Klassenstufe 9–10

In jeder Stufe des Wettbewerbs gibt es 4 Aufgaben. Mit jeder Aufgabe können 15 Punkte erworben werden.

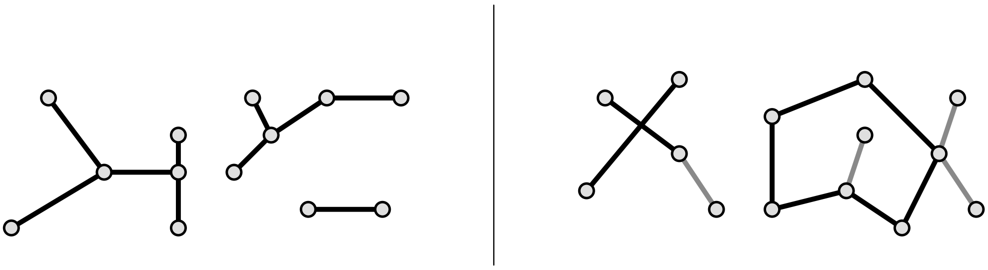
Aufgabe 1.

Sei X eine endliche Menge von Punkten in der Ebene. Wir verbinden jeden der Punkte mit dem nächsten Nachbarpunkt durch eine Strecke*.

(a) Zeige, dass sich keine zwei der Strecken im Inneren schneiden.

(b) Zeige, dass die so erzeugten Streckenmenge keinen geschlossenen Streckenzug enthält.

Das Beispiel links in der Abbildung zeigt eine gültige Streckenmenge. Die Streckenmenge rechts enthält sich schneidende Strecken und einen geschlossenen Streckenzug.

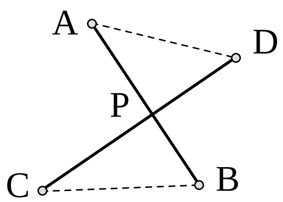


---

* Es darf angenommen werden, dass die Lage der Punkte so ist, dass der nächste Nachbarpunkt für jeden Punkt in X eindeutig bestimmt ist.

Lösung:

(a) Angenommen, es gibt ein Paar sich schneidender Strecken:



Die Strecke AB sei in der Menge, weil B der nächste Nachbar von A ist. Die Strecke CD sei in der Menge, weil D der nächste Nachbar von C ist. Dann gilt: AB ist kürzer als AD, wir schreiben das als $AB < AD$, ebenso gilt $CD < CB$. Die beiden Ungleichungen zusammen ergeben $AB + CD < AD + CB$.

In jedem Dreieck XYZ gilt die *Dreiecksungleichung*: $XY < XZ + ZY$. Dies wenden wir auf die Dreiecke DAP und CBP an und bekommen $DA < DP + PA$ und $CB < CP + PB$. Die beiden Ungleichungen zusammen ergeben $AD + CB < DP + PA + CP + PB = (AP + PB) + (CP + PD) = AB + CD$.

Insgesamt haben wir die Ungleichungskette: $AB + CD < AD + CB < AB + CD$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine kreuzenden Strecken geben kann.

(b) Angenommen, die Strecken AB, BC, CD, …, MN und NA kommen alle vor.

Die Längen von AB und AN sind verschieden, wir wollen annehmen, dass AN kürzer ist.

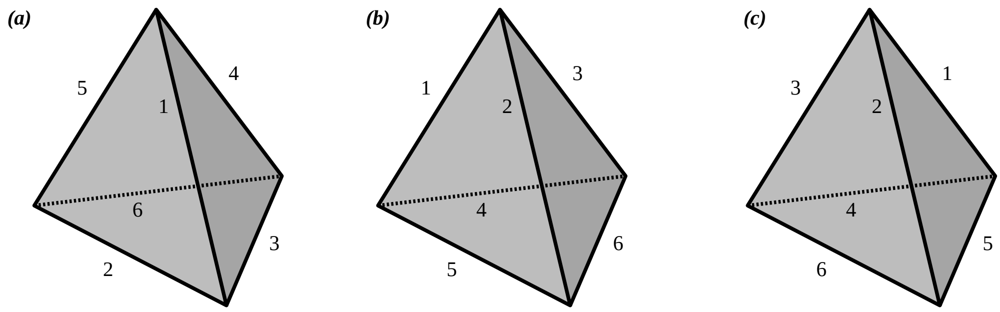
Es folgt, dass B nicht der nächste Nachbar von A ist, also kann die Strecke AB nur in der Menge sein weil A der nächste Nachbar von B ist. Wir notieren dies als $B \rightarrow A$ und stellen fest, dass dies auch bedeutet, dass BA kürzer ist als BC, also $BA < BC$.

Die Strecke BC kann daher nur in der Menge sein, weil B der nächste Nachbar von C ist, also $C \rightarrow B$ und $CB < CD$.

Auf diese Weise fahren wir fort und erzeugen die Kette $A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow D \leftarrow \ldots \leftarrow M \leftarrow N \leftarrow A$, die auch bedeutet, dass $AB < BC < \ldots < M < NA$. Dies kann nicht sein, schliesslich haben wir angenommen, dass $AN < AB$. Der Widerspruch zeigt, dass es keinen geschlossenen Streckenzug in der Menge geben kann.

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Papiermodell eines regulären Tetraeders (d.h. alle Kanten sind gleich lang). Die Kanten des Modells sollen mit den Farben $1, 2, \ldots, 6$ so gefärbt werden, dass jede Farbe vorkommt. Wie viele verschiedene Kantenfärbungen sind möglich? (Die Kantenfärbungen a und b in der Abbildung sind gleich, aber c zeigt eine andere Kantenfärbung).



Lösung:

Zunächst betrachten wir alle möglichen Bilder eines Kantengefärbten Tetraeders, das heißt wir betrachten auch die in a und b gezeigten Bilder als verschieden.

Färbt man die Kanten $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ der Reihe nach, dann gibt es für k_1 sechs Möglichkeiten, für k_2 noch 5 Möglichkeiten, für k_4 gibt es 4 Möglichkeiten und so weiter, insgesamt also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Möglichkeiten.

Wir gehen nun von diesen 720 Bildern aus und überlegen, wie viele Bilder jeweils die gleiche Färbung des Tetraeders zeigen. Wir können jede der vier Seiten des Tetraedes als die Grundseite wählen. Ist die Grundseite festgelegt, dann kann noch jede der drei Ecken der Grundseite als die vordere gewählt werden. Insgesamt erhalten wir so $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten das Tetraeder zu positionieren, jede dieser Möglichkeiten liefert ein anderes Bild.

Da von den 720 Bildern jeweils 12 die gleiche Färbung des Tetraeders zeigen, gibt es $720 : 12 = 60$ verschiedene Färbungen des Tetraeders.

Aufgabe 3.

Sei N das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 (die Zahl N nennt man hundert Fakultät). Wir können N schreiben als $30^k M$, wobei M eine nicht durch 30 teilbare natürliche Zahl ist. Wie groß ist k?

Lösung:

Wir schreiben $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ für die größte ganze Zahl $\leq \frac{n}{k}$, das heißt $n = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor k + r$ mit $0 \leq r < k$.

Zunächst eine allgemeine Überlegung: Sei p eine Primzahl. Es gibt $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ Vielfache von p, die kleiner sind als n. Ebenso gibt es $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ Vielfache von p^2, die kleiner sind als n. Und genauso für höhere Potenzen: Es gibt $\lfloor \frac{n}{p^t} \rfloor$ Vielfache von p^t, die kleiner sind als n. Daraus ergibt sich, dass die höchste Potenz von p, die n Fakultät teilt, der Wert der folgenden Summe ist:

$$\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \ldots$$

Der letzte Summand ist $\lfloor \frac{n}{p^s} \rfloor$, wenn p^s die größte Potenz von p ist, die noch kleiner ist als n.

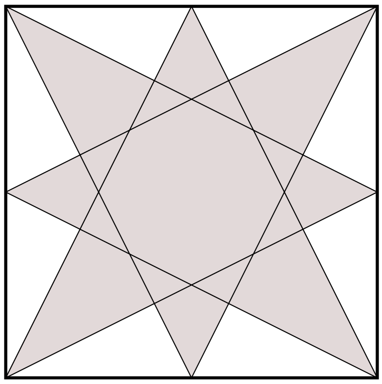
Wir zerlegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und überlegen uns, dass die höchste Potenz von 30, die 100 Fakultät teilt, auf jeden Fall höchstens so groß sein kann, wie die entsprechenden Potenzen von 2, 3 und 5. Umgekehrt folgt aus $2^k \big| 100!$ und $3^k \big| 100!$ und $5^k \big| 100!$ natürlich auch $30^k \big| 100!$. Wir werten nun also die Summen aus:

$$\begin{aligned}
&\lfloor \frac{100}{5} \rfloor + \lfloor \frac{100}{25} \rfloor = 20 + 4 = 24 \\
&\lfloor \frac{100}{3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{9} \rfloor + \lfloor \frac{100}{27} \rfloor + \lfloor \frac{100}{81} \rfloor = 33 + 11 + 3 + 1 > 24 \\
&\lfloor \frac{100}{2} \rfloor + \lfloor \frac{100}{4} \rfloor + \lfloor \frac{100}{8} \rfloor + \lfloor \frac{100}{16} \rfloor + \lfloor \frac{100}{32} \rfloor + \lfloor \frac{100}{64} \rfloor > 24
\end{aligned}$$

Also ist 24 die höchste Potenz von 30, die 100 Fakultät teilt.

Aufgabe 4.

In einem Quadrat mit der Seitenlänge a sind Seitenmittelpunkte und Ecken wie in der Abbildung verbunden. Bestimme die Fläche des grauen Sterns in Abhängigkeit von a.



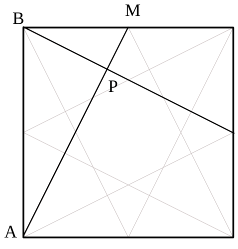
Lösung:

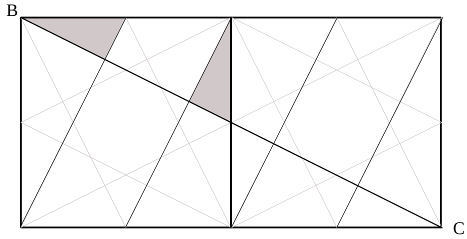
Das Komplement des Sterns in dem Quadrat besteht aus 8 paarweise kongruenten Dreiecken. Wir werden zeigen, dass die Fäche dieser Dreiecke je $(1/20)a^2$ ist. Die Fläche des Sterns ist damit $a^2 - \frac{8}{20}a^2 = \frac{3}{5}a^2$.

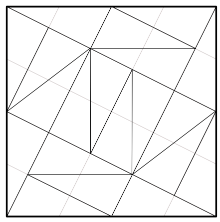
Behauptung. Die lange Kathete des weißen Dreiecks ist doppelt so lang wie die kurze.

Beweis 1. Die Dreiecke ABM und BMP in der linken Abbildung haben die gleichen Winkel und sind also ähnlich. Die Katheten von ABM sind $a/2$ und a, also muss das gleiche Verhältnis für BMP gelten.

Beweis 2. die Strecke BC in der mittleren Abbildung ist in 5 gleich lange Stücke geteilt. Das erste Stück hat die Länge der langen Kathete, die erste Hälfte des dritten Stücks ist eine kurze Kathete.







Jetzt kann der Satz des Pythagoras benutzt werden, um die Länge b der kurzen Kathete zu berechnen: $b^2 + (2b)^2 = (a/2)^2$ liefert die Lösung $b^2 = \frac{a^2}{20}$. Die Fläche eines weißen Dreiecks ist $\frac{1}{2}(b \cdot (2b)) = b^2$.

Tatsächlich muß der Wert von b gar nicht berechnet werden. Die rechte Abbildung zeigt, dass das Quadrat in 20 Dreiecke zerlegt werden kann, die alle kongruent zu einem weißen sind.