Klassenstufe 7–8

In jeder Stufe des Wettbewerbs gibt es 4 Aufgaben. Mit jeder Aufgabe können 15 Punkte erworben werden.

Aufgabe 1.

In jeder der beiden Zeilen einer 2×7-Tabelle stehen die Zahlen 1 bis 7 in beliebiger Reihenfolge. In jeder der sieben Spalten wird die untere von der oberen Zahl subtrahiert und dann das Produkt dieser Differenzen gebildet. Zeige, dass das Produkt immer eine gerade Zahl ist.

Lösung:

Wir benötigen zwei einfache Feststellungen:

(A) Ein Produkt ist genau dann gerade wenn einer der Faktoren gerade ist.

Also genügt es zu zeigen, dass die Differenz, die zu einer der Spalten gehört, gerade ist.

(B) Eine Differenz oder Summe ist genau dann gerade, wenn beide beteiligte Zahlen gerade oder beide ungerade sind.

Die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ enthält 3 gerade und 4 ungerade Zahlen. Daher ist es unvermeidbar, dass eine ungerade Zahl in der unteren Zeile unter eine ungerade Zahl in der oberen Zeile geschrieben wird. Die Differenz zu dieser Spalte ist dann der gesuchte gerade Faktor.

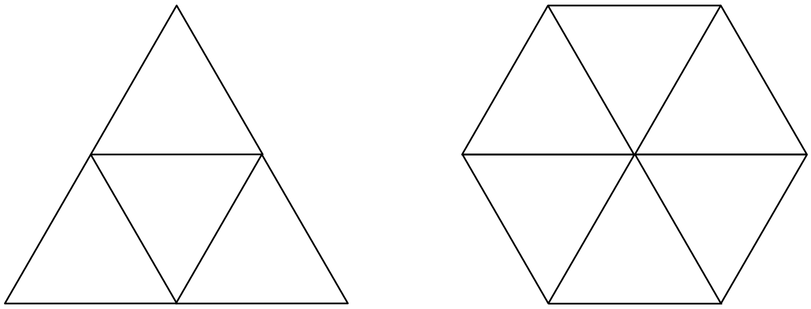
Aufgabe 2.

Gegeben seien ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Sechseck mit dem gleichen Umfang. Um wieviel Prozent ist die Fläche des Sechsecks größer als die des Dreiecks?

Lösung:

Wenn a die Seitenlänge des Sechsecks ist, dann ist die Seitenlänge des Dreiecks $2a$. Die Abbildung zeigt, wie das Dreieck in vier gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge a zerlegt werden kann. Das Sechseck kann in sechs gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge a zerlegt werden.

Das Verhältnis Sechsecksfläche:Dreiecksfläche ist also 6:4. Die Sechsecksfläche ist um die Hälfte größer als die Dreiecksfläche, das sind 50% mehr.



Aufgabe 3.

Die folgende Tabelle beschreibt eine Abbildung f der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ in sich selbst.

$x:$	1	2	3	4	5	6	7
$f(x):$	7	5	2	3	3	6	4

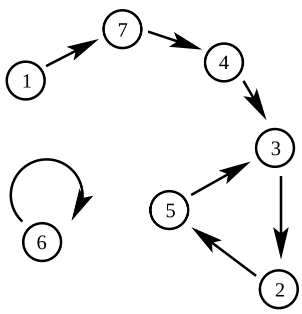
Wir benutzen f, um eine Folge von Zahlen festzulegen: Als Startwert wählen wir $a_0 = 1$, die Regel, um das nächste Folgenglied zu bestimmen, ist $a_{i+1} = f(a_i)$ (Wenn also z.B. $a_4 = 2$, dann ist $a_5 = f(a_4) = f(2) = 5$ und $a_6 = f(a_5) = f(5) = 3$ usw.).

(1) Was ist a_{2006}?

(2) Welchen Wert kann man für a_{2006} bekommen, wenn man einen anderen Startwert wählt?

Lösung:

Die Abbildungsvorschrift kann man auch durch ein Bild beschreiben:



(a) Die ersten Glieder der Folge sind also $1, 7, 4, 3, 2, 5, 3, 2, 5, 3, 2, 5, 3, \ldots$. Aus dem periodischen Verhalten folgt sofort, dass a_{2006} nur einen der Werte 2, 3 oder 5 haben kann. Welchen?

Die mit $a_0 = 1$ startende Folge hat $a_3 = 3$. Denselben Wert für a_3 und also auch denselben Wert für a_{2006} bekommen wir, wenn wir mit $a_0 = 3$ starten. Jetzt ist der Wert von a_k nur vom Rest der Division $k : 3$ abhängig. Es gilt $2006 = 3 \cdot 668 + 2$, also ist $a_{3 \cdot 668} = a_{2004} = 3$, $a_{2005} = 2$ und $a_{2006} = 5$.

(b) Die Werte 1, 4 und 7 können in jeder Folgen $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ nur einmal vorkommen und zwar unter den ersten 3 Gliedern. Die übrigen Werte sind für a_{2006} möglich. Geeignete Startwerte sind wie folgt:

$$a_0 = 6 \quad \Longrightarrow \quad a_{2006} = 6,$$

$$a_0 = 3 \quad \Longrightarrow \quad a_{2006} = 5,$$

$$a_0 = 2 \quad \Longrightarrow \quad a_{2006} = 3,$$

$$a_0 = 5 \quad \Longrightarrow \quad a_{2006} = 2.$$

Aufgabe 4.

Ein Gärtner pflanzt Gänseblümchen unter jeden vierten Baum einer Allee, unter jeden sechsten Baum pflanzt er Narzissen und unter jeden zehnten Baum Krokusse. Die Allee hat 600 Bäume, wie viele davon zieren Blumen aller drei Arten?

Lösung:

Die Bäume haben die Nummern $1, 2, 3, \ldots, 600$. Unter den Bäumen mit den Nummern $4, 8, 12, 16, \ldots, 600$ sind Gänseblümchen. Anders ausgedrückt, ein Gänseblümchen wächst unter dem k-ten Baum genau wenn k ein Vielfaches von 4 ist. Genauso gilt: Eine Narzisse wächst unter dem k-ten Baum genau wenn k ein Vielfaches von 6 ist und ein Krokus steht unter dem k-ten Baum genau wenn k ein Vielfaches von 10 ist.

Wir interessieren uns also für die Anzahl der k zwischen 1 und 600 die gemeinsame Vielfache von 4, 6 und 10 sind. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $4 = 2 \cdot 2$ und $6 = 2 \cdot 3$ und $10 = 2 \cdot 5$ ist $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Alle gemeinsamen Vielfachen von 4, 6 und 10 sind Vielfache des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, also von 60.

Es gibt genau 10 Vielfache von 60 zwischen 1 und 600. Also gibt es 10 Bäume, die von Blumen aller drei Arten geziert werden.