im Binärsystem zu kodieren. **1 Punkt** gibt es dann für die Definition von S. Wird gezeigt, dass Amal S zu einer beliebigen Zahl S' ändern kann und dies ihr ermöglicht, für Dina die Position des Schlüssels zu kodieren, so gibt es **1 Punkt**.