Klassenstufe 11–13

In jeder Stufe des Wettbewerbs gibt es 4 Aufgaben. Mit jeder Aufgabe können 15 Punkte erworben werden.

Aufgabe 1.

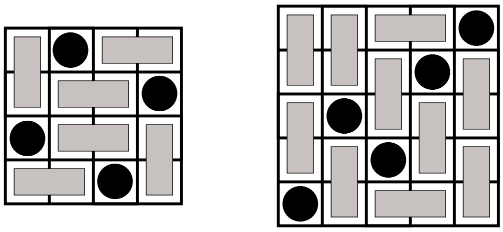
Auf einem $k \times k$-Schachbrett sollen k Türme aufgestellt werden, die sich paarweise nicht schlagen und zwar so, dass die übrigen Felder komplett mit Dominosteinen belegt werden können.

(a) Zeige, dass es für alle k, $k \in \mathbb{N}$, der Gestalt $k = 4\ell$ oder $k = 4\ell + 1$ mit $l \in \mathbb{N}$ eine solche Turm-Domino-Aufstellung gibt.

(b) Zeige, dass es für $k = 6$ keine Turm-Domino-Aufstellung gibt.

Lösung:

(a) Für $k = 4$ und $k = 5$ sind solche Turm-Domino-Anordnungen leicht gefunden. Lösungsbeispiele zeigt das Bild.



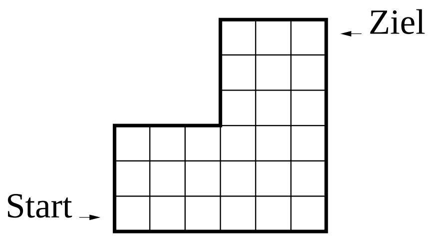
Eine Lösung für $k+4$ erhält man aus einer für k, indem man die bekannten Lösungen für $k \times k$ und für 4×4 diagonal in dem $(k+4) \times (k+4)$ Brett anordnet und die beiden verbleibenden $k \times 4$ und $4 \times k$ Streifen mit senkrechten beziehungsweise waagrechten Dominos auffüllt.

(b) Wir denken uns das 6×6 Brett wie ein Schachbrett gefärbt. Das Feld hat gleich viele weiße wie schwarze Felder. Da jedes Domino ein weißes und ein schwarzes Feld belegt, müssen die sechs Türme auch gleich viele weiße und schwarze Felder abdecken. Dass das nicht geht, werden wir gleich zeigen.

Sei T_i der Turm in Zeile i und s_i die Spalte in der T_i steht. Wenn T_i auf einem weißen Feld steht, dann ist $p_i = i + s_i$ gerade. Wenn das Feld schwarz ist, dann ist p_i ungerade. Unsere Forderung ist, dass drei der Türme auf Weiß und drei auf Schwarz stehen, also muss $Q = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$ eine ungerade Zahl sein. Da in jeder Zeile und jeder Spalte einer der Türme steht, gilt auch $Q = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$ und das ist gerade. Da Q nicht gleichzeitig gerade und ungerade sein kann, ist für $k = 6$ keine Turm-Domino-Aufstellung möglich.

Aufgabe 2.

In dem abgebildeten Spielbrett darf eine Figur aus einem Feld immer nur in das rechte oder oben benachbarte Feld gehen. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann eine Figur vom Startfeld ins Zielfeld gelangen?



Lösung:

Es ist günstig die Felder zu indizieren: $f_{i,j}$ sei das Feld in der i-ten Zeile von unten und der j-ten Spalte von links. Wir fangen mit der 0-ten Zeile und der 0-ten Spalte an, also ist das Startfeld $f_{0,0}$ und das Zielfeld $f_{5,5}$. Die Anzahl der zulässigen Wege für unsere Figur von $f_{0,0}$ nach $f_{i,j}$ sei $a_{i,j}$.

Die wesentliche Beobachtung ist, dass jeder Weg von $f_{0,0}$ nach $f_{i+1,j+1}$ als vorletztes entweder das Feld $f_{i+1,j}$ oder das Feld $f_{i,j+1}$ besucht. Dies liefert eine disjunkte Zerlegung der Wege von $f_{0,0}$ nach $f_{i+1,j+1}$. Umgekehrt lässt sich jeder Weg von $f_{0,0}$ nach $f_{i+1,j}$ oder $f_{i,j+1}$ um einen Schritt auf das Feld $f_{i+1,j+1}$ verlängern. Dies zeigt die Rekursion

$$a_{i+1,j+1} = a_{i+1,j} + a_{i,j+1},$$

geeignete Anfangsbedingungen sind $a_{0,0} = 1$ und $a_{i,j} = 0$, wenn die Indizes i, j kein Feld des Brettes beschreiben.

Die Rekursion erlaubt die Berechnung des Wertes $a_{i,j}$ für alle Felder, z.B. kann man zeilenweise von unten nach oben vorgehen. So erhält man $a_{5,5} = 126$ als Ergebnis.

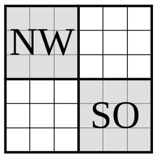
Der Rechenaufwand lässt sich erheblich verringern, zum Beispiel mit folgenden Überlegungen:

- Wenn mit einem Feld $f_{i,j}$ auch alle Felder die in dem Rechteck, das von $f_{0,0}$ und $f_{i,j}$ aufgespannt wird, zum Brett gehören (das sind die Felder $f_{x,y}$ mit $0 \leq x \leq i$ und $0 \leq y \leq j$), dann ist der Wert $a_{i,j}$ ein Eintrag aus dem Pascalschen Dreieck:
$$a_{i,j} = \binom{i+j}{i}.$$
- Jeder Weg von $f_{0,0}$ nach $f_{5,5}$ läuft über genau eines der Felder $f_{0,5}$, $f_{1,4}$ oder $f_{2,3}$. Die Anzahl der Wege, die über $f_{1,4}$ laufen, erhält man als Produkt der Anzahl der Wege von $f_{0,0}$ nach $f_{1,4}$ und der Anzahl der Wege von $f_{1,4}$ nach $f_{5,5}$. Aus Symmetrie sind diese Anzahlen gleich, also gibt es $a_{1,4}^2$ Wege von

$f_{0,0}$ nach $f_{5,5}$ über $f_{1,4}$. Genauso kann man für die Zwischenfelder $f_{0,5}$ und $f_{2,3}$ argumentieren. Die gesuchte Anzahl ist daher

$$a_{0,5}^2 + a_{1,4}^2 + a_{2,3}^2 = \binom{5}{0}^2 + \binom{5}{1}^2 + \binom{5}{2}^2 = 1^2 + 5^2 + 10^2 = 126.$$

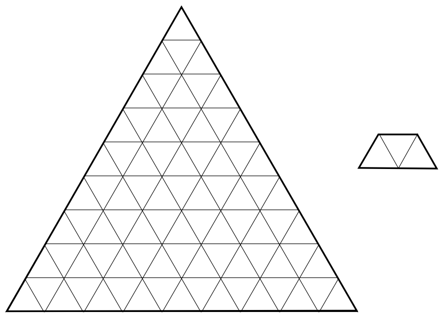
- Noch kürzer geht es, wenn man sich das volle Brett mit sechs Zeilen und sechs Spalten vorstellt. Hier gibt es $\binom{5+5}{5} = 252$ Wege von $f_{0,0}$ nach $f_{5,5}$. Jeder dieser Wege benutzt entweder Felder im Gebiet NW oder im Gebiet SO (siehe Abbildung).



Spiegelung an der Hauptdiagonalen zeigt, dass es gleich viele Wege der beiden Typen gibt. Die gesuchte Anzahl ist die der Wege, die nur Felder in SO benutzen, sie ist also $\frac{1}{2}\binom{5+5}{5} = \frac{252}{2} = 126$.

Aufgabe 3.

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge n und ein Trapezbaustein mit Seiten 1-1-1-2. Für welche n kann das Dreieck mit Trapezbausteinen ausgelegt werden? (Natürlich dürfen sich die Bausteine nicht überlappen und es dürfen keine Lücken bleiben, aber die Bausteine dürfen gedreht werden).



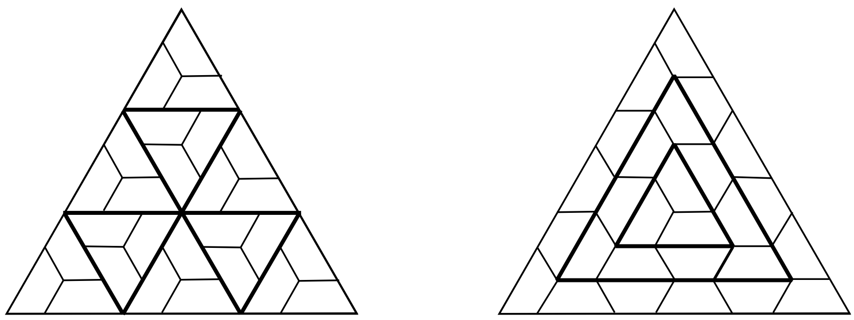
Lösung:

Die Länge n muss sich als Summe von Einsen und Zweien darstellen lassen, also ist n eine natürliche Zahl.

Die Anzahl der elementaren 1-1-1 Dreiecke in die das n-n-n Dreieck zerfällt, ist n^2. Man bekommt dies durch zählen von Dreiecken in den Zeilen $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$. Alternativ kann man die oben spitzen und die unten spitzen Elementardreiecke getrennt betrachten, vom ersten Typ gibt es $1+2+3+\ldots+n = \frac{(n+1)n}{2}$, vom zweiten Typ gibt es $1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, zusammen also n^2.

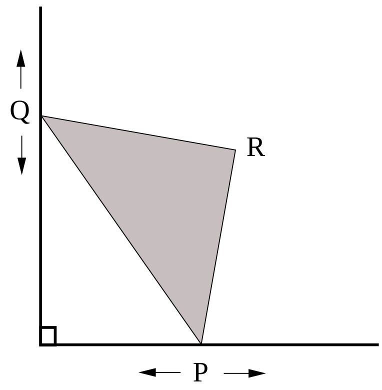
Da ein Trapez genau drei Elementardreiecke enthält muss n^2 ein Vielfaches von 3 sein, also ist auch n ein Vielfaches von 3.

Wenn 3 ein Teiler von n ist, dann geht es. Die Abbildung deutet zwei Zerlegungen des Dreiecks für $n = 3k$ an.



Aufgabe 4.

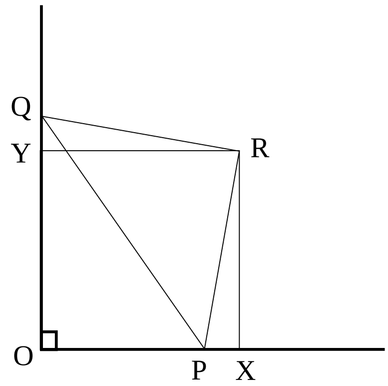
Die Eckpunkte P und Q eines Geodreiecks gleiten entlang zweier benachbarter Randseiten in einem Schuhkarton (siehe Abbildung). Welche Bahn beschreibt die Ecke R des Geodreiecks?

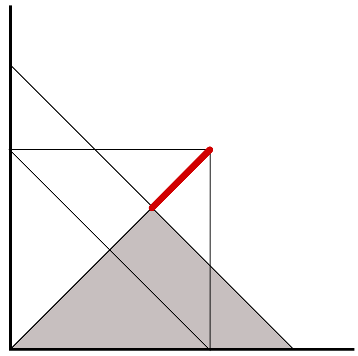


Lösung:

Beweis mit kongruenten Dreiecken

Fälle die Lote von R auf die beiden Achsen





Mit den Bezeichnungen aus der Abbildung (links) gilt: (a) Die Winkel QRP und YRX sind beide rechte Winkel. Deshalb sind die Winkel QRY und PRX gleich. (b) Die Winkel RYQ und RXP sind rechte Winkel. (c) Die Strecken QR und RP sind Katheten des Geodreiecks, daher sind sie gleich lang.

Aus (a), (b) und (c) folgt, dass die Dreiecke QRY und PRX kongruent sind, insbesondere sind also die Strecken RX und RY gleich lang. Daher liegt der Punkt R auf der Winkelhalbierenden g der beiden Achsen.

Wir können auch feststellen, in welchem Bereich der Winkelhalbierenden g der Punkt R liegt: Wenn eine der Katheten des Geodreiecks mit g in Deckung ist, dann ist der Abstand von R zu den Achsen genau $\frac{1}{\sqrt{2}}k$, wenn k die Kathetenlänge ist. Andererseits kann der Abstand nicht größer als k werden. Die obige Abbildung (rechts) zeigt die Bahn des Punktes R.