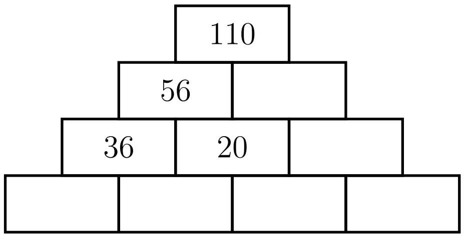
Aufgabe 1: Escape Room *(1+4+5 Punkte)*

Ada und Batu sind am Wochenende in einem Escape Room und stehen dort vor einem Tresor mit einem ganz besonderen Zahlenschloss. Sie erfahren, dass es sich um eine Zahlenmauer handelt, die sie schon aus der Schule kennen (siehe Abbildung). Addiert man zwei Zahlen, die in der Mauer nebeneinander stehen, erhält man die Zahl, die über diesen beiden Zahlen steht. Zum Beispiel steht die Zahl 56 über den Zahlen 36 und 20, da $36 + 20 = 56$ ist.

Um den Tresor zu knacken, müssen Ada und Batu die Zahlenmauer entsprechend der Rechenregeln vollständig ausfüllen. Sie stellen schnell fest, dass es dafür mehrere Möglichkeiten gibt.



(a) Gebt *eine* vollständig ausgefüllte Zahlenmauer an.

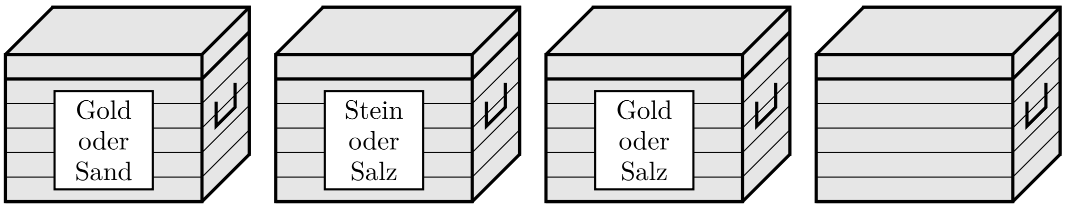
Nachdem Ada und Batu ein paar Lösungen der Zahlenmauer eingegeben haben, ohne dass sich der Tresor öffnet, erhalten Sie vom Spielleiter folgenden Hinweis: In der gesuchten Lösung der Zahlenmauer sind in der untersten Reihe die Zahlen links außen und rechts außen gleich.

(b) Ermittelt eine Lösung der Zahlenmauer, die zusätzlich diese Forderung erfüllt.

Begründet ausführlich, warum es keine weitere Lösung gibt.

Als Ada und Batu die richtige Zahlenkombination eingeben, öffnet sich der Tresor. Zum Vorschein kommen vier geschlossene Kisten, deren Inhalt Ada und Batu von außen nicht erkennen können.

Jede Kiste enthält genau ein Material. Eine enthält Gold, eine enthält Stein, eine Sand und eine Salz. Drei der vier Kisten sind beschriftet. Auf einer steht „Gold oder Sand“, auf einer anderen „Stein oder Salz“ und auf einer dritten „Gold oder Salz“. Die Beschriftungen entsprechen alle der Wahrheit. Die vierte Kiste ist unbeschriftet. (Siehe Abbildung.)



Ada und Batu können nun *nacheinander* zwei der Kisten öffnen. Wenn eine dieser Kisten Gold enthält, haben Sie das Spiel gewonnen.

(c) Untersucht, ob es eine Strategie gibt, mit der die beiden mit Sicherheit die Kiste mit Gold öffnen.

Falls es eine solche Strategie gibt, gebt diese an und begründet, warum sie *in jedem Fall* funktioniert. Falls es keine solche Strategie gibt, begründet dies ebenfalls ausführlich.

Lösung

(a) **Eine mögliche** korrekte Lösung ist:

	110		
	56	**54**	
36	20	**34**	
20	**16**	**4**	**30**

	110		
	56	**54**	
36	20	**34**	
x	y	z	w

Dabei gibt es verschiedene richtige Zahlenkombinationen (x, y, z, w) für die unterste Reihe, sodass

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 36, && (1)\\ y + z \quad &= 20, && (2)\\ z + w &= 34. && (3) \end{aligned}$$

Insbesondere sind auch nicht-natürliche Zahlen als Lösung zugelassen.

(b) Die **einzige** korrekte Lösung ist:

	110		
	56	**54**	
36	20	**34**	
25	**11**	**9**	**25**

	110		
	56	**54**	
36	20	**34**	
x	y	z	x

Durch Umstellen der Gleichungen (1)–(3) erhalten wir:

$$\begin{aligned} y &= 36 - x, && (4)\\ z &= 20 - y = 20 - (36 - x) = -16 + x, && (5)\\ w &= 34 - z = 34 - (-16 + x) = 50 - x. && (6) \end{aligned}$$

Die Forderung $x \overset{!}{=} w$ führt also zusammen mit (6) zur linearen Gleichung

$$x = 50 - x. \qquad (7)$$

Diese Gleichung hat $x = 25$ als einzige Lösung.

Alternative 1:

Man kann die Lösung auch durch systematisches bzw. „reflektiertes“ Probieren lösen, z. B. ausgehend von der in (a) gefundenen Zahlenkombination:

x	y	z	w	
20	16	4	30	$x < w$
21	15	5	29	$x < w$
22	14	6	28	$x < w$
23	13	7	27	$x < w$
24	12	8	26	$x < w$
25	**11**	**9**	**25**	$x = w$
26	10	10	24	$x > w$

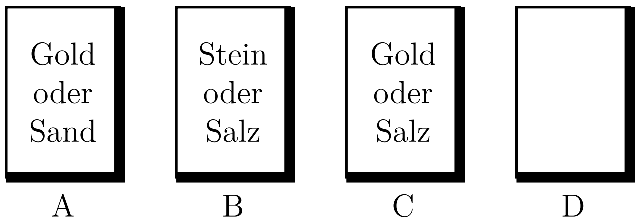
Für die Eindeutigkeit der Lösung muss dann begründet werden, warum es außer den ausprobierten Zahlen keine weitere Lösung geben kann. Dabei kann man damit argumentieren, wie sich eine Veränderung von x auf w auswirkt und umgekehrt. Dies würde auf eine zu (7) äquivalente Gleichung führen.

Alternative 2:

Ausgehend von der in (a) gefundenen Zahlenkombination kann die unterste Reihe z. B. wie folgt abgeändert werden: $(20+n)$, $(16-n)$, $(4+n)$, $(30-n)$. Da nun $20+n = 30-n$ gelten muss, erhält man $n = 5$ und somit die o. g. Lösung.

(c) Eine sichere Strategie besteht darin, im ersten Zug die Kiste ohne Aufschrift zu öffnen.

Zum Nachweis bezeichnen wir die Kisten der Reihe nach mit A, B, C und D. Wir zeigen durch eine vollständige Fallunterscheidung, dass man nach dem Öffnen von D weiß, in welcher Kiste sich das Gold befindet.



Da jede der Kisten nur ein Material enthält, können wir zunächst festhalten, dass jedes Material auch nur in genau einer Kiste zu finden ist und nicht in mehreren.

Fall 1: In Kiste D befindet sich **Gold**.

In diesem Fall haben Ada und Batu das Spiel sofort gewonnen, wenn sie Kiste D öffnen. Glück gehabt!

Fall 2: In Kiste D befindet sich **Sand**.

Da sich in Kiste A Gold oder Sand befinden muss, der Sand aber in D ist, kann man sofort schließen, dass das Gold in Kiste A ist.

Fall 3: In Kiste D befindet sich **Salz**.

Da sich in Kiste C Gold oder Salz befinden muss, das Salz aber in D ist, kann man sofort schließen, dass das Gold in Kiste C ist.

Fall 4: In Kiste D befindet sich **Stein**.

Da sich in Kiste B Stein oder Salz befinden muss, der Stein aber in D ist, kann man zunächst schließen, dass sich in B Salz befindet.

Da man nun weiß, dass das Salz in B ist, sich in C aber Gold oder Salz befinden muss, kann man weiter folgern, dass das Gold auch in diesem Fall in C ist.

Tatsächlich kann man nach dem Öffnen von Kiste D auf den Inhalt aller Kisten schließen:

Kiste	D	A	B	C
Inhalt	Gold	Sand	Stein	Salz
	Sand	Gold	Stein	Salz
	Salz	Sand	Stein	Gold
	Stein	Sand	Salz	Gold

Bepunktungsvorschlag:

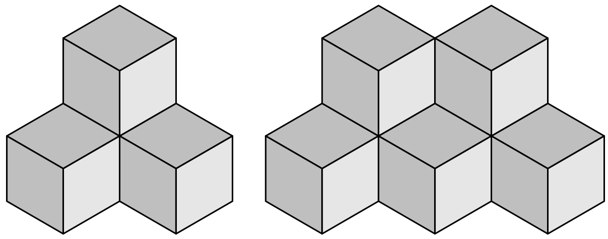
(a) 1 Punkt für die korrekte Angabe einer möglichen Lösung.

(b) 2 Punkte für die korrekte Angabe der einzigen Lösung.
2 Punkte für den Nachweis der Eindeutigkeit.
(Nur 1 Punkt, falls der Zusammenhang zwischen x und y erkannt, aber nicht – z. B. durch die Gleichung (7) – bewiesen wird.)

(c) 1 Punkt für die Angabe einer korrekten Strategie.
4 Punkte für den Nachweis, dass diese Strategie in jedem Fall funktioniert.
(Für jeden der vier Fälle je einen Punkt.)

Aufgabe 2: Würfelgebäude *(1+3+3+3 Punkte)*

Gleich große Würfel werden, wie in der Abbildung dargestellt, zu Würfelgebäuden nach einem gleichartigen Muster zusammengesetzt. Das erste Würfelgebäude besteht aus vier Würfeln. Die anderen Würfelgebäude entstehen jeweils aus dem vorherigen durch den Anbau von genau drei Würfeln.



In der Abbildung sind das erste und das zweite Würfelgebäude dargestellt.

(a) Berechnet die Anzahl der Würfel des 5. und die Anzahl der Würfel des 2024. Würfelgebäudes.

(b) Untersucht, ob es ein Würfelgebäude gibt, das aus 2024 Würfeln besteht.

(c) Berechnet die Anzahl aller Würfel, die für den *gleichzeitigen* Aufbau der ersten 60 Würfelgebäude benötigt werden.

(d) Untersucht, ob es zu jeder positiven ganzen Zahl n ein Würfelgebäude gibt, das aus 10^n Würfeln besteht.

Lösung

Das erste Würfelgebäude besteht aus genau $1+3=4$ Würfeln. Beim Übergang zum nächstfolgenden Würfelgebäude kommen immer genau 3 Würfel in der in der Abbildung gezeigten Anordnung hinzu. Folglich besteht das n-te Würfelgebäude aus genau $3 \cdot n + 1$ Würfeln.

(a) Das 5. Würfelgebäude besteht nach obiger Vorbemerkung aus genau $3 \cdot 5 + 1 = 16$ Würfeln. Das 2024. Würfelgebäude besteht aus genau $3 \cdot 2024 + 1 = 6073$ Würfeln.

(b) Nach obiger Vorbemerkung besteht das n-te Würfelgebäude aus $3 \cdot n + 1$ Würfeln. Damit es ein Würfelgebäude gibt, das aus 2024 Würfeln besteht, müsste es also eine natürlich Zahl n mit $3 \cdot n + 1 = 2024$ geben. Da aber 2023 nicht durch 3 teilbar ist (2023 hat die Quersumme 7 und ist daher nicht durch 3 teilbar), gibt es kein solches Würfelgebäude.

(c) Die Anzahl aller Würfel der ersten 60 Würfelgebäude erhält man durch die Addition der Zahlen $3 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 2 + 1, 3 \cdot 3 + 1$ bis $3 \cdot 60 + 1$. Das sind 60 Summanden. Wir addieren den ersten und den letzten Summanden, den zweiten und den vorletzten Summanden und so weiter bis zur Summe aus $3 \cdot 30 + 1$ und $3 \cdot 31 + 1$. Da bei jeder dieser 30 Teilsummen der kleinere Summand um 3 größer als in der vorherigen Teilsumme, der größere Summand aber um 3 kleiner als in der vorherigen Teilsumme ist, ist jede der Teilsummen gleich der ersten, also $4 + 181 = 185$. Folglich werden für den gleichzeitigen Aufbau der ersten 60 Würfelgebäude genau $30 \cdot 185 = 5550$ Würfel benötigt.

Eine alternative Lösungsvariante hierfür wäre, den Term als

$$3 \cdot (1+2+3+ ... +60) + 60 = 3 \cdot \frac{60 \cdot 61}{2} + 60 = 30 \cdot 183 + 30 \cdot 2 = 30 \cdot 185 = 5550$$

zu schreiben.

(d) Für jede positive ganze Zahl n hat die Zahl $10^n - 1$ in der Dezimaldarstellung als Ziffern nur n-mal die Ziffer 9 und ist daher durch 3 teilbar. Folglich ist die Zahl m mit $m = (10^n - 1) : 3$ eine positive ganze Zahl und es gilt $10^n = 3 \cdot m + 1$. Nach den Vorbemerkungen existiert daher für jede positive ganze Zahl n ein Würfelgebäude, das aus 10^n Würfeln besteht, nämlich das m-te Würfelgebäude mit $m = (10^n - 1) : 3$.

Bepunktungsvorschlag:

(a) 1 Punkt für die beiden Ergebnisse, wenn in (a) schon die Formel erkannt wird, dann gibt es hierfür zusätzlich 2 Punkte (statt in (b)).

(b) 2 Punkte für Erkennen der Formel (es sei denn, diese beiden Punkte wurden bereits in (a) vergeben), 1 Punkt für Antwort mit Begründung

(c) 3 Punkte für Rechnung mit Erklärung

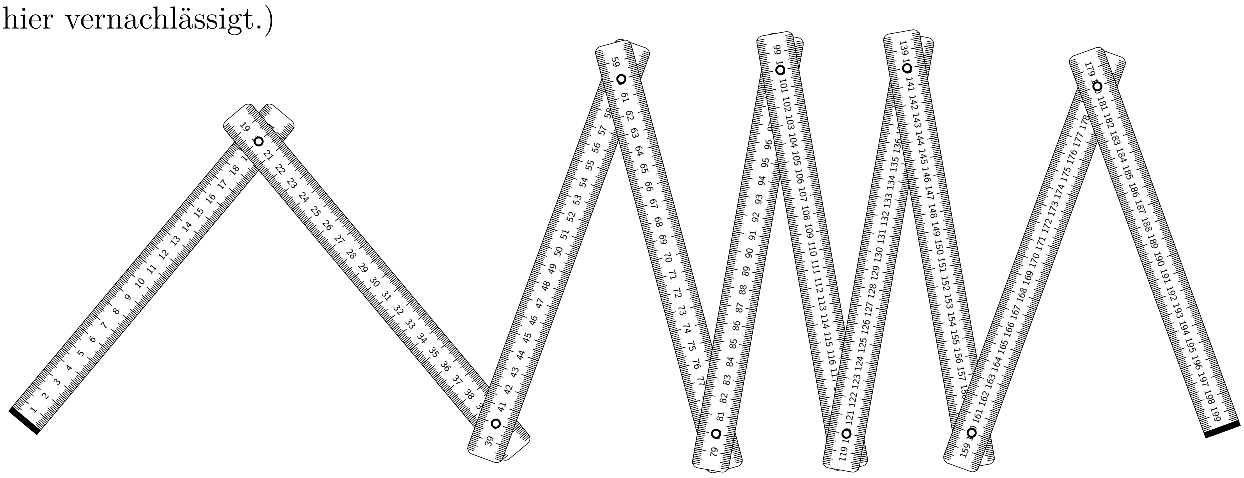
(d) 2 Punkte für Überlegung (Teilbarkeit durch 3), 1 Punkt für Ergebnis

Aufgabe 3: Zollstock *(3+2+5 Punkte)*

(a) Es seien $x, y, z > 0$ positive ganze Zahlen. Bestimmt die Anzahl der Lösungen (x, y, z) der Gleichung

$$x + y + z = 100.$$

(b) Ein handelsüblicher Zollstock besteht aus zehn Gliedern von jeweils 20 cm Länge, die über Gelenke miteinander verbunden sind. (Die Überstände an den Enden der Glieder werden hier vernachlässigt.)



Wenn man diesen Zollstock an genau zwei Gelenken so knickt, dass das eine Ende des Zollstocks auf seinem anderen Ende zu liegen kommt, entsteht ein *Zollstock-Dreieck* mit einem Umfang von 200 cm.

Gebt die Seitenlängen aller möglichen Zollstockdreiecke an, die man auf diese Weise legen kann und begründet, dass keine weiteren Zollstockdreiecke entstehen können.

(c) Ermittelt die Anzahl der *verschiedenen* (d. h. nicht zueinander kongruenten) Dreiecke mit Umfang $U = 200$, deren Seitenlängen beliebige natürliche Zahlen sind.

Lösung

(a) Wir bestimmen die Anzahl der Lösungen durch systematisches Zählen. Dabei genügt es, alle Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen zu bestimmen, für die $x + y < 100$ gilt, denn für die dritte Zahl z gilt dann sofort $z = 100 - x - y > 0$.

Wir bestimmen jeweils alle solchen Paare für ein festes $x = 1, ..., 98$. Es gibt

$$\begin{array}{llll} 98 \text{ Paare} & (1, y) & \text{mit} & y = 1, 2, ..., 98, \\ 97 \text{ Paare} & (2, y) & \text{mit} & y = 1, 2, ..., 97, \\ 96 \text{ Paare} & (3, y) & \text{mit} & y = 1, 2, ..., 96, \\ \vdots & & & \\ 1 \text{ Paar} & (98, y) & \text{mit} & y = 1. \end{array}$$

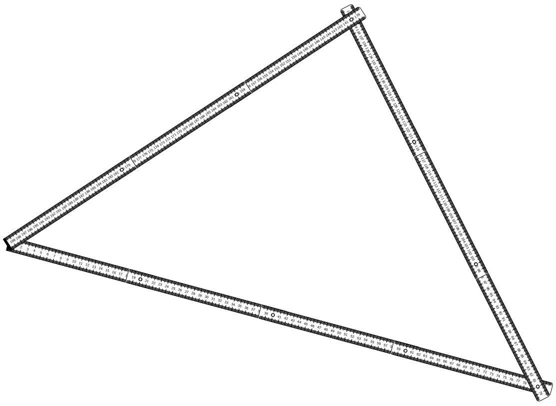
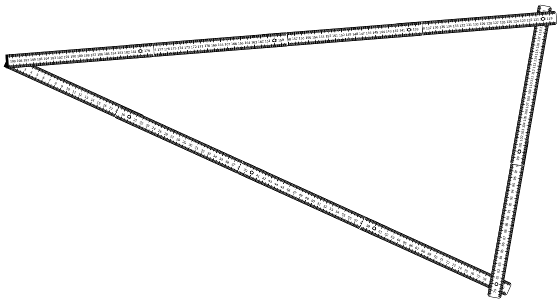
Insgesamt erhalten wir also

$$98 + 97 + 96 + ... + 1 = (98 + 1) + (97 + 2) + (96 + 3) + ... + (50 + 49) = 49 \cdot 99 = 4\,851$$

mögliche Lösungen.

(b) Mit einem Zollstock lassen sich nur Dreiecke bilden, deren Umfang 200 cm beträgt und deren Seitenlängen Vielfache von 20 cm sind. Damit aber überhaupt ein Dreieck entsteht, muss dabei jede Seite kleiner sein als die beiden anderen Seiten zusammen („Dreiecksungleichung“). Möglich sind Dreiecke mit den Seitenlängen

$$\begin{array}{rccc} & 80\,\text{cm}, & 60\,\text{cm}, & 60\,\text{cm} \\ \text{bzw.} & 80\,\text{cm}, & 40\,\text{cm}, & 80\,\text{cm}. \end{array}$$

Tatsächlich sind diese beiden (bis auf Kongruenz) auch die einzigen möglichen Dreiecke:

Die längste Seite eines „Zollstock-Dreiecks“ mit Umfang $U = 200$ cm muss genau 80 cm lang sein, denn sie muss

1. *größer* sein als 60 cm, da sonst für den Umfang $U \leq 3 \cdot 60\text{ cm} = 180\text{ cm} < 200\text{ cm}$ gelten würde,
2. *kleiner* sein als 100 cm, da sonst die Summe der beiden anderen Seitenlängen höchstens 100 cm betragen könnte, womit die Dreiecksungleichung verletzt wäre.

Die übrigen 120 cm können dann nur noch wie oben beschrieben auf die anderen Seiten verteilt werden.

(c) *1. Möglichkeit: Kombinatorische Überlegungen*

Wenn a, b und c die ganzzahligen Seitenlängen eines Dreiecks mit Umfang $U = 200$ sind, dann gilt $c = 200 - a - b$.

Die positiven ganzen Zahlen a, b und $200 - a - b$ sind nach der Dreiecksungleichung genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks, wenn jede Seite kleiner ist als die beiden anderen zusammen, d. h. wenn die drei folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{array}{rrcllrcl} \text{I.} & a+b & > & 200-a-b & \Leftrightarrow & a+b & > & 100, \\ \text{II.} & a+(200-a-b) & > & b & \Leftrightarrow & 100 & > & b, \\ \text{III.} & b+(200-a-b) & > & a & \Leftrightarrow & 100 & > & a. \end{array}$$

Wir suchen also Zahlenpaare (a, b) mit $a + b > 100$ und $a, b < 100$. Diese finden wir wie in (a) durch systematisches Zählen. Es gibt

$$\begin{array}{llll} 1 \text{ Paar} & (2, b) & \text{mit} & b = 99, \\ 2 \text{ Paare} & (3, b) & \text{mit} & b = 99, 98, \\ 3 \text{ Paare} & (4, b) & \text{mit} & b = 99, 98, 97, ... \\ \vdots & & & \\ 98 \text{ Paare} & (99, b) & \text{mit} & b = 99, 98, 97, ..., 2. \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir auch hier

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 = 4\,851$$

mögliche Zahlenpaare (a, b) bzw. „Dreiecksseiten-Tripel“ $(a, b, 200 - a - b)$.

Jedes Dreieck mit drei verschiedenen Seitenlängen a, b und c wird dabei allerdings sechsmal gezählt, nämlich durch die Tripel

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a).$$

Die 49 gleichschenkligen Dreiecke mit der Basislänge a und den Schenkellängen b,

$$(2, 99, 99), \quad (4, 98, 98), \quad (6, 97, 97), \quad \ldots, \quad (98, 51, 51),$$

werden dagegen nur dreimal gezählt, nämlich durch die Tripel

$$(a, b, b), \quad (b, a, b), \quad (b, b, a).$$

Insgesamt gibt es daher

$$\frac{4851 + 3 \cdot 49}{6} = 833$$

nicht-kongruente Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und Umfang $U = 200$.

2. Möglichkeit: Systematisches Zählen

Es seien a, b und c die ganzzahligen Seitenlängen eines Dreiecks mit Umfang $U = 200$.

Da wir kongruente Dreiecke ohnehin nur einmal zählen möchten, nehmen wir an, dass

$$a \leq b \leq c$$

gilt. Sollte das nicht der Fall sein, können wir die Bezeichnungen entsprechend ändern, denn das dadurch entstehende Dreieck ist kongruent zum Ausgangsdreieck.

Da c die längste Seite des Dreiecks ist, muss einerseits $c \geq \left\lceil \frac{200}{3} \right\rceil = 67$ gelten. Wegen der Dreiecksungleichung muss aber anderseits auch gelten:

$$\begin{array}{rrcl} & c & < & a + b \\ \Leftrightarrow & 2c & < & a + b + c = 200 \\ \Leftrightarrow & c & < & 100. \end{array}$$

Insgesamt ist also $67 \leq c \leq 99$.

Mit dieser Einschränkung (sowie $b + a = 200 - c$ und $a \leq b \leq c$) können wir die möglichen Seitenlängen des Dreiecks systematisch abzählen:

c	$b+a$	b	a
67	133	67	66
68	132	68	64
		67	65
		66	66
69	131	69	62
		68	63
		67	64
		66	65
70	130	70	60
		69	61
		68	62
		67	63
		66	64
		65	65
$\vdots$			
99	101	99	2
		98	3
		97	4
		$\vdots$	
		51	50

So erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
& 1+3+4+6+\ldots+49 \\
= {} & 1+4+7+10+\ldots+46+49 + 3+6+9+12+\ldots+45+48 \\
= {} & (1+49)+(4+46)+\ldots+(22+28)+25 + (3+48)+(6+45)+\ldots+(24+27) \\
= {} & 8\cdot 50+25 + 8\cdot 51 \\
= {} & 833
\end{aligned}$$

verschiedene Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und Umfang $U = 200$.

Bepunktungsvorschlag:

(a)
- 2 Punkte für einen zielführenden (und korrekt ausgeführten) Ansatz zum Zählen
- 1 Punkt für die korrekte Berechnung der Gesamtzahl

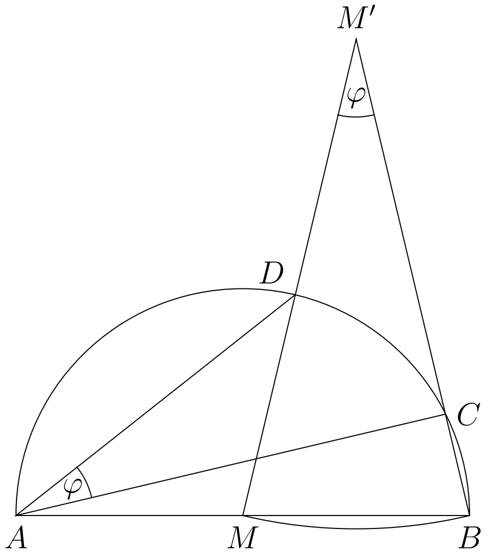
(b)
- 1 Punkt für die Angabe der möglichen Dreiecke
- 1 Punkt für die Begründung, dass es keine weiteren gibt

(c) 1. Möglichkeit: Kombinatorische Überlegungen
- 2 Punkte für die Bestimmung der Anzahl inklusive kongruenter Dreiecke
- 3 Punkte für die Bestimmung der Anzahl nicht-kongruenter Dreiecke

2. Möglichkeit: Systematisches Zählen
- 1 Punkt für die Einschränkung der längsten Seite
- 2 Punkte für einen zielführenden (und korrekt ausgeführten) Ansatz zum Zählen
- 2 Punkte für die korrekte Berechnung der Gesamtzahl

Aufgabe 4: Kreissektoren *(4+6 Punkte)*

In der folgenden Figur sind M und M' Mittelpunkte eines Halbkreises und eines Kreisausschnittes. Die beiden Winkel $\angle CAD$ und $\angle MM'B$ haben das gleiche Winkelmaß φ.



(a) Findet zwei weitere Paare gleich großer Winkel in der Figur, die keine Scheitelwinkel sind, und begründet jeweils eure Antwort.

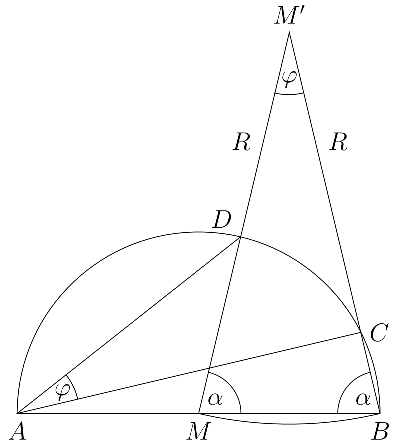
(b) Bestimmt nun den Wert von φ. Begründet hierfür jeden eurer Schritte.

Lösung zu (a):

Die Strecken $\overline{M'M}$ und $\overline{M'B}$ sind gleich lang, denn beide haben die Länge des Radius des Kreises mit Mittelpunkt M'. Daher ist das Dreieck $\Delta MBM'$ gleichschenklig. Aufgrund des Basiswinkelsatzes hat dieses Dreieck dann zwei kongruente Basiswinkel.
Außerdem sind die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MD}$ gleich lang, denn alle drei haben die Länge des Radius des Kreises mit Mittelpunkt M. Daher ist auch das Dreieck ΔAMD gleichschenklig. Aufgrund des Basiswinkelsatzes hat damit auch dieses zwei kongruente Basiswinkel.

Lösung zu (b):

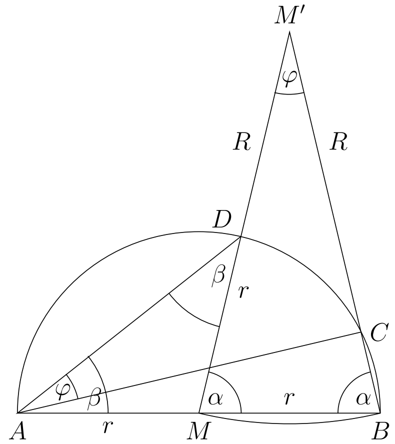
Wir bezeichnen das Maß der beiden kongruenten Basiswinkel des nach (a) gleichschenkligen Dreiecks $\Delta MBM'$ mit α (die Schenkellänge sei mit R bezeichnet).



Dann erhalten wir wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\Delta MBM'$ den Zusammenhang:

$$\varphi = 180° - 2\alpha.$$

Weiterhin bezeichnen wir das Maß der beiden kongruenten Basiswinkel des nach (a) gleichschenkligen Dreiecks ΔAMD mit β (die Schenkellänge sei mit r bezeichnet).



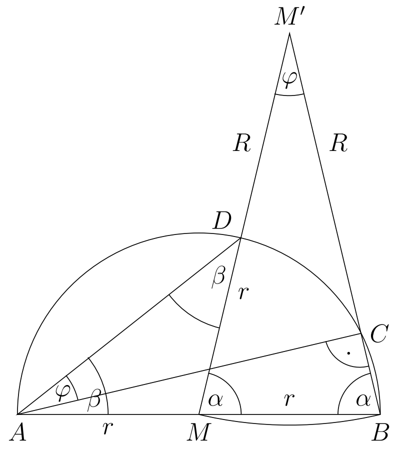
Damit erhalten wir wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck ΔAMD und wegen des Nebenwinkelsatzes (alternativ: Satz vom Außenwinkel) folgenden Zusammenhang:

$$\alpha = 2\beta.$$

Damit bekommt man:

$$\varphi = 180° - 4\beta.$$

Schließlich finden wir noch einen weiteren Zusammenhang zwischen β und φ über das Dreieck ΔABC. Dieses ist aufgrund des Satzes des Thales ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C.



Damit liefert die Innenwinkelsumme in diesem Dreieck:

$$\beta - \varphi = 90° - \alpha = 90° - 2\beta.$$

Damit ist $3\beta - \varphi = 90°$ bzw. $\beta = \frac{90°+\varphi}{3} = 30° + \frac{\varphi}{3}$.
Setzt man dies nun in $\varphi = 180° - 4\beta$ ein, bekommt man:

$$\varphi = 180° - 4\left(30° + \frac{\varphi}{3}\right) = 60° - \frac{4}{3}\varphi.$$

Addiert man $\frac{4}{3}\varphi$ auf beiden Seiten, erhält man dann $\frac{7}{3}\varphi = 60°$ und damit $\varphi = \frac{3}{7} \cdot 60° = \frac{1}{7} \cdot 180°$.

Alternative

Wir verwenden die Bezeichnungen von oben. Mit dem Innenwinkelsummensatz erhalten wir durch Betrachtung von $\Delta MBM'$, dass $\alpha = 90° - \frac{\varphi}{2}$ gelten muss. Der Nebenwinkelsatz liefert $|\measuredangle AMD| = 90° + \frac{\varphi}{2}$. Damit kann wieder mit dem Innenwinkelsummensatz auf das Maß $\beta = 45° - \frac{\varphi}{4}$ geschlossen werden.
Anschließend betrachten wir das Dreieck ΔABC. Dieses hat mit dem Satz des Thales in C einen rechten Winkel. Der Winkel in A hat das Maß $\beta - \varphi = 45° - \frac{5\varphi}{4}$. Wir erhalten mit dem Innenwinkelsummensatz

$$180° = \left(45° - \frac{5\varphi}{4}\right) + \left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) + 90° = 225° - \frac{7\varphi}{4},$$

welches die Lösung $\varphi = \frac{180°}{7}$ liefert.

Bepunktungsvorschlag:

Aufgabenteil (a):

- 1 Punkt für das Finden des gleichschenkligen Dreiecks mit Eckpunkt M'
  (nur 0,5 Punkte, falls Begründung fehlt)
- 1 Punkt für Finden der kongruenten Basiswinkel im Dreieck $\Delta MBM'$
  (nur 0,5 Punkte, wenn Stichwort Basiswinkel oder Basiswinkelsatz nicht genannt sind)
- 1 Punkt für das Finden des gleichschenkligen Dreiecks mit Eckpunkt M
  (nur 0,5 Punkte, falls Begründung fehlt)
- 1 Punkt für Idenzifizieren der kongruenten Basiswinkel
  (nur 0,5 Punkte, wenn Stichwort Basiswinkel oder Basiswinkelsatz nicht genannt sind)

Alternativ können auch andere Paare kongruenter Winkel gefunden werden. Auch dort gibt es jeweils zwei Punkte, von denen jeweils grob einer für das Finden des Paares und einer für das Begründen der Kongruenz vergeben wird.

Aufgabenteil (b):

- 1 Punkt für das Aufstellen einer korrekten Beziehung zwischen φ und α im Dreieck $\Delta MBM'$ aus der Skizze
  (nur 0.5 Punkte, falls Begründung über Innenwinkelsumme fehlt)
- 1 Punkt für das Finden und Begründen einer korrekten Beziehung zwischen α und β im Dreieck ΔAMD aus der Skizze
  (nur 0,5 Punkte, falls eine Begründung über Innenwinkelsumme/Satz vom Außenwinkel fehlt)

  oder bei der alternativen Lösung:

  1 Punkt für das Finden und Begründen einer korrekten Beziehung zwischen β und φ über den Nebenwinkelsatz im Dreieck ΔAMD
  (nur 0,5 Punkte, falls eine Begründung über Innenwinkelsumme und Nebenwinkelsatz fehlt)
- 1 Punkt für das Finden des rechten Winkels im Dreieck ΔABC
  (nur 0,5 Punkte, falls der Satz des Thales nicht explizit genannt wird)
- 1 Punkt für das korrekte Ableiten einer Winkelbeziehung mit dem Dreieck ΔABC
  (nur 0,5 Punkte, falls eine Begründung über die Innenwinkelsumme fehlt)
- 2 Punkte für die restliche Rechnung
  (1 Punkt für sinnvolles Weiterrechnen bis nur der Winkel φ vorhanden ist, 1 Punkt für den Abschluss und das korrekte Ergebnis)