

Aufgabe 1: Zahlenspielereien mit 2024 (2+4+4 Punkte)

- a) Wie viele verschiedene Zahlen lassen sich aus der Zahl 2024 durch Vertauschen ihrer Ziffern bilden? Dabei ist ein Ausdruck wie „0224“, der durch Vertauschen der ersten beiden Ziffern in 2024 entsteht, als die Zahl 224 zu verstehen. Bestimme unter allen Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern in 2024 gebildet werden können, die kleinste Zahl m sowie die größte Zahl M und ermittle die Anzahl aller Quadratzahlen im Intervall $[m, M]$.
- b) Von diesen durch Vertauschen der Ziffern der Zahl 2024 entstandenen Zahlen werden nun je zwei verschiedene Zahlen miteinander addiert. Wieviele Möglichkeiten gibt es hierfür und wie viele verschiedene Zahlen entstehen dadurch?
- c) Befinden sich unter den in (b) gebildeten Zahlen Palindrome, d.h. Zahlen, deren Ziffernfolge von links und von rechts gelesen die gleiche Zahl ergibt? Wie viele verschiedene Zahlenpalindrome entstehen in (b) und wie oft werden sie durch Addition verschiedener Zahlen in (b) gebildet?

Lösung.

1. Lösungsweg:

- a) Es sind die vier Zahlen 0, 2, 2, 4 auf 4 Plätze zu verteilen, dabei sind die beiden 2en gleich. Wären alle 4 Zahlen verschieden, dann hätte man für die erste Zahl vier Möglichkeiten, ihren Platz zu wählen, für die zweite Zahl nur noch drei Möglichkeiten, für die dritte Zahl nur noch zwei Möglichkeiten und für die vierte Zahl nur noch eine Möglichkeit ihren Platz zu wählen. Dies ergibt:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ Möglichkeiten.}$$

(Man bezeichnet das Produkt $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ der ersten n natürlichen Zahlen symbolisch mit $n!$ bzw. in Worten als „ n Fakultät“.) Weil nun aber zwei Zahlen, nämlich die beiden 2en, gleich sind, halbiert sich die Anzahl der Möglichkeiten. Aus den vier Ziffern 0, 2, 2, 4 können also 12 verschiedene vierstellige Zahlen gebildet werden.

Die kleinste Zahl ist hierbei

$$m = 0224$$

und die größte Zahl ist

$$M = 4220.$$

Zur Bestimmung der Anzahl der Quadratzahlen natürlicher Zahlen im Intervall $[m, M]$ stellen wir fest, dass die Funktion $f(x) = x^2$ monoton wachsend ist auf $[m, M]$. Außerdem ist $f(15) = 15^2 = 225 > m$ und $f(64) = 64^2 = 4096 < M$, aber $f(65) = 65^2 = 4225 > M$. Aufgrund der Monotonie von f liegen nun alle Quadrate der natürlichen Zahlen von 15 bis 64 im Intervall $[m, M]$. Dies sind also

$$64 - 14 = 50 \text{ Zahlen.}$$

- b) Die Anzahl der Möglichkeiten, 2 verschiedene Zahlen aus 12 verschiedenen Zahlen auszuwählen, ergibt sich als $12 \cdot 11$, denn man hat 12 Möglichkeiten, die erste Zahl zu wählen und 11 Möglichkeiten, die zweite Zahl zu wählen. Weil diese beiden Zahlen addiert werden und dabei die Reihenfolge egal ist, halbiert sich die Anzahl der möglichen verschiedenen Summen:

$$\frac{12 \cdot 11}{2} = 6 \cdot 11 = 66.$$

Bei diesen 66 Summen entstehen jedoch einige Zahlen mit gleichem Wert. Wir ermitteln jetzt, wieviele verschiedene Zahlen sich bei dieser Addition bilden lassen. Dazu stellen wir fest, dass durch die Addition von zwei der vier Ziffern die folgenden Ziffern entstehen können:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0, \\ 2 &= 2 + 0, \\ 4 &= 4 + 0 = 2 + 2, \\ 6 &= 2 + 4, \\ 8 &= 4 + 4. \end{aligned}$$

Die Quersumme der Zahl 2024 ist 8. Alle Zahlen, die in (a) durch Ziffernvertauschung entstehen, haben auch die Quersumme 8. Bei der Addition zweier dieser Zahlen entsteht somit eine Zahl mit der Quersumme 16. Die Quersumme verdoppelt sich also und dies ist so, weil die Addition von je zwei der Ziffern 0, 2, 4, wie oben ersichtlich, auf die neuen möglichen Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 < 10 führt. Wir überlegen uns jetzt, welche vierstelligen Zahlen mit der Quersumme 16 als Kombination der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 gebildet werden können und ebenso durch Addition zweier verschiedener Zahlen aus (a) entstehen könnten. Dies sind:

$$\begin{aligned} 4444 &= 2024 + 2420, \\ 6622 &= 2420 + 4202, \\ 4282 &= 2240 + 2042, \\ 6442 &= 2422 + 4022, \\ 6640 &= 2420 + 4220 \end{aligned}$$

und alle weiteren Zahlen, die aus diesen 5 Zahlen durch Ziffernvertauschung entstehen können. Auch die Zahl 4480 und die Zahlen, die sich hieraus durch Ziffernvertauschung ergeben, haben die Quersumme 16, aber sie entstehen nur durch Addition zweier gleicher Zahlen aus (a), nämlich

$$4480 = 2240 + 2240.$$

Sie scheiden deshalb aus.

Wir müssen uns jetzt noch überlegen, wie viele Ziffernvertauschungen der Zahlen 4444, 6622, 4282, 6442 und 6640 zu neuen vierstelligen Zahlen führen.

Die Zahl 4444 besteht aus lauter gleichen Ziffern. Jede Ziffernvertauschung führt hierbei also wieder auf 4444. Die Anzahl der Ziffernvertauschungen, die eine andere Zahl ergibt, ist also

$$\#aZV(4444) = 1.$$

Die Zahl 6622 besteht aus vier Ziffern, von denen je zwei gleich sind. Man hätte $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, vier verschiedene Ziffern auf vier Plätze zu verteilen, je zwei sind hier aber gleich. Daher ergibt sich die Anzahl der Ziffernvertauschungen, die eine andere Zahl liefert, als

$$\#aZV(6622) = (4! : 2) : 2 = 4! : 4 = 3! = 6.$$

Die Zahl 4282 besteht aus vier Ziffern, von denen zwei gleich sind. Wie oben hätte man $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, vier verschiedene Ziffern auf vier Plätze zu verteilen, hier sind nun aber zwei gleich. Die Anzahl der Ziffernvertauschungen, die eine andere Zahl liefert, ergibt sich nun als

$$\#aZV(4282) = 4! : 2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Genauso kann für die Zahlen 6442 und 6640 die Anzahl der Ziffernvertauschungen ermittelt werden, die auf andere Zahlen führen:

$$\#aZV(6442) = \#aZV(6640) = 4! : 2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Insgesamt lassen sich also

$$1 + 6 + 3 \cdot 12 = 43$$

verschiedene Zahlen bilden.

c) Bei der Addition in (b) entstehen die drei Zahlenpalindrome

$$4444, 2662, 6226.$$

Das Palindrom 4444 lässt sich dabei erzeugen durch die Addition

$$\begin{array}{r} 2 \ 2 \ 4 \ 0 \\ + \ 2 \ 2 \ 0 \ 4 \\ \hline 4 \ 4 \ 4 \ 4 \end{array}$$

sowie durch Ziffernvertauschung hiervon. Für den ersten senkrechten Block mit den 2en haben wir 4 Möglichkeiten einen Platz zu wählen, für den zweiten 2er-Block nur noch drei Möglichkeiten. Die beiden sind aber nicht voneinander zu unterscheiden, wodurch sich die Anzahl der Möglichkeiten halbiert. Der Block mit 4 und 0 bzw. 0 und 4 muss dann an den verbleibenden freien Stellen stehen und eine Vertauschung dieser beiden Blöcke ergibt jeweils die andere Zahl, die summiert wird. Entscheidend ist also die Anzahl der Möglichkeiten, die beiden senkrechten Blöcke mit den 2en zu verteilen. Dies sind also

$$(4 \cdot 3) : 2 = 6 \text{ Möglichkeiten.}$$

Das Palindrom 4444 wird somit 6 mal durch Addition verschiedener durch Ziffernvertauschung entstandener Zahlen aus (a) erzeugt.

Das Palindrom 2662 lässt sich lediglich durch zwei Additionen erzeugen, nämlich durch

$$\begin{array}{r} 2 \ 2 \ 4 \ 0 \\ + \ 0 \ 4 \ 2 \ 2 \\ \hline 2 \ 6 \ 6 \ 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} 2 \ 4 \ 2 \ 0 \\ + \ 0 \ 2 \ 4 \ 2 \\ \hline 2 \ 6 \ 6 \ 2 \end{array}$$

denn man hat zwei Möglichkeiten die beiden senkrechten Blöcke mit 2 und 0 auf die erste und die vierte Stelle zu setzen, bzw. die beiden senkrechten Blöcke mit 2 und 4 auf die zweite und die dritte Stelle zu setzen. Das Palindrom 2662 wird also 2 mal durch Addition verschiedener Zahlen aus (a) erzeugt.

Genauso kann argumentiert werden, dass auch das Palindrom 6226 sich nur 2 mal durch Addition verschiedener Zahlen aus (a) erzeugen lässt, nämlich durch

$$\begin{array}{r} 2 \ 0 \ 2 \ 4 \\ + \ 4 \ 2 \ 0 \ 2 \\ \hline 6 \ 2 \ 2 \ 6 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} 2 \ 2 \ 0 \ 4 \\ + \ 4 \ 0 \ 2 \ 2 \\ \hline 6 \ 2 \ 2 \ 6 \end{array}$$

2. Lösungsweg: Alles zu Fuß aus-x-en

- a) Wir bilden im Folgenden alle möglichen Ziffernvertauschungen der Zahl 2024. Wir starten mit allen möglichen Zahlen, die an der ersten Stelle eine 2 haben. Wir dürfen also noch die drei verbliebenen Ziffern 0, 2, 4 auf die drei verbliebenen Plätze verteilen. Hierfür haben wir die folgenden $3! = 3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten:

- 2024
- 2042
- 2402
- 2420
- 2240
- 2204

Jetzt bilden wir alle möglichen Zahlenkombinationen, die an erster Stelle die 4 haben. Wir haben wieder 6 Möglichkeiten die verbleibenden Ziffern 0, 2, 2 auf die restlichen drei Plätze zu verteilen, wir können dabei aber die beiden 2en nicht voneinander unterscheiden. Daher halbiert sich die Anzahl der Möglichkeiten auf insgesamt 3, welche sind:

- 4220
- 4202
- 4022

Nun bilden wir alle möglichen Zahlen, die an erster Stelle die 0 haben. Wie bei der 4 haben wir 3 Möglichkeiten:

- 0224
- 0242
- 0422

Inklusive der Zahl 2024 gibt es also 12 verschiedene Zahlen durch Ziffernvertauschung. Die kleinste Zahl hierunter ist $m = 0224$, die größte ist $M = 4220$. Danach geht es weiter wie beim 1. Lösungsweg.

- b) Die Anzahl der Möglichkeiten, 2 verschiedene Zahlen aus 12 verschiedenen Zahlen auszuwählen, ergibt sich als $12 \cdot 11$. Dabei ist jedoch die Reihenfolge der Summanden egal, weshalb sich die Anzahl halbiert. Es gibt also $(12 \cdot 11) : 2 = 66$ Möglichkeiten. Dies können wir auch durch explizites Hinschreiben und Abzählen all dieser Möglichkeiten rausfinden. Um systematisch vorzugehen, stellen wir zunächst durch Betrachtung der 12 Zahlen in (a) fest, dass die Summation der Ziffern 0, 2, 4 die Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 ergeben kann. Wir bilden nun zunächst die diejenigen Summen, die nach Addition an erster Stelle eine 0 haben. Sie ergeben sich aus der Addition von je zwei der drei verschiedenen durch Ziffernvertauschung entstandenen Zahlen, die an erster Stelle eine 0 haben. Um 2 aus 3 Zahlen auszuwählen, wobei die Reihenfolge ihrer Auswahl egal ist, haben wir die $(3 \cdot 2) : 2 = 3$ Möglichkeiten:

$$\begin{array}{r}
 0 \ 2 \ 2 \ 4 \\
 + \ 0 \ 2 \ 4 \ 2 \\
 \hline
 0 \ 4 \ 6 \ 6
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{r}
 0 \ 2 \ 2 \ 4 \\
 + \ 0 \ 4 \ 2 \ 2 \\
 \hline
 0 \ 6 \ 4 \ 6
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{r}
 0 \ 2 \ 4 \ 2 \\
 + \ 0 \ 4 \ 2 \ 2 \\
 \hline
 0 \ 6 \ 6 \ 4
 \end{array}$$

Diese drei Zahlen sind alle voneinander verschieden.

Ebenso haben wir $(3 \cdot 2) : 2 = 3$ Möglichkeiten durch Addition eine Zahl mit einer 8 an erster Stelle zu erzeugen:

$$\begin{array}{r} 4\ 0\ 2\ 2 \\ +\ 4\ 2\ 0\ 2 \\ \hline 8\ 2\ 2\ 4 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} 4\ 0\ 2\ 2 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 8\ 2\ 4\ 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} 4\ 2\ 0\ 2 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 8\ 4\ 2\ 2 \end{array}$$

und auch diese drei Zahlen sind voneinander verschieden.

Es gibt 18 Zahlen mit 2 an erster Stelle:

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4 \\ +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\ \hline 2\ 2\ 4\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4 \\ +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 2\ 2\ 6\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4 \\ +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\ \hline 2\ 4\ 4\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 0\ 4 \\ +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\ \hline 2\ 4\ 2\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 2\ 0\ 4 \\ +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 2\ 4\ 4\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 2\ 0\ 4 \\ +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\ \hline 2\ 6\ 2\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 4\ 0 \\ +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\ \hline 2\ 4\ 6\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 2\ 4\ 0 \\ +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 2\ 4\ 8\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 2\ 4\ 0 \\ +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\ \hline 2\ 6\ 6\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 2\ 0 \\ +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\ \hline 2\ 6\ 4\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 4\ 2\ 0 \\ +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 2\ 6\ 6\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 4\ 2\ 0 \\ +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\ \hline 2\ 8\ 4\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 4\ 2 \\ +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\ \hline 2\ 2\ 6\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 0\ 4\ 2 \\ +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 2\ 2\ 8\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 0\ 4\ 2 \\ +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\ \hline 2\ 4\ 6\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 0\ 2 \\ +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\ \hline 2\ 6\ 2\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 4\ 0\ 2 \\ +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 2\ 6\ 4\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\ 4\ 0\ 2 \\ +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\ \hline 2\ 8\ 2\ 4 \end{array}$$

Wir stellen durch scharfes Hinsehen fest, dass hierbei die 6 Zahlen

$$2266, \quad 2446, \quad 2626, \quad 2464, \quad 2644 \quad \text{und} \quad 2662$$

doppelt auftreten. Unter den 18 Zahlen, die mit 2 beginnen, sind also nur $18 - 6 = 12$ verschiedene Zahlen. Ausserdem erkennen wir in 2662 ein Palindrom.

Dazu kommen 18 Zahlen mit 6 an erster Stelle:

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4 \\ +\ 4\ 0\ 2\ 2 \\ \hline 6\ 0\ 4\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4 \\ +\ 4\ 2\ 0\ 2 \\ \hline 6\ 2\ 2\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 6\ 2\ 4\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 0\ 4 \\ +\ 4\ 0\ 2\ 2 \\ \hline 6\ 2\ 2\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 0\ 4 \\ +\ 4\ 2\ 0\ 2 \\ \hline 6\ 4\ 0\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 0\ 4 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 6\ 4\ 2\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 4\ 0 \\ +\ 4\ 0\ 2\ 2 \\ \hline 6\ 2\ 6\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 4\ 0 \\ +\ 4\ 2\ 0\ 2 \\ \hline 6\ 4\ 4\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 2\ 4\ 0 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 6\ 4\ 6\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 2\ 0 \\ +\ 4\ 0\ 2\ 2 \\ \hline 6\ 4\ 4\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 2\ 0 \\ +\ 4\ 2\ 0\ 2 \\ \hline 6\ 6\ 2\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 2\ 0 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 6\ 6\ 4\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 4\ 2 \\ +\ 4\ 0\ 2\ 2 \\ \hline 6\ 0\ 6\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 4\ 2 \\ +\ 4\ 2\ 0\ 2 \\ \hline 6\ 2\ 4\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 4\ 2 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 6\ 2\ 6\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 0\ 2 \\ +\ 4\ 0\ 2\ 2 \\ \hline 6\ 4\ 2\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 0\ 2 \\ +\ 4\ 2\ 0\ 2 \\ \hline 6\ 6\ 0\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 0\ 2 \\ +\ 4\ 2\ 2\ 0 \\ \hline 6\ 6\ 2\ 2 \end{array}$$

Wieder stellen wir durch scharfes Hinsehen fest, dass hierbei die 6 Zahlen

6226, 6244, 6424, 6262, 6442 und 6622

doppelt auftreten. Unter den 18 Zahlen, die mit 6 beginnen, sind also nur $18 - 6 = 12$ verschiedene Zahlen. Desweiteren ist die Zahl 6226 ein Palindrom.

24 Zahlen haben die 4 an erster Stelle: Wir stellen fest, dass eine 4 an erster Stelle erzeugt werden kann durch Addition von zwei verschiedenen der 6 Zahlen mit 2 an erster Stelle sowie durch Addition von einer der drei Zahlen mit 4 an erster Stelle mit einer der drei Zahlen mit 0 an erster Stelle. Im ersten Fall gibt es $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ Möglichkeiten zwei Zahlen aus sechs auszuwählen, wobei beim Auswählen die Reihenfolge egal ist. Im zweiten Fall gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten, je eine drei drei Zahlen mit 4 mit einer der drei Zahlen mit 0 an erster Stelle zu kombinieren. Wir schreiben zunächst die 15 Kombinationen auf, die aus den Kombinationen mit 2 an erster Stelle entstehen:

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 2\ 4 \\
 +\ 2\ 2\ 0\ 4 \\
 \hline
 4\ 2\ 2\ 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 0\ 2\ 4 \\
 +\ 2\ 2\ 4\ 0 \\
 \hline
 4\ 2\ 6\ 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 0\ 2\ 4 \\
 +\ 2\ 4\ 2\ 0 \\
 \hline
 4\ 4\ 4\ 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 0\ 2\ 4 \\
 +\ 2\ 0\ 4\ 2 \\
 \hline
 4\ 0\ 6\ 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 0\ 2\ 4 \\
 +\ 2\ 4\ 0\ 2 \\
 \hline
 4\ 4\ 2\ 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 2\ 0\ 4 \\
 +\ 2\ 2\ 4\ 0 \\
 \hline
 4\ 4\ 4\ 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 2\ 0\ 4 \\
 +\ 2\ 4\ 2\ 0 \\
 \hline
 4\ 6\ 2\ 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 2\ 0\ 4 \\
 +\ 2\ 0\ 4\ 2 \\
 \hline
 4\ 2\ 4\ 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 2\ 0\ 4 \\
 +\ 2\ 4\ 0\ 2 \\
 \hline
 4\ 6\ 0\ 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 2\ 4\ 0 \\
 +\ 2\ 4\ 2\ 0 \\
 \hline
 4\ 6\ 6\ 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 2\ 4\ 0 \\
 +\ 2\ 0\ 4\ 2 \\
 \hline
 4\ 2\ 8\ 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 2\ 4\ 0 \\
 +\ 2\ 4\ 0\ 2 \\
 \hline
 4\ 6\ 4\ 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 4\ 2\ 0 \\
 +\ 2\ 0\ 4\ 2 \\
 \hline
 4\ 4\ 6\ 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\ 4\ 2\ 0 \\
 +\ 2\ 4\ 0\ 2 \\
 \hline
 4\ 8\ 2\ 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 4\ 2 \\
 +\ 2\ 4\ 0\ 2 \\
 \hline
 4\ 4\ 4\ 4
 \end{array}$$

Nun ermitteln wir die 9 Kombinationen der Zahlen mit jeweil 4 bzw. 0 an erster Stelle:

$$\begin{array}{r}
 4\ 0\ 2\ 2 \\
 +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\
 \hline
 4\ 2\ 4\ 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4\ 0\ 2\ 2 \\
 +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\
 \hline
 4\ 2\ 6\ 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4\ 0\ 2\ 2 \\
 +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\
 \hline
 4\ 4\ 4\ 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4\ 2\ 0\ 2 \\
 +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\
 \hline
 4\ 4\ 2\ 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4\ 2\ 0\ 2 \\
 +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\
 \hline
 4\ 4\ 4\ 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4\ 2\ 0\ 2 \\
 +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\
 \hline
 4\ 6\ 2\ 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4\ 2\ 2\ 0 \\
 +\ 0\ 2\ 2\ 4 \\
 \hline
 4\ 4\ 4\ 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4\ 2\ 2\ 0 \\
 +\ 0\ 2\ 4\ 2 \\
 \hline
 4\ 4\ 6\ 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4\ 2\ 2\ 0 \\
 +\ 0\ 4\ 2\ 2 \\
 \hline
 4\ 6\ 4\ 2
 \end{array}$$

Wir stellen fest, dass

$$4444$$

sechsmal auftritt und ein Palindrom ist. Desweiteren treten diese Zahlen doppelt auf:

$$\begin{array}{l}
 4246, \quad 4264, \quad 4624, \\
 4642, \quad 4462, \quad 4426.
 \end{array}$$

Von den 24 Kombinationen mit 4 an erster Stelle sind also lediglich $24 - 5 - 6 = 13$ von einander verschieden.

Insgesamt haben wir also

- 3 verschiedene Zahlen mit 0 an erster Stelle,
- 12 verschiedene Zahlen mit 2 an erster Stelle,
- 13 verschiedene Zahlen mit 4 an erster Stelle,
- 12 verschiedene Zahlen mit 6 an erster Stelle,
- 3 verschiedene Zahlen mit 8 an erster Stelle,

Gesamt: 43 verschiedene vierstellige Zahlen.

- c) In (b) haben wir festgestellt, dass durch die Addition die drei Zahlenpalindrome 4444, 2662 und 6226 entstehen, wobei 4444 auf sechs verschiedene Weisen und die beiden anderen jeweils auf 2 verschiedenen Weisen durch Addition gebildet werden können.

Punkteverteilung.

- a) Es gibt **1 Punkt** für die richtige Antwort und Argumentation, wieviele verschiedene vierstellige Zahlen aus den Ziffern 0, 2, 2, 4 gebildet werden können, **1 Punkt** für die Bestimmung von m , M und die Anzahl der Quadratzahlen; es gibt **-0.5 Punkte**, wenn eine der drei Antworten falsch ist.
- b) Es gibt **1 Punkt** für die richtige Anzahl, 2 verschiedene Zahlen aus 12 verschiedenen Zahlen zu addieren; **1 Punkt** ist für die richtige Antwort, wie viele verschiedene Zahlen dadurch entstehen. **2 Punkte** sind für eine schlüssige Argumentation hierfür; Abstufungen sind möglich.
- c) Es gibt **1 Punkt** für die richtige Antwort, ob und wieviele verschiedene Zahlenpalindrome entstehen, **1 Punkt** ist für die richtige Antwort, wie oft sie gebildet werden. **2 Punkte** gibt es für eine passende, schlüssige Argumentation; Abstufungen sind möglich.

Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!

Aufgabe 2: Sophies Geld (5+1+4 Punkte)

Sophie möchte sich Karten für das Taylor-Swift-Konzert dieses Jahr in Hamburg kaufen, und hat dafür Geld gespart. In ihrer Spardose sind ausschließlich Ein- und Zwei-Euro-Münzen, insgesamt sind es mindestens 170 Münzen. (Sie hat sie neulich alle mal herausgeholt, aber bei 170 aufgehört zu zählen.) Wenn sie nun zufällig zwei Münzen aus ihrer Spardose herausnimmt, dann hat sie mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit genau 3 Euro in der Hand.

- Beweist, dass die Anzahl der Münzen in Sophies Spardose eine Quadratzahl ist. Wie viele sind es mindestens?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass gleich viele Ein- und Zwei-Euro-Münzen in der Spardose sind?
- Kann sich Sophie mit dem Geld aus der Spardose mit Sicherheit ihren Wunsch erfüllen, die Konzertkarten zu kaufen? Die Karten kosten 300 Euro.

Lösung.

- Wir bezeichnen mit e und z die Anzahl der Ein- und Zwei-Euro-Münzen in der Spardose. Wir wissen, dass $e + z \geq 170$, und machen uns zunächst Folgendes klar: Um genau 3 Euro zu ziehen, muss Sophie eine Ein- und eine Zwei-Euro-Münze ziehen, egal in welcher Reihenfolge. Sie kann also 1-2 bzw. 2-1 ziehen; die Wahrscheinlichkeiten dafür sind

$$\frac{e}{e+z} \cdot \frac{z}{e+z-1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{z}{e+z} \cdot \frac{e}{e+z-1}.$$

Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit also die Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$p = \frac{2ez}{(e+z)(e+z-1)}.$$

Laut Aufgabentext ist die Wahrscheinlichkeit p nun gerade $1/2$, d.h.

$$\frac{1}{2} = \frac{2ez}{(e+z)(e+z-1)},$$

was sich zu

$$\begin{aligned} e^2 + 2ez + z^2 - (e+z) &= 4ez \\ \Leftrightarrow e^2 - 2ez + z^2 &= (e+z) \\ \Leftrightarrow (e-z)^2 &= (e+z) \end{aligned}$$

umformen lässt. Das bedeutet, dass $n = e + z$, die Anzahl der Münzen insgesamt, eine Quadratzahl ist, und folglich befinden sich mindestens $n \geq 14^2 = 196$ Münzen in der Spardose befinden, denn das ist die kleinste Quadratzahl, die größer als 170 ist.

- Wir setzen $d = e - z$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $d = 0$ ist, ist gleich 0, denn wegen $|d| = \sqrt{n} \geq 14$ können es nicht gleich viele Einer und Zweier sein.
- Nach Einsetzen von $d = e - z$ in die Gleichung $e + z = (e - z)^2$ erhalten wir:

$$e = \frac{d^2 + d}{2} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{d^2 - d}{2}.$$

Der Eurobetrag in der Spardose entspricht gerade $b = e + 2z$ Euro, also (in Euro)

$$b = \frac{d^2 + d}{2} + d^2 - d = \frac{3d^2 - d}{2}.$$

Da $d = \sqrt{n} \geq 14$, sind das zwar mindestens $(3 \cdot 196 - 14)/2 = 287$ Euro, aber nicht unbedingt genug, um die Konzertkarten zu kaufen. Sophie kann sich also nicht sicher sein, dass ihr Geld ausreicht. (Der Betrag b ist monoton steigend in d , daher reicht es, $d = 14$ zu betrachten.)

Bemerkung: Enthält die Spardose $n = 15^2$ Münzen, reicht das Geld für die Karte; $n = 14^2$ ist also der einzige für Sophie ungünstige Fall.

Punkteverteilung.

- a) Es gibt **2 Punkte** für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit p , **2 Punkte** für die Begründung, dass n eine Quadratzahl ist und **1 Punkt** für die größte untere Schranke.
- b) Es gibt **1 Punkt** für die Begründung, dass $|d| > 0$.
- c) Es gibt **2 Punkte** für die Berechnung von e und z als Funktionen von d . **1 Punkt** für die Berechnung des Spardoseninhalts und **1 Punkt** für das Monotonieargument.

Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!

Aufgabe 3: Abwurfspiel einmal anders (2+3+1+2+2 Punkte)

Ein paar Schulfreundinnen ($2n + 1$, um genau zu sein, wobei $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ eine natürliche Zahl ist) probieren ein neues Abwurfspiel aus. Sie stellen sich auf dem Schulhof so auf, dass die Abstände zwischen je zwei von ihnen verschieden sind. Auf ein Zeichen der Spielleiterin hin wirft jede von ihnen die Freundin ab, die ihr am nächsten steht (und trifft sie).

- a) Betrachtet zunächst das folgende Beispiel, in dem sich 9 Freundinnen aufgestellt haben. Zeichnet die Wurflinien der Bälle ein. Welche Freundinnen werden nicht abgeworfen?

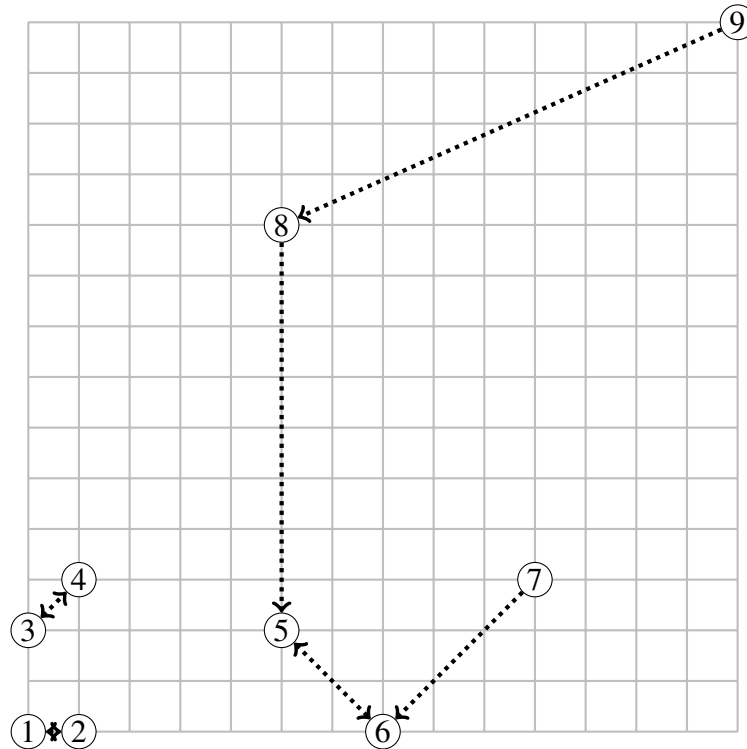
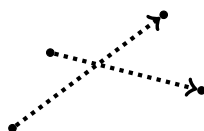


Abbildung 1: 9 Freundinnen bewerfen sich mit Bällen.

- b) Hier und in allen folgenden Teilaufgaben betrachten wir wieder den allgemeinen Fall mit $2n + 1$ Freundinnen. Begründet, warum immer mindestens eine von ihnen nicht abgeworfen wird.
- c) Begründet, warum die Wurflinien nie einen geschlossenen Linienzug (mit mindestens drei Linien) enthalten können.
- d) Begründet, warum sich zwei Wurflinien nicht in genau einem inneren Punkt kreuzen können so wie hier



(Sie können sich aber in einem Punkt kreuzen, an dem eine der Freundinnen steht, oder sie können identisch sein.)

- e) Begründet, warum keine der Freundinnen jemals von mehr als 5 Bällen getroffen wird.

Lösung.

- a) Die Freundinnen bewerfen sich wie in Abbildung 1 gezeigt. Nummer 7 und 9 werden nicht abgeworfen.
- b) Die beiden Freundinnen mit minimalem Abstand bewerfen sich gegenseitig. Es gibt dann zwei Fälle:
- Im ersten Fall bekommt (mindestens) eine von ihnen einen weiteren Ball ab, d.h. diese beiden Freundinnen bekommen mindestens drei Bälle ab. Da für die verbleibenden $2n - 1$ Freundinnen dann nur noch $2n - 2$ Bälle übrig sind, muss eine Glück haben.
 - Im zweiten Fall werden die beiden von keinem weiteren Ball getroffen, d.h. die restlichen $2n - 1$ Freundinnen werfen aufeinander.

Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall können wir das gleiche Argument für $2n - 1$ Freundinnen wiederholen und wieder das Paar mit minimalem Abstand betrachten. Das geht so weiter, bis entweder der o.g. erste Fall eintritt oder bis wir so viele Paare aussortiert haben, dass nur noch 3 Freundinnen übrig bleiben. Von diesen wirft dann die dritte auf eine der beiden, die sich am nächsten stehen. Sie selbst wird nicht abgeworfen.

- c) k Freundinnen sind in einem geschlossenen Linienzug durch k Wurflinien verbunden. Da sich die beiden am nächsten stehenden Freundinnen in diesem Linienzug aber gegenseitig abwerfen, bilden die Würfe der beiden nur eine Wurflinie. Es fehlt dann eine Wurflinie, um den Linienzug zu schließen. (1 Punkt) Betrachte z.B. die Freundinnen 5–9 in Abbildung 1.
- d) Das liegt daran, dass in einem Viereck nicht beide Diagonalen kürzer als jede der Seiten sein können. Ein ausführliches elementares Argument geht wie folgt.

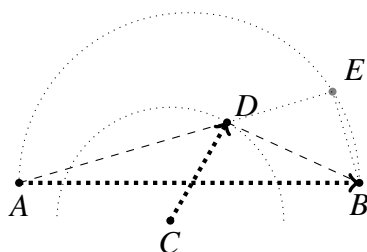


Abbildung 2: Darum können sich Wurflinien nicht kreuzen.

Angenommen, die Wurflinien AB und CD kreuzen sich. Dann befinden sich A und B außerhalb des Kreises mit Mittelpunkt C durch den Punkt D, denn sonst hätte C auf A oder B geworfen. Der Wurf AB kreuzt den Wurf CD, o.B.d.A. so wie in Abbildung 2 dargestellt (d.h. oberhalb des Durchmessers des Kreises).

Wir argumentieren nun, dass im Dreieck ADB die Seite AD kürzer ist als die Seite AB. Das kann aber nicht sein, denn dann hätte A auf D und nicht auf B werfen müssen, Widerspruch. AD ist kürzer als AB, weil der Winkel ADB stumpf ist.

Man kann auch argumentieren, dass man AD bis zum dem Punkt E auf dem Thaleskreis über A und B verlängern kann, und die Seite AE nach dem Satz des Pythagoras immer noch kürzer als die Seite AB ist.

- e) Angenommen, A wird von 6 (oder mehr) Freundinnen B, C, D, E, F und G abgeworfen. Dann betrachten wir das unregelmäßige Sechseck mit den Ecken B, C, D, E, F und G und dem Punkt A in Inneren, in dem einer der Winkel XAY, wobei X und Y verschiedene der Freundinnen B, . . . , G sind, höchstens $360^\circ/6 = 60^\circ$ ist. Wir betrachten willkürlich die Freundinnen B und C dazu das Dreieck ABC wie in Abbildung 3.

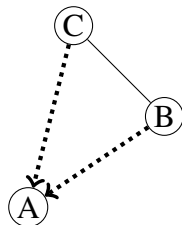


Abbildung 3: Man wird nicht beliebig oft getroffen.

Der Winkel BAC ist $\leq 60^\circ$, also ist einer der beiden anderen Winkel $\geq 60^\circ$, sagen wir, es ist der Winkel ABC. Die diesem größeren Winkel ABC gegenüberliegende Seite AC ist dann aber länger als die dem kleineren Winkel BAC gegenüberliegende Seite BC, also hätte B auf C werfen müssen, und nicht auf A, Widerspruch (es können nicht alle Winkel und dann alle Seiten gleich lang sein).

Punkteverteilung.

- a) Es gibt **1 Punkt** für die Zeichnung, **1 Punkt** für die Freundinnen, die Glück gehabt haben.
- b) **1 Punkt** ist für den Schritt von $2n+1$ zu $2n-1$ Freundinnen, **1 Punkt** für die Fallunterscheidung bei $2n-1$. **1 Punkt** ist das Argument wert, dass im zweiten Fall mindestens 3 Freundinnen übrigbleiben, von denen eine nicht abgeworfen wird.
- c) Es gibt **1 Punkt** für ein schlüssiges Argument.
- d) **1 Punkt** soll für eine aussagekräftige Zeichnung vergeben werden und **1 Punkt** für die Begründung (z.B. Diagonale nicht kürzer als eine Seite).
- e) Es gibt **1 Punkt** für eine aussagekräftige Zeichnung bzw. das Winkelargument, **1 Punkt** für das Widerspruchsargument.

Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!

Aufgabe 4: Mysteriöse Funktion (1+5+4 Punkte)

Es sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen und $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Funktion, die die folgenden Bedingungen für alle $x, y, n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt:

$$f(xy + x + y) = f(x) + f(y) + 1 \quad (1)$$

$$f(2^n) = n \quad (2)$$

- Was ist $f(0)$?
- Was ist $f(12)$?
- Was ist $f(571)$?

Hinweis: Die Funktion f muss nicht explizit als Formel (z.B. $f(x) = x^2$) angegeben werden.

Lösung.

- Indem man $x = y = 0$ in (1) einsetzt, erhält man $f(0) = f(0) + f(0) + 1$. Folglich ist $f(0) = -1$.
- Es sei $g(n) = f(n - 1)$. Dann erfüllt diese Funktion die Gleichungen

$$g(xy) = g(x) + g(y) + 1 \quad (3)$$

$$g(2^n + 1) = n. \quad (4)$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} g(xy) &= f(xy - 1) \\ &= f((x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1)) \\ &\stackrel{(1)}{=} f(x - 1) + f(y - 1) + 1 \\ &= g(x) + g(y) + 1 \end{aligned}$$

und

$$g(2^n + 1) = f(2^n) \stackrel{(2)}{=} n$$

Aus (4) folgt $g(2) = f(1) = 0$ für $n = 0$, $g(3) = f(2) = 1$ für $n = 1$ und $g(5) = f(4) = 2$ für $n = 2$. Damit können wir nun $g(13) = f(12)$ ausrechnen:

$$6 \stackrel{(4)}{=} g(65) = g(13 \cdot 5) \stackrel{(3)}{=} g(13) + g(5) + 1 = g(13) + 2 + 1.$$

Somit ist $f(12) = g(13) = 3$.

Alternative Vorgehensweise: Man kann die Aufgabe auch direkt und ohne Hilfsfunktion lösen, indem man feststellt, dass

$$6 \stackrel{(2)}{=} f(64) = f(4 \cdot 12 + 12 + 4) \stackrel{(1)}{=} f(12) + f(4) + 1 \stackrel{(2)}{=} f(12) + 2 + 1$$

gilt. Somit muss $f(12) = 3$ gelten.

- c) Man kann zwar wieder nach einer passenden Zweierpotenz und einer Zerlegung dieser Zahl suchen, aber dabei verzettelt man sich leicht. Daher bietet sich der Ansatz mit der Hilfsfunktion aus b) an. Zunächst berechnen wir $g(11)$:

$$5 \stackrel{(4)}{=} g(33) \stackrel{(3)}{=} g(3) + g(11) + 1 = 1 + g(11) + 1$$

Somit ist $g(11) = 3$. Durch die Primfaktorenzerlegung $572 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 13$ erhalten wir mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil (b) durch wiederholtes Anwenden der Zerlegung in Gleichung (3)

$$\begin{aligned} f(571) &= g(572) = g(2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 13) \\ &\stackrel{(3)}{=} g(2) + g(2) + g(11) + g(13) + 3 = 0 + 0 + 3 + 3 + 3 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Punkteverteilung.

- a) Es gibt **1 Punkt** für die Berechnung von $f(0)$.
- b) 1. *Lösungsansatz*: Es gibt **1 Punkt** für die Idee eine Hilfsfunktion einzuführen, **2 Punkte** für die Charakterisierung derselben durch eine Funktionalgleichung und **2 Punkte** für die iterative Berechnung von $f(12)$ mittels Hilfsfunktion.
2. *Lösungsansatz*: Es gibt **4 Punkte** für den Ansatz mit der Zweierpotenz und die zielführende Zerlegung dieser Zweierpotenz, in der die Zahl 12 auftaucht. **1 Punkt** soll es für die richtige Antwort geben.
- In beiden Fällen sollten jeweils **Teilpunkte** für sinnvolle Ansätze vergeben werden.
- c) Es soll **1 Punkt** für die Berechnung von geeigneten Hilfwerten (z.B. $g(11)$) geben, **1 Punkt** für die Idee der Primfaktorenzerlegung, **2 Punkte** für die iterative Anwendung der Funktionalgleichung und die Berechnung von $f(571)$.

Lösungen, die nicht dieser Musterlösung entsprechen, sollen natürlich entsprechend bepunktet werden!