Wettbewerbsaufgaben und Lösungsvorschläge
Tag der Mathematik 2010

Klassenstufe 11–13

Aufgabe 1.

Auf einem $n \times n$-Gitter auf dem Schulhof spielen die Schüler Räuber und Gendarm. Es gibt k Polizisten und einen Räuber, die nach folgenden Regeln spielen:

Die Polizisten stellen sich am Anfang auf k Gitterpunkte. Danach wählt der Räuber einen freien Gitterpunkt als Startfeld.

In einer Spielrunde gehen zunächst einige Polizisten vom Feld und sagen an, auf welche Gitterpunkte sie in am Ende der Runde zurückkehren werden. Nun darf der Räuber seinen Aufenthaltsort ändern. Er darf sich nur entlang von Gitterkanten bewegen und keinen Gittepunkt, auf dem einer der auf dem Feld verbliebenen Polizisten steht, benutzen. Hat der Räuber sich auf seinem neuen Platz eingefunden, kehren die restlichen Polizisten vom Feldrand auf die angekündigten Positionen zurück und die nächste Runde beginnt.

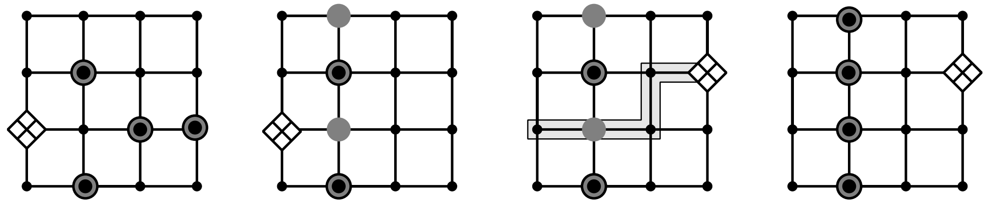
Das Spiel endet, wenn ein Polizist den Räuber schnappt, das heißt wenn ein Polizist und der Räuber auf einem Feld stehen.

a) Man zeige, dass für $n = 3$ vier Polizisten notwendig und ausreichend sind, um den Räuber zu schnappen.

b) Man zeige, dass $k = n+1$ Polizisten den Räuber auf dem $n \times n$ Gitter schnappen können.

c) Man zeige, dass der Räuber $k = n - 1$ Polizisten entwischen kann.

d) Man zeige, dass der Räuber $k = n$ Polizisten entwischen kann.



Eine Runde auf dem 4×4 Brett mit $k = 4$ Polizisten: (1) Anfang der Runde. (2) Zwei Polizisten verlassen das Feld und kündigen ihre künftige Position an. (3) Der Räuber bewegt sich. (4) Die Polizisten kehren auf die angesagten Positionen zurück.

Lösung:

a) Siehe b) und d).

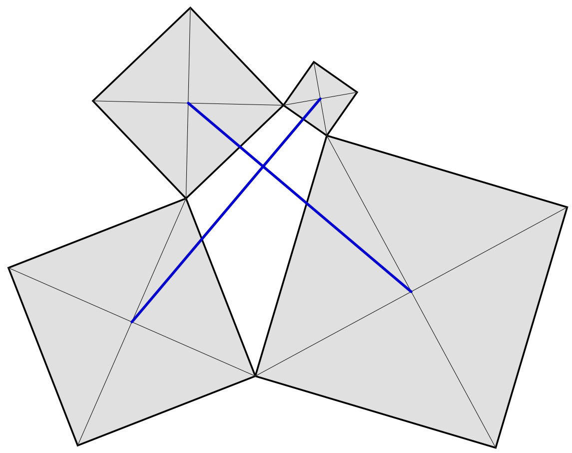
b) Am Anfang stellen sich n Polizisten in die oberste Reihe und einer auf den Gitterpunkt ganz links in der zweitobersten Reihe. Runde für Runde bewegt sich nur der Polzist ganz links in der oberen der beiden von Polizisten belegten Reihen gleichzeitig einen Gitterpunkt nach rechts und einen nach unten bzw. auf den Gitterpunkt ganz links zwei Reihen unter ihm, sollte die Reihe unter ihm vollständig mit Polizisten besetzt sein. Es ist klar, dass auf diese Weise der Räuber nie auf einen Gitterpunkt oberhalb der Polizisten gelangen kann. Da die Polizisten nach $n+1$ Runden genau eine Reihe nach unten gewandert sind, muss der Räuber nach spätestens $n(n+1)-1$ Runden gefangen worden sein.

c) In jeder Spielrunde gibt es eine polizistenfreie Reihe und eine polizistenfreie Spalte. Auf dem zugehörigen Kreuzungspunkt soll sich der Räuber befinden. Der Räuber kann sich zwischen den Kreuzungspunkten frei bewegen: Entlang der alten polizistenfreien Reihe bewegt er sich bis zur neuen polizistenfreien Spalte und entlang dieser zur neuen polizistenfreien Reihe. Es ist zu beachten, dass sowohl die alte als auch die neue polizistenfreie Reihe bzw. Spalte polizistenfrei ist, wenn sich der Räuber bewegt.

d) Wir betrachten das „L“, welches aus der Spalte ganz links und der untersten Reihe gebildet wird. Sollte sich nicht mehr als ein Polizist auf diesem L befinden, so soll der Räuber in einer (eventuell bis auf den Gitterpunkt unten links) polizistenfreien Reihe oder Spalte des L's sein. Anderenfalls befinden sich nicht mehr als $n-2$ Polizisten in dem $(n-1)\times(n-1)$-Teilgitter oben rechts (also das Gitter ohne das L) und der Räuber soll dann auf dem Kreuzungspunkt einer polizistenfreie Reihe und einer polizistenfreie Spalte sein. Solange sich stets mindestens zwei Polizisten auf dem L befinden, so kann sich der Räuber nach Teil c) frei zwischen den entsprechenden Kreuzungspunkten bewegen. Solange sich stets höchstens ein Polizist auf dem L befindet, so kann sich der Räuber auch dann entsprechend bewegen. Falls sich der Räuber auf dem L befindet und in der nächsten Runde mehr als ein Polizist auch auf dem L ist, so kann sich der Räuber entlang der Reihe bzw. Spalte des L's, auf der er sich befindet, zu der nun polizistenfreien Spalte bzw. Reihe des Teilgitters oben links bewegen und entlang dieser dann zum Kreuzungspunkt. Befindet sich der Räuber auf einem entsprechenden Kreuzungspunkt und in der nächsten Runde sind weniger als zwei Polizisten auf dem L, so bewegt er sich entlang der polizistenfreien Reihe bzw. Spalte zu der entsprechenden Spalte bzw. Reihe des L's.

Aufgabe 2.

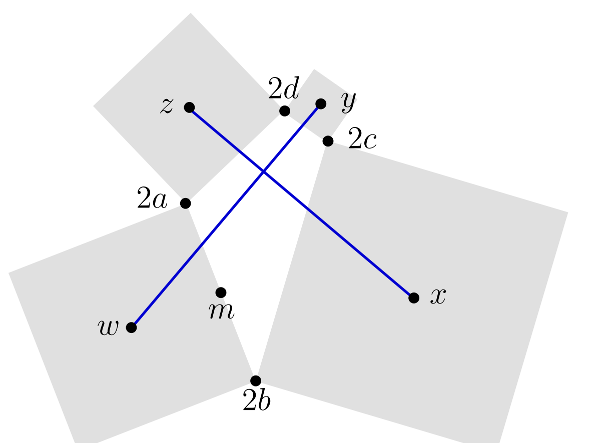
Über den Seiten eines Vierecks sind Quadrate errichtet. Betrachte die beiden Strecken, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate verbinden. Zeige: Diese beiden Strecken sind gleich lang und bilden einen rechten Winkel.



Lösung:

This solution is taken from `http://www.qbyte.org/puzzles/p062s.html`.

Represent the vertices of the quadrilateral by the complex numbers $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, in the complex plane.



Then m, the midpoint of the line connecting $2a$ and $2b$, is represented by $a+b$. The vector from $2a$ to m is given by $(a+b)-2a = b-a$. Rotating this vector clockwise through $90°$ yields mw, the vector from m to the center of the square, w. A rotation through $90°$ clockwise is achieved by multiplying by $-i$. Hence the vector mw is given by $-i(b-a) = (a-b)i$. Therefore $w = a+b+(a-b)i$.

We can similarly derive the complex number that represents the center of the other squares, yielding:

$$w = a+b+(a-b)i \qquad x = b+c+(b-c)i$$
$$y = c+d+(c-d)i \qquad z = d+a+(d-a)i$$

Hence the line segments joining the centers of opposite squares are given by the following two vectors: $y - w = c + d - a - b + (c - d - a + b)i$ and $z - x = d + a - b - c + (d - a - b + c)i$

Therefore $z - x = -i(y - w)$. This tells us that vector xz is obtained by rotating wy through 90°. Therefore line segments wy and xz lie on perpendicular lines and are of equal length.

Remarks. A very similar proof can be obtained using vector algebra in the Cartesian plane. There, the proof proceeds by showing that the dot product of the vectors representing the two line segments is zero, and their magnitudes are equal. The remarkable economy of the complex plane proof arises from the ease with which the vector mw can be obtained simply by multiplying $(b - a)$ by $-i$.

Note that two lines are said to be perpendicular if they meet at right angles. We have not proved above that the two line segments necessarily meet, and, indeed, this is not always the case. Hence the statement of the theorem merely specifies that the two line segments lie on perpendicular lines. Further reading is provided on the original page with links to

- Aubel's Theorem
- Generalizing Van Aubel using Duality, by Michael de Villiers
- Thébault's Problem

Aufgabe 3.

Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2010$ werden in einer beliebigen Reihenfolge hintereinander aufgeschrieben. Nun ignorieren wir die Kommas oder Leerzeichen zwischen den Zahlen und verbinden alle zu einer einzigen Zahl. (Beispielsweise würde aus 7, 1323, 4, 2, 5, 12, 523 die Zahl 7132342512523.) Kann die dabei enstehende Zahl als n^k mit natürlichen Zahlen $n, k \geq 2$ geschrieben werden?

Lösung:

Nein. Der Rest einer Zahl bei Division durch 9 ist derselbe wie der ihrer Quersumme. Folglich lässt die oben zusammengesetzte Zahl Z bei Division durch 9 denselben Rest wie $1 + 2 + 3 + \ldots + 2010 = \frac{1}{2}2010 \cdot 2011 = 1005 \cdot 2011$, welche den Rest $6 \cdot 4 \equiv 6 \mod 9$ lässt. Folglich ist Z durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Insbesondere kann Z kein Quadrat, geschweige denn eine höhere Potenz sein.

Aufgabe 4.

Wir definieren eine $a \times b$-Waffel als einen ‘diagonalen’ Rechtecksausschnitt eines unendlichen Schachbretts. Kann man eine 8×5-Waffel mit T-Steinen pflastern? (Die Begriffe sind in der Abbildung dargestellt).

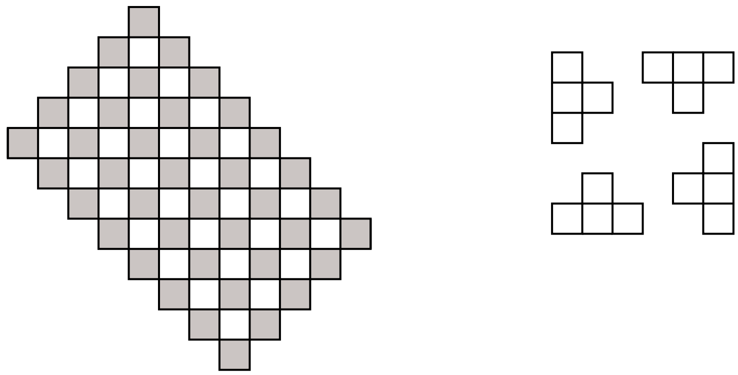
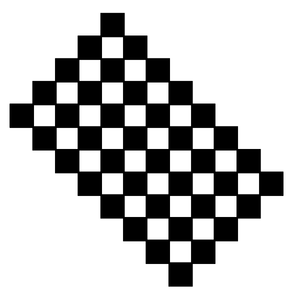


Abbildung 1: Links eine 8×5 Waffel, rechts die T-Steine

Lösung:

(In der Lösung heißen T-Steine wie in der Literatur T-Tetromino.)

Wir färben die Quadrate im Gitter schachbrettartig mit den Farben Schwarz und Weiß. Wir beobachten, dass ein T-Tetromino stets entweder 3 weiße Quadrate und ein schwarzes (Fall I) oder 3 schwarze Quadrate und ein weißes bedeckt (Fall II).



Wenn es eine gewünschte Pflasterung gäbe, bezeichnen wir mit x die Anzahl der T-Tetrominos in Fall I und mit y die Anzahl der T-Tetrominos in Fall II.

Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass 40 Quadrate der Waffel schwarz gefärbt sind und $28 = (5-1)(8-1)$ weiß. Somit erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

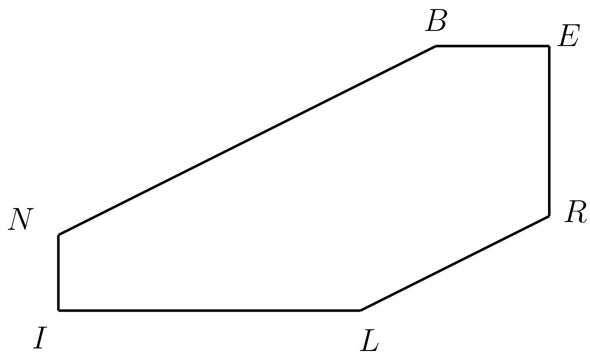
$$3x + y = 28 \tag{1}$$
$$3y + x = 40. \tag{2}$$

Aus $(2) - (1)$ folgt, dass $2(y-x) = 12$, das heißt $y - x = 6$ ist gerade und dann ist $y + x$ auch gerade. Aus $(1) + (2)$ folgt, dass $4(y+x) = 68$, das heißt $y + x = 17$ ist ungerade, Widerspruch.

Klassenstufe 9–10

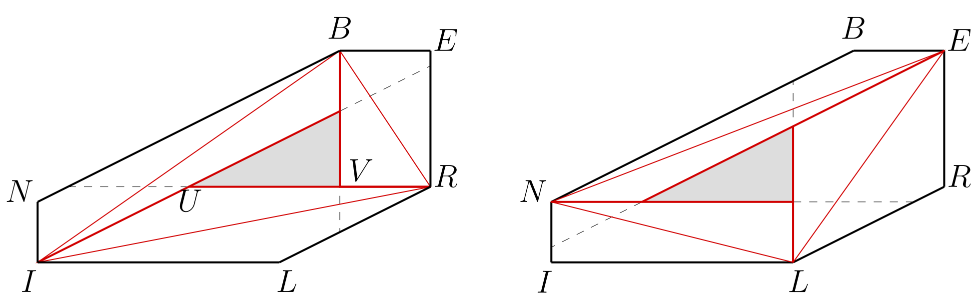
Aufgabe 1.

In einem konvexen Sechseck $BERLIN$, wie in der Abbildung skizziert, sind die gegenüberliegenden Seiten BE und LI, ER und IN sowie RL und NB parallel. Man zeige, dass die Dreiecke $\triangle BRI$ und $\triangle ELN$ flächengleich sind.



Lösung:

Wir zeichnen Parallelen zu ER, LI und NB durch B, R beziehungsweise I. Im Inneren erhalten wir ein Dreieck $\triangle UVW$. Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle BRI$ gleich $\frac{1}{2}(\text{Area}(BERLIN) - \text{Area}(\triangle UVW)) + \text{Area}(\triangle UVW)$, welches sich schließlich zu $\frac{1}{2}(\text{Area}(BERLIN) + \text{Area}(\triangle UVW))$ vereinfacht.



Eine ähnliche Konstruktion machen wir nun für das Dreieck $\triangle ELN$ mit einem gewissen Dreieck $\triangle XYZ$ und erhalten das Analoge. Die Seitenlängen der Dreiecke $\triangle UVW$ und $\triangle XYZ$ lassen sich, wie unten an einem Beispiel gezeigt, durch die Differenzen $|\overline{BE} - \overline{LI}|$, $|\overline{ER} - \overline{IN}|$, $|\overline{RL} - \overline{NA}|$ ausdrücken, folglich sind sie nach Kongruenzsatz SSS kongruent und flächengleich. Die Behauptung folgt.

Er gilt $|\overline{UR}| = |\overline{LI}|$ und $|\overline{VR}| = |\overline{BE}|$(Parallelogramme), damit ist $|\overline{UV}| = |\overline{BE} - \overline{LI}|$, wie behauptet.

Aufgabe 2.

Ein Primzahlzwilling ist ein Paar (x, y) von Primzahlen, für die gilt: $y = x + 2$. Zeige, dass für alle Primzahlzwillinge mit $x \geq 5$ gilt:

$$36 \quad \text{teilt} \quad xy + 1.$$

Lösung:

Wir definieren zur Vereinfachung $z = x + 1$. Damit ist dann $y = z + 1$ und $x = z - 1$ und $xy+1 = z^2$. Da alle Primzahlen, die größer als 2 sind, ungerade sind, ist z gerade. Das Tripel $(x,\ z,\ y)$ sind 3 aufeinanderfolgende Zahlen. Unter diesen 3 Zahlen muss genau eine durch 3 teilbar sein. Da x und y als Primzahlen größer 3 ausscheiden, muss 3 ein Teiler von z sein. Da z zusätzlich gerade ist, gilt 6 teilt z und damit ist 36 ein Teiler von $z^2 = xy + 1$.

Aufgabe 3.

Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Die Schnittpunkte sollen nun so mit k Farben gefärbt werden, dass keine zwei auf einer Geraden benachbarten Punkte dieselbe Farbe besitzen. Man bestimme das kleinste k für das dies immer möglich ist.

Lösung:

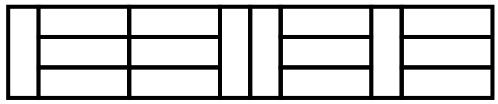
Im Allgemeinen gibt es drei Geraden, deren Schnittpunkte ein Dreieck bilden das von keiner anderen Gerade geschnitten wird. Für die drei Schnittpunkte so eines Dreiecks sind drei Farben nötig.

Wir werden zeigen, dass drei Farben auch immer ausreichen. Dazu versehen wir die Ebene mit einem Koordinatensystem. Dies kann so gewählt werden, dass keine zwei Schnittpunkte auf einer gemeinsamen, vertikalen Gerade liegen.

Sei $s_1, \ldots, s_t$ die Reihenfolge der Schnittpunkte nach wachsender x-Koordinate. Wir färben die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge. Wenn wir s_i färben achten wir darauf, dass sich die Farbe von s_i von den Farben aller schon gefärbten Nachbarschnittpunkte unterscheidet. Die schon gefärbten Nachbarschnittpunkte von s_i liegen wegen der Wahl der Reihenfolge weiter links als s_i. Also gibt es auf jeder der beiden s_i definierenden Geraden höchstens einen schon gefärbten Nachbarn von s_i. Da jeder Schnittpunkt in dem Moment in dem er gefärbt wird höchstens zwei schon gefärbten Nachbarschnittpunkte hat genügen drei Farben.

Aufgabe 4.

Ein $3 \times n$ Brett soll mit 1×3 Kacheln ausgelegt werden. Wie viele Kachelungen gibt es für das 3×16 Brett? Die Abbildung zeigt das Brett mit einer der möglichen Kachelungen.



Lösung:

Sei a_n die Anzahl der möglichen Kachelungen des $3 \times n$ Brettes. Wir betrachten die rechte obere Ecke des Brettes und unterscheiden zwei Fälle:

- In der Ecke liegt eine vertikale Kachel K_v. In dem Fall ist der Rest der Kachelung nach der Wegnahme von K_v eine Kachelung des $3 \times (n-1)$ Brettes und jede Kachelung des $3 \times (n-1)$ Brettes kann durch K_v zu einer Kachelung des $3 \times n$ Brettes erweitert werden.
- In der Ecke liegt eine horizontale Kachel unter der noch zwei horizontale liegen. Entfernt man dieses Paket P aus drei Kacheln dann bleibt eine Kachelung des $3 \times (n-3)$ Brettes und jede Kachelung des $3 \times (n-3)$ Brettes kann durch das Paket P zu einer Kachelung des $3 \times n$ Brettes erweitert werden.

Insgesamt ergibt sich die Rekursion

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}.$$

Um die Rekursion verwenden zu können benötigen wir noch Anfangsbedingungen, z.B. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 2$. Nun rechnet sich das Ergebnis fast von selbst: $a_4 = a_3 + a_1 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = a_4 + a_2 = 4$, $a_6 = a_5 + a_3 = 6$ und so weiter mit den Werten:

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277

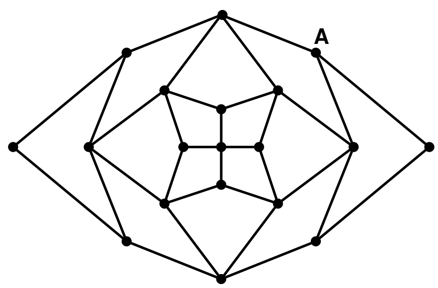
Das Ergebnis ist 277.

Klassenstufe 7–8

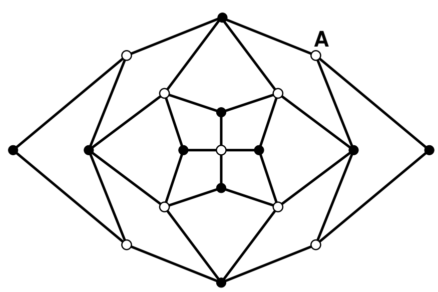
Aufgabe 1.

Heute ist Tag der offenen Tür bei der Polizei in Quadburg und alle Polizisten sind bei der großen Abschlussparty. Diese Gelegenheit will ein Räuber nutzen und heute Nacht in alle Häuser der Stadt einbrechen.

Unten befindet sich eine Karte von Quadburg: Jeder Punkt entspricht einem Haus und eine Strecke zwischen zwei Punkten entspricht einem direkten Weg zwischen den jeweiligen Häusern. Der Räuber startet am Haus A (wo er auch einbricht) und kann sich nur entlang der eingezeichneten Wege bewegen. Natürlich will er auch aufpassen, dass er kein Haus zweimal besucht. Kann er sein Ziel erreichen?



Lösung:



Wir färben die Häuser schwarz und weiß (wie im obigen Bild). Man sieht, dass es einen direkten Weg nur zwischen verschieden gefärbten Häusern geben kann. Der Räuber bewegt sich also auf einem Pfad, dessen Knotenfarben alternieren, und auf dem jedes Haus genau einmal liegt. Da er in einem weiß gefärbten Haus startet, müsste es mindestens so viele weiße Häuser geben wie schwarze. Das widerspricht aber der obigen Färbung, somit kann der Räuber nicht in alle Häuser einbrechen, ohne ein Haus zweimal zu besuchen.

Aufgabe 2.

Einige Münzen liegen in einer Reihe, jede zeigt Kopf (K) oder Zahl (Z). Otto spielt mit ihnen und zwar wählt er immer eine Münze aus und dreht sie und ihre Nachbarn um. Wenn er eine Randmünze ausgewählt hat, dreht es also nur zwei um und sonst immer drei. Das kann zum Beispiel so aussehen: $KZ\underline{K}KZK \rightarrow KKZZZ\underline{K} \rightarrow KKZZ\underline{K}Z \rightarrow KKZKZK$ (die unterstrichene Münze ist jeweils die von Otto gewählte).

Kann Otto bei jeder Ausgangssituation erreichen, dass bei allen Münzen der Kopf nach oben weist? Zeigt, dass die Antwort *NEIN* ist wenn es 5 Münzen sind. Für sechs Münzen aber ist die Antwort *JA*. Was passiert bei n Münzen?

Lösung:

$n = 3k+2$: NEIN. Betrachte $\Lambda = x_1+x_2+x_4+x_5+x_7+\ldots+x_{3k-1}+x_{3k+1}+x_{3k+2}$ wobei $x_i = 1$ ist wenn die Münze an der $i$ten Stelle Z zeigt und $x_i = 0$ wenn diese Münze K zeigt. Da jeder Zug von Otto genau zwei der x_i in der Definition von Λ ändert, bleibt Λ immer gerade oder immer ungerade. Deshalb kann eine Ausgangssituation bei der ein Z ganz links liegt und alle anderen Münzen K zeigen nicht zu einer reinen K Reihe gemacht werden.

$n \mod 3 \neq 2$: JA. Otto erzeugt möglichst viele linksbündige Ks. Entweder alle Münzen sind K oder es endet mit $KK\ldots KKKZ$.

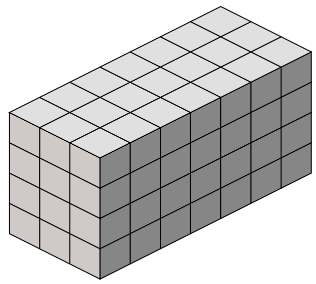
- Wenn $n \equiv 0 \pmod 3$ erzeugt Otto als nächstes $KK\ldots KZZK$ und von da aus möglichst viele rechtsbündige Ks.
- Wenn $n \equiv 1 \pmod 3$ erzeugt Otto zunächst $KK\ldots KKZK$ und von da aus möglichst viele rechtsbündige Ks.

In beiden Fällen bleiben zuletzt nur Ks.

Aufgabe 3.

Wir betrachten Quader mit ganzzahligen Seitenlängen und denken sie uns aus Würfeln mit Seitenlänge 1 aufgebaut. So ein Würfel heißt *innerer Würfel*, wenn keine seiner Seiten von außen sichtbar ist, ansonsten, also wenn wenigstens eine Seite von außen sichtbar ist, heißt der Würfel ein *äußerer Würfel*.

Der abgebildete $3 \times 4 \times 7$ Quader besteht aus 10 inneren und 74 äußeren Würfeln.



Für welche a gibt es einen $a \times b \times c$ Quader mit $a \leq b$ und $a \leq c$, mit gleich vielen inneren und äußeren Würfeln?

Lösung:

Es genügt Quader mit $a \leq b \leq c$ zu betrachten. Sei $I = (a-2)(b-2)(c-2)$ und $A = abc - I$, wir interessieren uns für den Fall $I = A$.

Nun ist zu argumentieren, dass es nur für $4 < a < 10$ Lösungen geben kann:

$a = 4$: Denke einen Quader mit $a = 4$ in vier Scheiben zerlegt, die Scheiben bestehen aus gleich vielen Würfeln. Die obere und die untere der Scheiben besteht vollständig aus äußeren Würfeln. Daher gibt es mehr äußere Würfel als innere.

$a > 9$: Der $a \times b \times c$ Quader kann aus dem $10 \times 10 \times 10$ Quader erzeugt werden, indem je eine Scheibe eingefügt wird um eine der Richtungen zu strecken. Eine eingefügte $x \times y$ Scheibe tägt $(x-2) * (y-2)$ innere Würfel und $2(x-1) + 2(y-1)$ äußere Würfel bei. Wegen $x, y \geq 7$ trägt jede Scheibe mehr innere als äußere Würfel bei. Da auch der $10 \times 10 \times 10$ Quader schon mehr innere als äußere Würfel hat (512 zu 488) ist für $a \geq 10$ keine Lösung möglich.

Eine Fallanalyse ergibt nun die Liste aller Lösungen:

$$
\begin{aligned}
a = 5 \quad &: \quad (b,c) \in \{(13,132),(14,72),(15,52),(16,42),(17,36),(18,32),(20,27),(22,24)\} \\
a = 6 \quad &: \quad (b,c) \in \{(9,56),(10,32),(11,24),(12,20),(14,16)\} \\
a = 7 \quad &: \quad (b,c) \in \{(7,100),(8,30),(9,20),(10,16)\} \\
a = 8 \quad &: \quad (b,c) \in \{(8,18),(9,14),(10,12)\} \\
a = 9 \quad &: \quad \text{keine Lösung}
\end{aligned}
$$

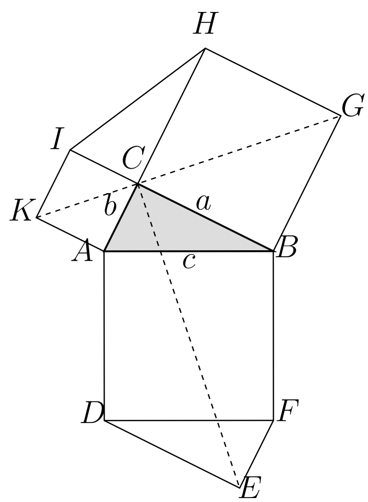
Aufgabe 4.

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Über jeder der drei Seiten ist ein Quadrat konstruiert, die sechs zusätzlichen Punkte seien wie in der Abbildung mit D, F, G, H, I und K bezeichnet. Schließlich sei über der Kante DF noch ein zu ABC kongruentes Dreieck DEF so angefügt, dass AC und EF gleich lang sind.

(a) Beweise, dass C auf der Geraden durch K und G liegt.

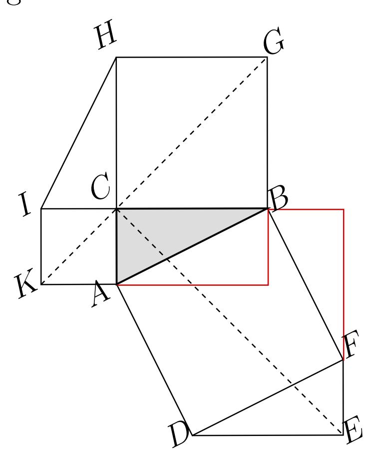
(b) Beweise, dass die Vierecke $CEFB$ und $GKAB$ kongruent sind.

(c) Verwende (b) um den Satz von Pythagoras zu beweisen, also $a^2 + b^2 = c^2$. Hier sind mit a, b, c die Längen der Strecken BC,CA und AB bezeichnet.



Lösung:

Es ist hilfreich die Zeichnung zu erweitern:



(c) Sei d die Fläche des Ausgangsdreiecks. Die Fläche der in (b) beschriebenen Vierecke ist

$$d + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}(2d + c^2).$$

Da die Vierecke kongruent sind sind die Flächen gleich, also $a^2 + b^2 = c^2$.