19. Berliner Tag der Mathematik

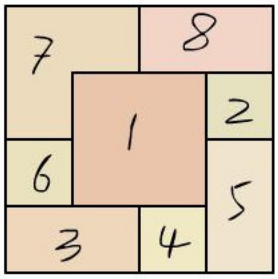
Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 7–8

17. Mai 2014

Aufgabe 1

10 Punkte

Acht nummerierte quadratische Blätter derselben Größe sind so übereinander auf einen Tisch gelegt worden, dass sich das folgende Bild ergibt:



Offensichtlich liegt das Blatt mit der Nummer 1 ganz oben. Bestimmt die Nummern aller Blätter, unter denen kein anderes Blatt liegt.

Aufgabe 2

6+4 Punkte

a) Kann man die neun Felder eines 3×3–Quadrates so mit den Zahlen 0, 1 und -1 besetzen, dass die Zeilensummen, die Spaltensummen sowie die beiden (aus je drei Summanden bestehenden) Diagonalensummen alle voneinander verschieden sind?

b) Kann man die Zeichen $+$ und $-$ so zwischen die folgenden Zahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

schreiben, dass als Ergebnis 0 herauskommt?

In beiden Aufgabenteilen ist eine Lösung anzugeben, wenn die Antwort „Ja." ist. Ist die Antwort „Nein.", wird eine Begründung erwartet, warum es nicht geht.
Begriffsklärung zu Teil a):
Die Abbildung zeigt ein 2×2–Quadrat, in dessen Feldern sich die Zahlen 1, 2 und 3 befinden. Die 1 kommt dabei zweimal vor. Die Zeilensummen sind durch $3+1 = 4$ und $1+2 = 3$ gegeben, die Spaltensummen durch $3+1 = 4$ und $1+2 = 3$, die Diagonalensummen durch $3+2 = 5$ und $1+1 = 2$. Beachtet aber, dass in a) von einem 3×3–Quadrat anstatt eines 2×2–Quadrats ausgegangen wird und die Zahlen in den Feldern anders sind!

3	1
1	2

2×2–Quadrat

Aufgabe 3

10 Punkte

Findet alle Lösungen der Gleichung

$$\begin{array}{cccccc} & M & A & T & H & E \\ + & M & A & C & H & T \\ \hline F & R & E & U & D & E \end{array}$$

Dabei stehen die zehn Buchstaben A, C, D, E, F, H, M, R, T und U der Gleichung für die Ziffern 0 bis 9. Unterschiedliche Buchstaben stellen auch unterschiedliche Ziffern dar.

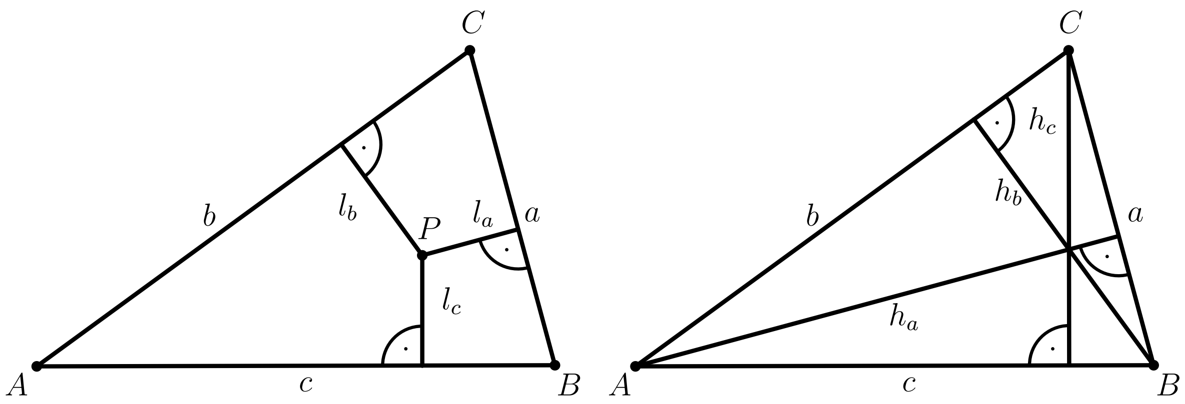
Zeigt insbesondere, dass es keine weiteren Lösungen gibt, zum Beispiel durch ein systematisches Vorgehen.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das übliche Dezimalsystem, in dem beispielsweise $79 + 77 = 156$ gilt.

Aufgabe 4

3+4+3 Punkte

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ und ein Punkt P im Innern des Dreiecks. Die Seitenlängen $a := |\overline{BC}|$, $b := |\overline{AC}|$ und $c := |\overline{AB}|$ erfüllen $a \leq b \leq c$. Von P werden die Lote auf die Seiten BC, AC und AB gefällt, die Längen der Lote werden mit l_a, l_b beziehungsweise l_c bezeichnet. Schließlich seien h_a, h_b und h_c noch die Längen der Höhen von den Eckpunkten A, B und C auf die Seiten BC, AC beziehungsweise AB. Die Beschriftungen der Lote und Höhen sind in der Abbildung gekennzeichnet.



Beschriftungen der Lote und der Höhen

a) Zeigt, dass $h_a \geq h_b \geq h_c$ gilt.

b) Zeigt die Ungleichungen $h_a \geq l_a + l_b + l_c$ und $l_a + l_b + l_c \geq h_c$. Findet alle Dreiecke, für die in mindestens einer der beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt, und begründet, dass es keine weiteren gibt.

c) Angenommen, es gilt sogar $a < b < c$, und P darf nun auch auf dem Rand des Dreiecks liegen. Findet alle Punkte P, für die $l_a + l_b + l_c$ minimal ist, und alle Punkte P, für die $l_a + l_b + l_c$ maximal ist. Begründet dabei, dass es keine weiteren solchen Punkte gibt.

19. Berliner Tag der Mathematik

Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 9–10

17. Mai 2014

Aufgabe 1

3+3+4 Punkte

a) Die Entfernung zwischen den Hauptbahnhöfen von Berlin und Potsdam beträgt 30 Kilometer. Hanna und Olga starten gleichzeitig in Berlin beziehungsweise Potsdam und fahren sich mit dem Fahrrad entgegen. Hanna fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h, Olga mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h. Ein Schmetterling fliegt mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h gemeinsam mit Hanna in Berlin los, erreicht Olga, berührt ihre Stirn und fliegt dann zurück zur Stirn von Hanna, dann wieder zurück zu Olga und so weiter. Dabei fliegt er stets den Radweg entlang. Anderthalb Minuten bevor Olga und Hanna sich treffen, entschwindet der Schmetterling auf Nimmerwiedersehen. Wie viele Kilometer ist der Schmetterling zwischen den Köpfen von Olga und Hanna insgesamt geflogen?

b) Solveig besucht eine Aussichtsplattform, die aufgrund von Bauarbeiten nur über eine einzige Rolltreppe zu erreichen ist. Dummerweise läuft diese nach unten, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit. Folglich ist Solveig gezwungen, die Rolltreppen entgegen der Fahrtrichtung hochzulaufen. Dabei zählt sie 90 Stufen. Auf dem Rückweg nach unten, in der sie genauso viele Stufen pro Zeiteinheit bewältigt wie auf dem Weg nach oben, zählt sie nur 60 Stufen. Wie viele Stufen hätte sie steigen müssen, wenn die Rolltreppe stillgestanden hätte?

c) Irina schwimmt leidenschaftlich gern in der Havel. Unter der Oberbrücke geht sie ins Wasser und lässt einen mitgebrachten Ball mit der Strömung treiben. Sie schwimmt zunächst 20 Minuten gegen die Strömung, wendet, und schwimmt dem Ball hinterher. Dabei passiert sie erneut die Oberbrücke. An der Unterbrücke holt sie ihren Ball dann ein. Unter- und Oberbrücke sind zwei Kilometer voneinander entfernt. Sowohl die Fließgeschwindigkeit des Flusses als auch das Schwimmtempo von Irina sollen als konstant angenommen werden. Ermittelt die Strömungsgeschwindigkeit der Havel! Begründet eure Antwort.

Aufgabe 2

10 Punkte

Eine Rettungsstation befindet sich am Ufer des Ozeans. Neben einer Tankstation hat diese mehrere baugleiche Flugzeuge zur Verfügung, die sich im Flug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1000 km/h fortbewegen und dabei einen gleichmäßigen Spritverbrauch haben. Deren Tanks fassen allerdings jeweils nur ausreichend viel Kerosin für 1000 Kilometer. Dafür sind die Flugzeuge derart technologisch fortgeschritten, dass eines einem anderen auch im Flug Kerosin abgeben kann. Wenn ein Flugzeug im Flug für mindestens eine Sekunde keinen Sprit hätte, würde es abstürzen. Der Einfachheit halber nimmt ein Tankvorgang keine Zeit in Anspruch.

Von einer Insel, die 1000 Kilometer entfernt liegt, kommt ein Notruf. Mindestens ein Flugzeug soll nun die Insel erreichen und wieder zurück fliegen. Weder auf der Insel noch auf dem Weg zu ihr gibt es eine Möglichkeit zu landen. Zum Einsatz dürfen auch mehrere Flugzeuge kommen, doch am Ende sollen sich alle Flugzeuge wieder auf der Rettungsstation befinden. Insbesondere darf keines abstürzen.

Findet die kleinste Anzahl an Flugzeugen, mit der dieses Ziel erreicht werden kann. Beschreibt, wie diese Anzahl an Flugzeugen dies bewerkstelligen kann, und begründet, dass keine geringere Zahl das auch könnte.

Aufgabe 3

5+5 Punkte

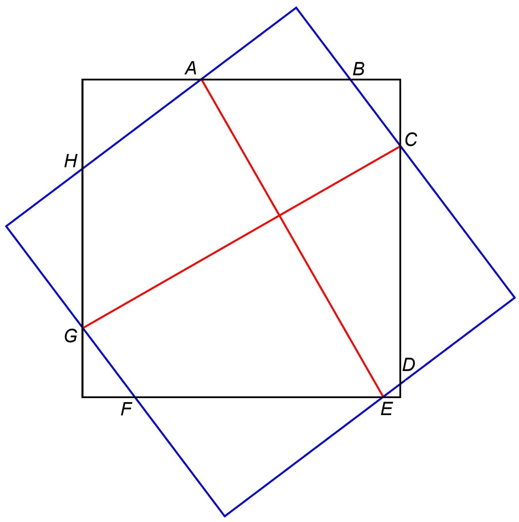
In der Ebene ist eine endliche Menge M von $n \geq 3$ Punkten gegeben, die nicht alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Jedem Punkt x aus M ist eine rationale Zahl $k(x)$ zugeordnet, die wir den *Koeffizienten* von x nennen. Es sei vorausgesetzt, dass für jede Gerade, auf der mindestens zwei der Punkte aus M liegen, die Summe aller Koeffizienten von Punkten aus M, die auf dieser Geraden liegen, gleich Null ist.

a) Beweist für $n = 5$, dass alle Koeffizienten gleich Null sind.

b) Beweist für allgemeines n, dass alle Koeffizienten gleich Null sind.

Aufgabe 4

6+4 Punkte



Zwei Quadrate, die übereinander liegen

a) Sei Q ein Quadrat. Über Q ist ein zweites Quadrat R so gelegt, dass sich auf jeder Seite von Q zwei Schnittpunkte mit dem Rand von R befinden. Die Schnittpunkte seien im Uhrzeigersinn mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet. Zeigt, dass sich die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ in einem rechten Winkel schneiden.

b) Von einem Quadrat sei aus dem Inneren jeder Kante genau ein Punkt gegeben. Unter welchen Umständen ist es möglich, alleine mit Zirkel und Lineal das Quadrat eindeutig zu rekonstruieren? Beschreibt in diesen Fällen eine solche Rekonstruktion und beweist die Eindeutigkeit. Begründet in den anderen Fällen, warum dies nicht möglich ist.

19. Berliner Tag der Mathematik

Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 11–13

17. Mai 2014

Aufgabe 1

10 Punkte

Die Olsenbande plant ihren nächsten Streich und will im Auftrag von Baron von Løvenvold eine chinesische Ming-Vase aus Schloss Borreholm stehlen. Doch die Polizei ist ihnen bereits auf den Fersen, Kriminalbeamter Henning Holm überwacht das Schloss. Am Ende der Woche berichtet er verzweifelt: „An sechs Abenden habe ich beobachtet, wer das Schloss betreten hat, und mitgehört, welche Namen bei ihren Gesprächen gefallen sind. Zu jedem, der das Schloss betreten hat, konnte ich ein Profil erstellen – hier haben Sie die Akte – die Beschreibungen sind mit 1 bis 9 durchnummeriert. Doch ich werde einfach nicht schlau aus meinen Beobachtungen.“ Er zeigt folgenden Notizzettel vor:

Montag: *Anwesend:* 1, 2, 7, 8; *Namen:* Benny, Egon, Kjeld, Yvonne

Dienstag: *Anwesend:* 1, 4, 5, 9; *Namen:* Baron von Løvenvold, Butler, Yvonne

Mittwoch: *Anwesend:* 4, 6, 9; *Namen:* Egon, Fie

Donnerstag: *Anwesend:* 1, 3, 4, 9; *Namen:* Baron von Løvenvold, Benny, Frits

Freitag: *Anwesend:* 4, 7, 9; *Namen:* Børge, Kjeld

Samstag: *Anwesend:* 1, 2, 7, 9; *Namen:* Baron von Løvenvold, Butler, Børge, Yvonne

Daraufhin antwortet Kriminalkommissar Jensen: „Mein junger Freund, Sie müssen noch viel lernen. An manchen Abenden wurden Sie entdeckt und da wurden dann nur Namen von Personen genannt, die zu dem Zeitpunkt nicht anwesend waren. Und jetzt wieder ran an die Arbeit, der Minister erwartet Ergebnisse!“

Zeigt, dass sich aus obigen Informationen jede der neun Personen auf eindeutige Weise genau einem Profil aus Holms Akte zuordnen lässt.

Aufgabe 2

3+4+3 Punkte

a) Gegeben seien ein Kreis k und eine Gerade g, die durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Zudem sei P ein Punkt, der weder auf dem Kreis noch auf der Geraden liegt. Beschreibt eine Konstruktion, mit der man nur mit dem Lineal (ohne Zirkel!) eine Senkrechte von P auf die Gerade g errichten kann. Die Richtigkeit eurer Konstruktion ist zu beweisen.

b) In einem (konvexen) Trapez $ABCD$ seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die zueinander parallelen Seiten; ihre Mittelpunkte bezeichnen wir mit M beziehungsweise N. Beweist, dass der Schnittpunkt S der Diagonalen des Trapezes auf der Strecke $\overline{MN}$ liegt.

c) Gegeben seien eine Strecke $\overline{AB}$ und eine dazu parallele Gerade g, die nicht durch $\overline{AB}$ durchläuft. Beschreibt eine Konstruktion, mit der man nur mit dem Lineal die Strecke $\overline{AB}$ in 2014 gleich große Abschnitte teilen kann. Die Richtigkeit eurer Konstruktion ist zu beweisen.

Aufgabe 3

10 Punkte

Janina und Esther spielen das folgende Spiel: Abwechselnd platzieren sie ein Plus- oder ein Minuszeichen vor irgendeine der 16 Zahlen $1, 2, 3, \dots, 16$, Esther beginnt. Dort, wo schon ein Vorzeichen steht, darf kein neues gesetzt werden. Das Spiel endet erst, wenn vor alle 16 Zahlen ein Zeichen gesetzt wurde. Dann erhält Janina den Betrag der Summe all dieser ganzen Zahlen in Keksen ausbezahlt. Steht zum Beispiel vor den Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 13, 16 ein Minus und vor den Zahlen 5, 10, 11, 12, 14, 15 ein Plus, so erhält Janina 2 Kekse.

Esther spielt dabei nach folgender Strategie: Sie berechnet das Vorzeichen der Summe der bislang mit einem Vorzeichen versehenen Zahlen. Das entgegengesetzte Zeichen setzt sie vor die größte noch verfügbare Zahl. (Ist die aktuelle Summe 0, so wählt sie ein + vor der größten Zahl.) In ihrem ersten Zug schreibt sie also ein + vor die 16.

Beschreibt eine Strategie, mit der Janina eine möglichst große Anzahl an Keksen erhält! Beweist insbesondere, dass Janina bei keiner anderen Spielweise mehr bekommen kann.

Aufgabe 4

2+4+1+3 Punkte

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Winkeln α, β und γ. Das Dreieck $\triangle A'B'C'$ entstehe durch Spiegelung von $\triangle ABC$ an einer beliebigen Gerade. Ziel ist es, eine Zerlegung von $\triangle ABC$ in möglichst wenig Polygone zu finden, sodass diese allein mit Hilfe von Verschiebungen und Drehungen (aber ohne Spiegelungen) in eine Zerlegung von $\triangle A'B'C'$ überführt werden können.

a) Zeigt, dass in jedem Fall eine Zerlegung in drei Polygone ausreichend ist.

b) Zeigt, dass wenn $\alpha = \pi/2 = 90°$, $\alpha = 3\beta$ oder $\alpha = 2\beta$ gilt, bereits eine gewünschte Zerlegung in nur zwei Polygone existiert.

c) Beweist für den Fall, dass $\alpha = \pi/6 = 30°$ und $\beta = \pi/9 = 20°$ gilt, dass dann ebenfalls eine Zerlegung in zwei Polygone ausreicht.

d) Gegeben sind nun zwei flächengleiche konvexe Polygone P und Q in der Ebene. Beweist, dass eine Zerlegung von P in endlich viele Polygone existiert, die nur mit Verschiebungen und Drehungen in eine Zerlegung von Q überführt werden kann.