19. Berliner Tag der Mathematik

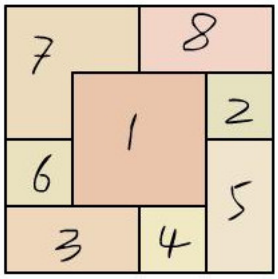
Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 7–8

17. Mai 2014

Aufgabe 1

10 Punkte

Acht nummerierte quadratische Blätter derselben Größe sind so übereinander auf einen Tisch gelegt worden, dass sich das folgende Bild ergibt:



Offensichtlich liegt das Blatt mit der Nummer 1 ganz oben. Bestimmt die Nummern aller Blätter, unter denen kein anderes Blatt liegt.

Lösung

Offenbar liegt Blatt 7 unter Blatt 1. Würde Blatt 6 genau in derselben Ecke liegen, wie Blatt 3, so wäre entweder Blatt 3 oder Blatt 6 nicht zu sehen. Folglich liegt Blatt 6 etwas weiter mittig. Da es von Blatt 7 verdeckt wird, liegt es unter Blatt 7. Außerdem liegt Blatt 3 unter Blatt 6, da es sonst nicht zu sehen wäre.

Im Wesentlichen die gleiche Argumentation zeigt, dass sich Blatt 4 unter Blatt 3 befindet, und Blatt 5 unter Blatt 4. Ebenso liegt Blatt 2 unter Blatt 5 und Blatt 8 unter Blatt 2. Folglich liegt Blatt 8 ganz unten und ist das einzige, unter denen kein weiteres Blatt liegt.

□

Aufgabe 2

10 Punkte

a) Kann man die neun Felder eines 3×3–Quadrates so mit den Zahlen 0, 1 und -1 besetzen, dass die Zeilensummen, die Spaltensummen sowie die beiden (aus je drei Summanden bestehenden) Diagonalensummen alle voneinander verschieden sind?

b) Kann man die Zeichen + und − so zwischen die folgenden Zahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

schreiben, dass als Ergebnis 0 herauskommt?

In beiden Aufgabenteilen ist eine Lösung anzugeben, wenn die Antwort „Ja." ist. Ist die Antwort „Nein.", wird eine Begründung erwartet, warum es nicht geht.

Begriffsklärung zu Teil a):

3	1
1	2

2×2–Quadrat

Die Abbildung zeigt ein 2×2–Quadrat, in dessen Feldern sich die Zahlen 1, 2 und 3 befinden. Die 1 kommt dabei zweimal vor. Die Zeilensummen sind durch $3+1 = 4$ und $1+2 = 3$ gegeben, die Spaltensummen durch $3+1 = 4$ und $1+2 = 3$, die Diagonalensummen durch $3+2 = 5$ und $1+1 = 2$. Beachtet aber, dass in a) von einem 3×3–Quadrat anstatt eines 2×2–Quadrats ausgegangen wird und die Zahlen in den Feldern anders sind!

Lösung

a) Nein. Es gibt drei Zeilensummen, drei Spaltensummen und zwei Diagonalensummen, also insgesamt acht Summen von je drei Zahlen. Deren Werte liegen zwischen -3 und 3, es gibt also nur sieben verschiedene Möglichkeiten für die acht Summen, insbesondere muss eine doppelt auftauchen.

b) Nein. Die Summe von fünf ungeraden und fünf geraden Zahlen ist stets ungerade. Insbesondere kann sie nicht die gerade Zahl 0 sein. □

Aufgabe 3

10 Punkte

Findet alle Lösungen der Gleichung

$$\begin{array}{cccccc} & M & A & T & H & E \\ + & M & A & C & H & T \\ \hline F & R & E & U & D & E \end{array}$$

Dabei stehen die zehn Buchstaben A, C, D, E, F, H, M, R, T und U der Gleichung für die Ziffern 0 bis 9. Unterschiedliche Buchstaben stellen auch unterschiedliche Ziffern dar.

Zeigt insbesondere, dass es keine weiteren Lösungen gibt, zum Beispiel durch ein systematisches Vorgehen.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das übliche Dezimalsystem, in dem beispielsweise $79 + 77 = 156$ gilt.

Lösung

Der maximale Übertrag, der auftreten kann, ist 1.

Betrachtung der Einerziffern liefert $T = 0$. Damit $F = 1$, sodass $U = C + 1$. Außerdem gilt $H, M \geq 6$. Sowohl bei $A + A$ als auch bei $H + H$ kann kein Übertrag von der Stelle rechts davon kommen.

Sollte nun weder C noch U gleich 5 sein, so muss $R = 5$ gelten und folglich $M = 7$ und $A \geq 6$. Also sind A, H jeweils eine der Ziffern 6, 8 oder 9. Damit sind E, D eine der Zahlen 2, 6 oder 8. Ist $A = 8$ oder $H = 8$, so könnte H beziehungsweise A weder 6 noch 9 sein, Widerspruch. Also $A = 6$ oder $A = 9$, woraus $E = 2$, $H = 9$ und $D = 8$ beziehungsweise $E = 8$, $H = 6$ und $D = 2$ folgt. In jedem Fall $C = 3$, $U = 4$. Wir erhalten die Lösungen $76092 + 76390 = 152482$ und $79068 + 79360 = 158428$.

Betrachten wir nun den Fall, dass eine der Zahlen C und U gleich 5 ist. Dann $A = 3$ oder $R = 3$.

Ist $R = 3$, so $M = 6$ und $A, H \geq 7$. Dann muss $C = 4$ und $U = 5$ gelten. Da $C = 4$, können weder M noch H gleich 7 sein, sodass A und H den Ziffern 8 und 9 entsprechen (in einer der beiden möglichen Reihenfolgen). Analog zu oben führt dies zum Widerspruch.

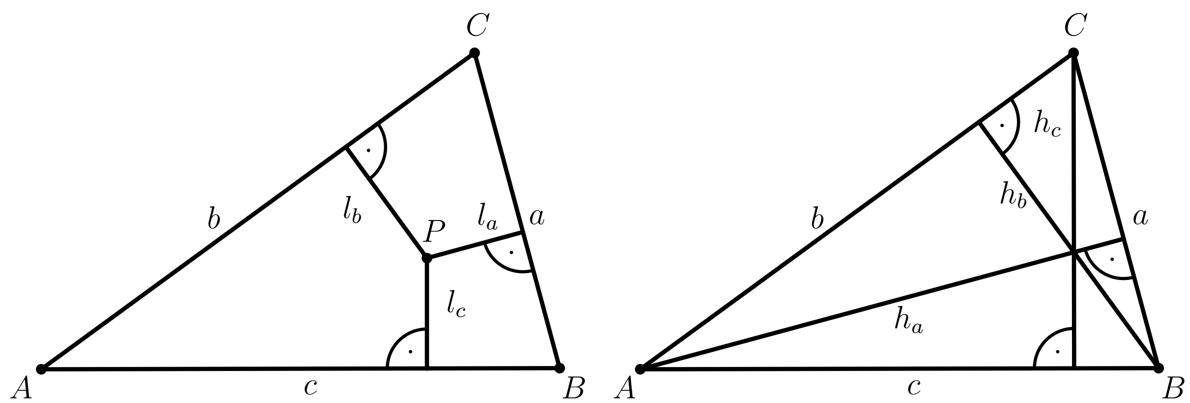
Ist $A = 3$, so $E = 6$. Dann $C = 4$, $U = 5$ und $M, H \geq 7$. Da $C = 4$, können weder M noch H gleich 7 sein, sodass M und H den Ziffern 8 und 9 entsprechen (in einer der beiden möglichen Reihenfolgen). Wieder erhalten wir einen Widerspruch.

Es gibt also nur die Lösungen $76092 + 76390 = 152482$ und $79068 + 79360 = 158428$. $\square$

Aufgabe 4

3+4+3 Punkte

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ und ein Punkt P im Innern des Dreiecks. Die Seitenlängen $a := |\overline{BC}|$, $b := |\overline{AC}|$ und $c := |\overline{AB}|$ erfüllen $a \leq b \leq c$. Von P werden die Lote auf die Seiten BC, AC und AB gefällt, die Längen der Lote werden mit l_a, l_b beziehungsweise l_c bezeichnet. Schließlich seien h_a, h_b und h_c noch die Längen der Höhen von den Eckpunkten A, B und C auf die Seiten BC, AC beziehungsweise AB. Die Beschriftungen der Lote und Höhen sind in der Abbildung gekennzeichnet.



Beschriftungen der Lote und der Höhen

a) Zeigt, dass $h_a \geq h_b \geq h_c$ gilt.

b) Zeigt die Ungleichungen $h_a \geq l_a + l_b + l_c$ und $l_a + l_b + l_c \geq h_c$. Findet alle Dreiecke, für die in mindestens einer der beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt, und begründet, dass es keine weiteren gibt.

c) Angenommen, es gilt sogar $a < b < c$, und P darf nun auch auf dem Rand des Dreiecks liegen. Findet alle Punkte P, für die $l_a + l_b + l_c$ minimal ist, und alle Punkte P, für die $l_a + l_b + l_c$ maximal ist. Begründet dabei, dass es keine weiteren solchen Punkte gibt.

Lösung

a) Zweimal der Flächeninhalt des Dreiecks ist $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. Aus $a \leq b \leq c$ folgt also $h_a \geq h_b \geq h_c$.

b) Eine Flächeninhaltszerlegung zeigt $a \cdot h_a = a \cdot l_a + b \cdot l_b + c \cdot l_c = c \cdot h_c$. Also

$$h_a = l_a + \frac{b}{a} \cdot l_b + \frac{c}{a} \cdot l_c \geq l_a + l_b + l_c \geq \frac{a}{c} \cdot l_a + \frac{b}{c} \cdot l_b + \cdot l_c = h_c.$$

Die Gleichheit in mindestens einem der beiden Fälle gilt genau dann, wenn $a = b = c$, das Dreieck also gleichseitig ist.

c) Nach b) ist das bestmögliche Minimum h_c, das bestmögliche Maximum h_a. Nun sind a, b, c paarweise verschieden. Die Flächeninhaltszerlegung in b) zeigt dann, dass das Minimum nur angenommen werden kann, wenn $l_a = l_b = 0$ gilt, also $P = C$. Dies ist tatsächlich der Fall. Analog wird das Maximum h_a nur für $P = A$ angenommen. $\square$

19. Berliner Tag der Mathematik

Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 9–10

17. Mai 2014

Aufgabe 1

3+3+4 Punkte

a) Die Entfernung zwischen den Hauptbahnhöfen von Berlin und Potsdam beträgt 30 Kilometer. Hanna und Olga starten gleichzeitig in Berlin beziehungsweise Potsdam und fahren sich mit dem Fahrrad entgegen. Hanna fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h, Olga mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h. Ein Schmetterling fliegt mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h gemeinsam mit Hanna in Berlin los, erreicht Olga, berührt ihre Stirn und fliegt dann zurück zur Stirn von Hanna, dann wieder zurück zu Olga und so weiter. Dabei fliegt er stets den Radweg entlang. Anderthalb Minuten bevor Olga und Hanna sich treffen, entschwindet der Schmetterling auf Nimmerwiedersehen. Wie viele Kilometer ist der Schmetterling zwischen den Köpfen von Olga und Hanna insgesamt geflogen?

b) Solveig besucht eine Aussichtsplattform, die aufgrund von Bauarbeiten nur über eine einzige Rolltreppe zu erreichen ist. Dummerweise läuft diese nach unten, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit. Folglich ist Solveig gezwungen, die Rolltreppen entgegen der Fahrtrichtung hochzulaufen. Dabei zählt sie 90 Stufen. Auf dem Rückweg nach unten, in der sie genauso viele Stufen pro Zeiteinheit bewältigt wie auf dem Weg nach oben, zählt sie nur 60 Stufen. Wie viele Stufen hätte sie steigen müssen, wenn die Rolltreppe stillgestanden hätte?

c) Irina schwimmt leidenschaftlich gern in der Havel. Unter der Oberbrücke geht sie ins Wasser und lässt einen mitgebrachten Ball mit der Strömung treiben. Sie schwimmt zunächst 20 Minuten gegen die Strömung, wendet, und schwimmt dem Ball hinterher. Dabei passiert sie erneut die Oberbrücke. An der Unterbrücke holt sie ihren Ball dann ein. Unter- und Oberbrücke sind zwei Kilometer voneinander entfernt. Sowohl die Fließgeschwindigkeit des Flusses als auch das Schwimmtempo von Irina sollen als konstant angenommen werden. Ermittelt die Strömungsgeschwindigkeit der Havel! Begründet eure Antwort.

Lösung

a) Sei t die Zeit bis zum Treffen in Stunden. Dann ist Hanna $15t$ Kilometer gefahren, Olga $25t$ Kilometer, und in Summe muss die komplette Distanz zwischen Berlin und Potsdam herauskommen. Also $15t + 25t = 30$, sodass $t = 3/4$. Der Schmetterling war in dieser Zeit (minus anderthalb Minuten) ständig in Bewegung und hat einen Weg von $40t - 1 = 29$ Kilometern zurückgelegt.

b) Sei v die Geschwindigkeit von Solveig und h die der Rolltreppen. Da Solveig im konstanten Tempo läuft, entspricht die Zeit, die sie benötigt, der Anzahl der Stufen, die sie zählt. Setzen wir die Länge der Rolltreppe gleich 1, so gilt $v-h=1/90$ und $v+h=1/60$. Ergo $90(v-h)=60(v+h)$, sodass $h=v/5$. Damit zählt sie $72=4/5\cdot 90=6/5\cdot 60$ Stufen, wenn die Rolltreppe stillstände.

c) Sei v_1 die Geschwindigkeit von Irina in ruhendem Gewässer und v_2 die Fließgeschwindigkeit des Flusses in km/h. s sei der Weg zwischen Oberbrücke und der Wendestelle. Seien t_1 und t_2 die Zeiten in Stunden, die Irina zwischen der Wendestelle und der Oberbrücke auf dem Rückweg braucht beziehungsweise dann zwischen Ober- und Unterbrücke. t_3 sei die Zeit, die der Ball zwischen den beiden Brücken benötigt (dies ist dann auch die insgesamt verstrichene Zeit). Dann gilt:

$$t_3=t_1+t_2+\frac{1}{3} \text{ und } 2=t_3v_2.$$

Gegen den Strom schwimmt Irina mit der Geschwindigkeit v_1-v_2, es gilt also für den Weg s von der Oberbrücke zur Wendestelle, den sie in 20 Minuten zurücklegt:

$$\frac{1}{3}(v_1-v_2)=s.$$

Auf dem Rückweg ist sie v_1+v_2 km/h schnell, sodass

$$s=t_1(v_1+v_2) \text{ und } 2=t_2(v_1+v_2).$$

Die Summe der letzten beiden Gleichungen liefert

$$s+2=(t_1+t_2)(v_1+v_2).$$

In Kombination mit der Gleichung davor liefert dies:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(v_1-v_2)+2 &= (t_1+t_2)(v_1+v_2)\\
\Leftrightarrow \frac{1}{3}v_1-\frac{1}{3}v_2+2 &= t_1v_1+t_2v_1+t_1v_2+t_2v_2\\
\Leftrightarrow \frac{1}{3}v_1-t_1v_1-t_2v_1+2 &= t_1v_2+t_2v_2+\frac{1}{3}v_2\\
\Leftrightarrow v_1(\frac{1}{3}-t_1-t_2)+2 &= v_2(t_1+t_2+\frac{1}{3})\\
\Leftrightarrow v_1(\frac{1}{3}-t_1-t_2)+2 &= v_2t_3\\
\Rightarrow v_1(-\frac{1}{3}+t_1+t_2)+v_2t_3 &= 2=t_3v_2\\
\Rightarrow v_1(-\frac{1}{3}+t_1+t_2) &= 0\\
\Rightarrow t_1+t_2 &= \frac{1}{3}\\
\Rightarrow t_3=t_1+t_2+\frac{1}{3} &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aus $2=t_3v_2$ folgt dann $v_2=3$. Die Strömungsgeschwindigkeit der Havel beträgt also 3 Kilometer pro Stunde. □

Aufgabe 2

10 Punkte

Eine Rettungsstation befindet sich am Ufer des Ozeans. Neben einer Tankstation hat diese mehrere baugleiche Flugzeuge zur Verfügung, die sich im Flug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1000 km/h fortbewegen und dabei einen gleichmäßigen Spritverbrauch haben. Deren Tanks fassen allerdings jeweils nur ausreichend viel Kerosin für 1000 Kilometer. Dafür sind die Flugzeuge derart technologisch fortgeschritten, dass eines einem anderen auch im Flug Kerosin abgeben kann. Wenn ein Flugzeug im Flug für mindestens eine Sekunde keinen Sprit hätte, würde es abstürzen. Der Einfachheit halber nimmt ein Tankvorgang keine Zeit in Anspruch.

Von einer Insel, die 1000 Kilometer entfernt liegt, kommt ein Notruf. Mindestens ein Flugzeug soll nun die Insel erreichen und wieder zurück fliegen. Weder auf der Insel noch auf dem Weg zu ihr gibt es eine Möglichkeit zu landen. Zum Einsatz dürfen auch mehrere Flugzeuge kommen, doch am Ende sollen sich alle Flugzeuge wieder auf der Rettungsstation befinden. Insbesondere darf keines abstürzen.

Findet die kleinste Anzahl an Flugzeugen, mit der dieses Ziel erreicht werden kann. Beschreibt, wie diese Anzahl an Flugzeugen dies bewerkstelligen kann, und begründet, dass keine geringere Zahl das auch könnte.

Lösung

Dass ein Flugzeug nicht reicht, versteht sich von selbst. Angenommen, zwei Flugzeuge würden genügen. Wir können annehmen, dass Flugzeug A den Weg zur Insel und zurück nimmt. Damit kann es auf dem Hinweg und auf dem Rückweg je genau einmal von dem anderen Flugzeug B betankt werden. Da dieses den Rückweg alleine bewältigen muss, kann es A nach 20 Minuten höchstens ein Drittel seiner Tankladung abgeben.

Folglich ist es nötig, dass Flugzeug A spätestens zur Zeit $t = 80$ erneut betankt werden. Es müsste mindestens zwei Drittel einer Tankladung erhalten, um den Rückflug zu schaffen. Wie wir bereits gesehen haben, kann Flugzeug B kann höchstens eine Drittel Tankladung abgeben. Ergo sind mindestens drei Flugzeuge nötig. □

Eine Lösung mit 3 Flugzeugen ist möglich. Zeitgleich zur Zeit $t = 0$, die wir in Minuten messen, fliegen drei voll betankte Flugzeuge los, die wir mit A, B und C benennen. Nach 20 Minuten (oder einem Drittel der Wegstrecke zur Insel) gibt Flugzeug C Flugzeug B eine Drittel Tankladung. Damit verbleibt ihm noch eine Drittel Tankladung für die Rückkehr zur Station zum Zeitpunkt $t = 40$. Dort wird es mindestens halb betankt und fliegt gleich wieder los.

Nun ist Flugzeug B wieder voll betankt. Zur Zeit $t = 30$ gibt Flugzeug B Flugzeug C eine halbe Tankladung. Dann ist Flugzeug A voll betankt und schafft es, zur Insel zu fliegen und zur Zeit $t = 90$ auf halber Strecke des Rückwegs zu sein.

Derweil dreht Flugzeug B um. Sein Sprit genügt, um zur Zeit $t = 50$ 1000/6 Kilometer von der Station entfernt zu sein. Gerade rechtzeitig gibt ihm dann Flugzeug C ein Sechstel seines Spritvorrats. Gemeinsam fliegen B und C zur Station, wo sie zur Zeit $t = 60$ voll betankt werden und wieder in Richtung Insel fliegen.

Wieder gibt Flugzeug C Flugzeug B eine Drittel Tankladung zur Zeit $t = 80$ und fliegt zurück. C erreicht die Station zur Zeit $t = 100$ und wird dort zumindest halb betankt. Es fliegt gleich wieder los.

Flugzeug B fliegt derweil weiter und trifft zur Zeit $t = 90$ auf Flugzeug A. Diesem gibt es eine halbe Tankladung, sodass A den restlichen Rückflug schafft. B dreht Richtung Station um und hat genug Sprit, um bis zur Zeit $t = 110$ in der Luft zu sein, wenn es noch 1000/6 Kilometer von der Station entfernt ist. Genau dort trifft es Flugzeug C, welches ihm eine Sechstel Tankladung gibt. Gemeinsam fliegen sie zur Station zurück.

Aufgabe 3

5+5 Punkte

In der Ebene ist eine endliche Menge M von $n \geq 3$ Punkten gegeben, die nicht alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Jedem Punkt x aus M ist eine rationale Zahl $k(x)$ zugeordnet, die wir den *Koeffizienten* von x nennen. Es sei vorausgesetzt, dass für jede Gerade, auf der mindestens zwei der Punkte aus M liegen, die Summe aller Koeffizienten von Punkten aus M, die auf dieser Geraden liegen, gleich Null ist.

a) Beweist für $n = 5$, dass alle Koeffizienten gleich Null sind.

b) Beweist für allgemeines n, dass alle Koeffizienten gleich Null sind.

Lösung

Sei x ein Punkt mit Koeffizient $k(x) \neq 0$. Wir zeichnen alle Geraden, die x mit den anderen Punkten aus M verbinden. Es gibt $d_x \geq 2$ solcher Geraden. Sei S die Summe aller Koeffizienten von Punkten. Wenn man die Summen der Koeffizienten der Punkte auf allen diesen Geraden summiert, bekommt man einerseits 0, andererseits $(d_x - 1)k(x) + S$. Das heißt, dass $k(x)$ das entgegengesetzte Vorzeichen zu S hat. Das kann offenbar nicht für alle von Null verschiedenen Koeffizienten gelten, Widerspruch.

Der erste Teil kann auch durch eine vollständige Fallunterscheidung gelöst werden. Dabei ist zu beachten, dass es vier verschiedene Fälle gibt: Vier Punkte liegen auf einer Geraden, je zwei Tripel liegen auf einer Geraden (mit einem Schnittpunkt), genau ein Tripel liegt auf einer Geraden, und keine drei Punkte liegen auf einer Geraden. □

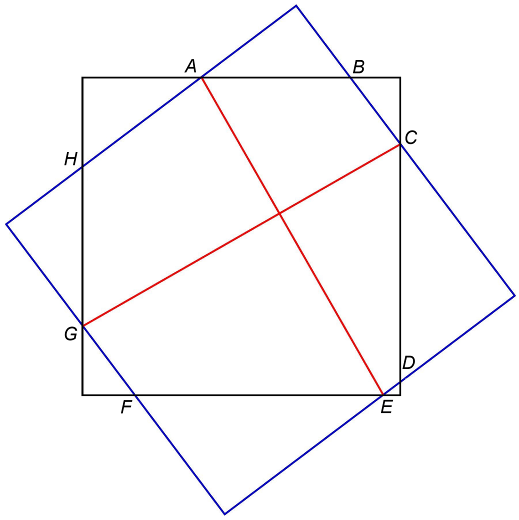
Aufgabe 4

6+4 Punkte

a) Sei Q ein Quadrat. Über Q ist ein zweites Quadrat R so gelegt, dass sich auf jeder Seite von Q zwei Schnittpunkte mit dem Rand von R befinden. Die Schnittpunkte seien im Uhrzeigersinn mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet. Zeigt, dass sich die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ in einem rechten Winkel schneiden.

b) Von einem Quadrat sei aus dem Inneren jeder Kante genau ein Punkt gegeben. Unter welchen Umständen ist es möglich, alleine mit Zirkel und Lineal das Quadrat eindeutig zu rekonstruieren? Beschreibt in diesen Fällen eine solche Rekonstruktion und beweist die Eindeutigkeit. Begründet in den anderen Fällen, warum dies nicht möglich ist.

Lösung



Zwei Quadrate, die übereinander liegen

Lösung

a) Die Strecke $\overline{AE}$ verbindet die Schnittpunkte zwischen zwei Paaren von Parallelen mit gegebenem Abstand zwischen den Parallelen, nämlich AB und EF sowie AH und DE. Für die Länge von $\overline{AE}$ ist einzig der Schnittwinkel entscheidend, für ihre Richtung in der Ebene neben dem Schnittwinkel noch die Richtungen der Parallelenpaare. Das heißt, dass wenn AB und EF (oder AH und DE) parallel verschoben werden (ohne ihren Abstand untereinander zu verändern), so verschiebt sich auch $\overline{AE}$ nur parallel.

Dreht man nun die beiden Geradenpaare um 90 Grad, so erhält man bis auf Parallelverschiebung die Paare GH und CD sowie FG und BC. $\overline{AE}$ geht nach unserer obigen Beobachtung dann in eine Parallelverschiebung von $\overline{CG}$ über. Folglich schneiden sich die beiden Strecken in einem rechten Winkel und sind sogar gleich lang.

b) Wir bezeichnen die vier Punkte mit A, B, C, D, wobei wir gegen den Uhrzeigersinn vorgehen (die konvexe Hülle liefert eine zyklische Orientierung). Der Punkt D' sei so konstruiert, dass $\overline{BD'}$ genauso lang ist wie $\overline{AC}$ und die Strecken senkrecht aufeinander stehen. Nach der Beobachtung in a) gehört D' zu der gleichen Kante des Quadrats wie D. Die weitere Konstruktion des Quadrats ist jetzt klar.

Es gibt genau dann unendlich viele Quadrate, wenn der Punkt D' auf D fällt, wie man schnell einsieht (die obige Konstruktion funktioniert dann für unendliche viele Wahlen der Richtung der Kante, auf der D liegt). Ansonsten ist die Konstruktion aber eindeutig: Die Reihenfolge der Punkte in der konvexen Hülle ist gleich der, in der sie das Quadrat durchlaufen. Es blieben noch prinzipiell zwei Möglichkeiten für D', allerdings muss D' auf der bezüglich AC gegenüberliegenden Seite wie B liegen. $\square$

19. Berliner Tag der Mathematik

Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 11–13

17. Mai 2014

Aufgabe 1

10 Punkte

Die Olsenbande plant ihren nächsten Streich und will im Auftrag von Baron von Løvenvold eine chinesische Ming-Vase aus Schloss Borreholm stehlen. Doch die Polizei ist ihnen bereits auf den Fersen, Kriminalbeamter Henning Holm überwacht das Schloss. Am Ende der Woche berichtet er verzweifelt: „An sechs Abenden habe ich beobachtet, wer das Schloss betreten hat, und mitgehört, welche Namen bei ihren Gesprächen gefallen sind. Zu jedem, der das Schloss betreten hat, konnte ich ein Profil erstellen – hier haben Sie die Akte – die Beschreibungen sind mit 1 bis 9 durchnummeriert. Doch ich werde einfach nicht schlau aus meinen Beobachtungen.“ Er zeigt folgenden Notizzettel vor:

Montag: *Anwesend:* 1, 2, 7, 8; *Namen:* Benny, Egon, Kjeld, Yvonne

Dienstag: *Anwesend:* 1, 4, 5, 9; *Namen:* Baron von Løvenvold, Butler, Yvonne

Mittwoch: *Anwesend:* 4, 6, 9; *Namen:* Egon, Fie

Donnerstag: *Anwesend:* 1, 3, 4, 9; *Namen:* Baron von Løvenvold, Benny, Frits

Freitag: *Anwesend:* 4, 7, 9; *Namen:* Børge, Kjeld

Samstag: *Anwesend:* 1, 2, 7, 9; *Namen:* Baron von Løvenvold, Butler, Børge, Yvonne

Daraufhin antwortet Kriminalkommissar Jensen: „Mein junger Freund, Sie müssen noch viel lernen. An manchen Abenden wurden Sie entdeckt und da wurden dann nur Namen von Personen genannt, die zu dem Zeitpunkt nicht anwesend waren. Und jetzt wieder ran an die Arbeit, der Minister erwartet Ergebnisse!“

Zeigt, dass sich aus obigen Informationen jede der neun Personen auf eindeutige Weise genau einem Profil aus Holms Akte zuordnen lässt.

Lösung

An Montag und Samstag waren dreimal dieselben Personen anwesend, es gibt aber keine drei Namen, die an beiden Abenden genannt oder an beiden Abenden nicht genannt wurden. Folglich wurde Holm an genau einem der beiden Tage entdeckt.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass Holm am Montag, aber nicht am Samstag erwischt wurde. Dann entsprechen den Profilen 1, 2, 7, 9 die Namen Baron von Løvenvold, Butler, Børge, Yvonne und den Profilen 1, 2, 7, 8 können nur zu vier der Namen Baron von Løvenvold, Butler, Børge, Fie, Frits gehören. Daraus folgt, dass 1, 2, 7 Baron von Løvenvold, Butler, Børge entsprechen (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge), und dass zu 9 Yvonne gehört. Dann wurden aber auch am Dienstag die korrekten Namen verwendet. Folglich gehören Baron von Løvenvold und der Butler zu zwei der Profile 1, 4, 5. Dies ist ein Widerspruch, da die zwei nicht beide dem Profil 1 entsprechen können.

Also wurde Holm am Samstag, nicht aber am Montag entdeckt. Dann entsprechen den Profilen 1, 2, 7, 8 die Namen Benny, Egon, Kjeld, Yvonne und den Profilen 1, 2, 7, 9 können nur zu vier der Namen Benny, Egon, Fie, Frits, Kjeld gehören. Daraus folgt, dass 1, 2, 7 Benny, Egon, Kjeld entsprechen (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge), und dass zu 8 Yvonne gehört.

Das Profil 9 ist entweder Fie oder Frits. Weil Egon weder 4 noch 6 noch 9 ist, so wurden am Mittwoch die falschen Namen verwendet. Folglich ist nicht Fie, sondern Frits 9.

Da Yvonne 8 ist, so wurde Holm auch am Dienstag bemerkt. Damit entsprechen Børge und Fie den Profilen 4 und 5. Da am Mittwoch die falschen Namen verwendet wurden, kann Fie nicht 4 sein, also ist sie 5 und Børge 4.

Somit wurden am Freitag die richtigen Namen verwendet. Damit gehört 7 zu Kjeld.

Da Frits 9 ist, wurde Holm am Donnerstag nicht entdeckt. Dann muss Benny zur 1 gehören, sodass Egon Profil 2 entspricht. Außerdem ist Baron von Løvenvold 3.

Für den Butler bleibt letztendlich nur Profil 6 übrig.

Zusammenstellung: 1 – Benny; 2 – Egon; 3 – Baron von Løvenvold; 4 – Børge; 5 – Fie; 6 – Butler; 7 – Kjeld; 8 – Yvonne; 9 – Frits. Eine kurze Überprüfung zeigt, dass diese Verteilung zu keinem Widerspruch zu den jeweiligen Aussagen führt (zur Erinnerung: Holm wurde Dienstag, Mittwoch und Samstag entdeckt). □

Aufgabe 2

3+4+3 Punkte

a) Gegeben seien ein Kreis k und eine Gerade g, die durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Zudem sei P ein Punkt, der weder auf dem Kreis noch auf der Geraden liegt. Beschreibt eine Konstruktion, mit der man nur mit dem Lineal (ohne Zirkel!) eine Senkrechte von P auf die Gerade g errichten kann. Die Richtigkeit eurer Konstruktion ist zu beweisen.

b) In einem (konvexen) Trapez $ABCD$ seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die zueinander parallelen Seiten; ihre Mittelpunkte bezeichnen wir mit M beziehungsweise N. Beweist, dass der Schnittpunkt S der Diagonalen des Trapezes auf der Strecke $\overline{MN}$ liegt.

c) Gegeben seien eine Strecke $\overline{AB}$ und eine dazu parallele Gerade g, die nicht durch $\overline{AB}$ durchläuft. Beschreibt eine Konstruktion, mit der man nur mit dem Lineal die Strecke $\overline{AB}$ in 2014 gleich große Abschnitte teilen kann. Die Richtigkeit eurer Konstruktion ist zu beweisen.

Lösung

a) P bildet mit den beiden Schnittpunkten A, B von k und g ein Dreieck. Verbinden wir die Schnittpunkte des Kreises und den Geraden AP und BP mit B beziehungsweise A, so erhalten wir nach dem Satz des Thales die Höhen auf die jeweiligen Dreiecksseiten. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks. Verbinden wir diesen mit P, haben wir die gesuchte Senkrechte konstruiert.

b) Äquivalent konstruieren wir N als Schnittpunkt von $\overline{CD}$ mit der Geraden durch S und den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$, und zeigen, dass N der Mittelpunkt ist. Wiederum äquivalent dazu genügt es,

$$\frac{|\overline{CN}|}{|\overline{DN}|} = 1 = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{BM}|}$$

zu zeigen. Dies folgt aber aus

$$\frac{|\overline{DN}|}{|\overline{BM}|} = \frac{|\overline{SN}|}{|\overline{SM}|} = \frac{|\overline{CN}|}{|\overline{AM}|}$$

wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AMS$ und $\triangle CNS$ beziehungsweise $\triangle BSM$ und $\triangle DSN$ (Wechsel- und Scheitelwinkel).

c) Wir wählen einen Punkt X, der auf derselben Seite von g liegt wie $\overline{AB}$ und noch weiter von g entfernt ist. Die Schnittpunkte der Geraden XA und XB mit g seien D und C. Die Gerade durch X und dem Diagonalenschnittpunkt des Trapezes $ABCD$ halbiert jeweils die beiden Segmente $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Betrachtung in b). Dazu beachte man, dass die Gerade durch X und einen der beiden Mittelpunkte nach Strahlensatz auch durch den jeweils anderen verläuft. Durch wiederholtes Anwenden können wir $\overline{CD}$ in 2048 gleich große Abschnitte teilen. Wir wählen auf $\overline{CD}$ ein aus 2014 Abschnitten bestehendes Segment $\overline{EF}$, sodass sich die Geraden AE und BF in einem Punkt Y schneiden. Wenn wir Y mit den 2013 Teilungspunkten zwischen E und F verbinden, teilen wir $\overline{AB}$ in 2014 gleich große Abschnitte. $\square$

Aufgabe 3

10 Punkte

Janina und Esther spielen das folgende Spiel: Abwechselnd platzieren sie ein Plus- oder ein Minuszeichen vor irgendeine der 16 Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 16$, Esther beginnt. Dort, wo schon ein Vorzeichen steht, darf kein neues gesetzt werden. Das Spiel endet erst, wenn vor alle 16 Zahlen ein Zeichen gesetzt wurde. Dann erhält Janina den Betrag der Summe all dieser ganzen Zahlen in Keksen ausbezahlt. Steht zum Beispiel vor den Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 13, 16 ein Minus und vor den Zahlen 5, 10, 11, 12, 14, 15 ein Plus, so erhält Janina 2 Kekse.

Esther spielt dabei nach folgender Strategie: Sie berechnet das Vorzeichen der Summe der bislang mit einem Vorzeichen versehenen Zahlen. Das entgegengesetzte Zeichen setzt sie vor die größte noch verfügbare Zahl. (Ist die aktuelle Summe 0, so wählt sie ein + vor der größten Zahl.) In ihrem ersten Zug schreibt sie also ein + vor die 16.

Beschreibt eine Strategie, mit der Janina eine möglichst große Anzahl an Keksen erhält! Beweist insbesondere, dass Janina bei keiner anderen Spielweise mehr bekommen kann.

Lösung

Wir beschreiben zunächst Janinas Strategie. Sie betrachtet die Paare $(1, 2)$, $(3, 4)$, $\ldots$, $(15, 16)$. Wenn immer Esther ein Zeichen vor eine Zahl eines Paares gesetzt hat, wählt Janina das andere Zeichen für die zweite Zahl des Paares. Ausnahme bildet das Paar $(15, 16)$, hier verwendet sie dasselbe Zeichen. Mit dieser Strategie erhält sie mindestens $16 + 15 - \frac{14}{2} \cdot 1 = 24$ Kekse.

Wenn Janina und Esther beide nach ihren Strategien spielen, ist $+16$, $+15$, -14, $+13$, -12, $+11$, …, -2, $+1$ die Zugfolge und 24 Kekse müssen ausbezahlt werden.

Es verbleibt zu zeigen, dass Janina mit einer anderen Strategie nicht mehr als 24 Kekse erzielen kann, solange Esther bei ihrer Strategie bleibt. Wir betrachten Paare von Zügen: erst Esther, dann Janina. Sei $1 \leq k \leq 8$ so gewählt, dass nach dem k-ten Zugpaar das Vorzeichen der aktuellen Summe wechselt und anschließend sich nicht mehr ändert. $k = 1$ bedeutet dabei, dass die Summe stets positiv ist, und wenn die aktuelle Summe 0 wird, so zählt erst das nächste Zugpaar gegebenenfalls als Vorzeichenwechsel.

In den ersten $(k-1)$ Zugpaaren hat Esther erreicht, dass die Zahlen $16, 15, \ldots, 16-(k-2)$ mit einem Vorzeichen versehen wurden (entweder von ihr selbst oder von Janina). Da das k-te Zugpaar das Vorzeichen der aktuellen Summe ändert, ist die Summe der auszubezahlenden Kekse höchstens gleich dem Betrag der Summe der Zahlen, die nach dem k-ten Zugpaar mit einem Vorzeichen versehen werden, plus der Summe der Beträge des k-ten Zugpaares (wobei die Gleichheit nur dann erreicht werden kann, wenn die Summe bis zum $(k-1)$-ten Zugpaar gleich 0 ist). Im k-ten Zugpaar kommt höchstens $(16-(k-1)) + (16-k) = 33-2k$ hinzu. In den verbleibenden $8-k$ Zugpaaren nimmt der Absolutbetrag der aktuellen Summe stets um mindestens 1 ab, denn Esther nimmt die aktuell größte Zahl, j, und versieht diese mit einem Vorzeichen, sodass der Betrag danach kleiner wird. Danach kann Janina im besten Fall mit $j-1$ den Betrag größer machen, in jedem Fall sinkt der Betrag um mindestens 1. Also kann der Betrag am Ende höchstens $(33-2k)-(8-k) = 25-k \leq 24$ betragen. □

Aufgabe 4

2+4+1+3 Punkte

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Winkeln α, β und γ. Das Dreieck $\triangle A'B'C'$ entstehe durch Spiegelung von $\triangle ABC$ an einer beliebigen Gerade. Ziel ist es, eine Zerlegung von $\triangle ABC$ in möglichst wenig Polygone zu finden, sodass diese allein mit Hilfe von Verschiebungen und Drehungen (aber ohne Spiegelungen) in eine Zerlegung von $\triangle A'B'C'$ überführt werden können.

a) Zeigt, dass in jedem Fall eine Zerlegung in drei Polygone ausreichend ist.

b) Zeigt, dass wenn $\alpha = \pi/2 = 90°$, $\alpha = 3\beta$ oder $\alpha = 2\beta$ gilt, bereits eine gewünschte Zerlegung in nur zwei Polygone existiert.

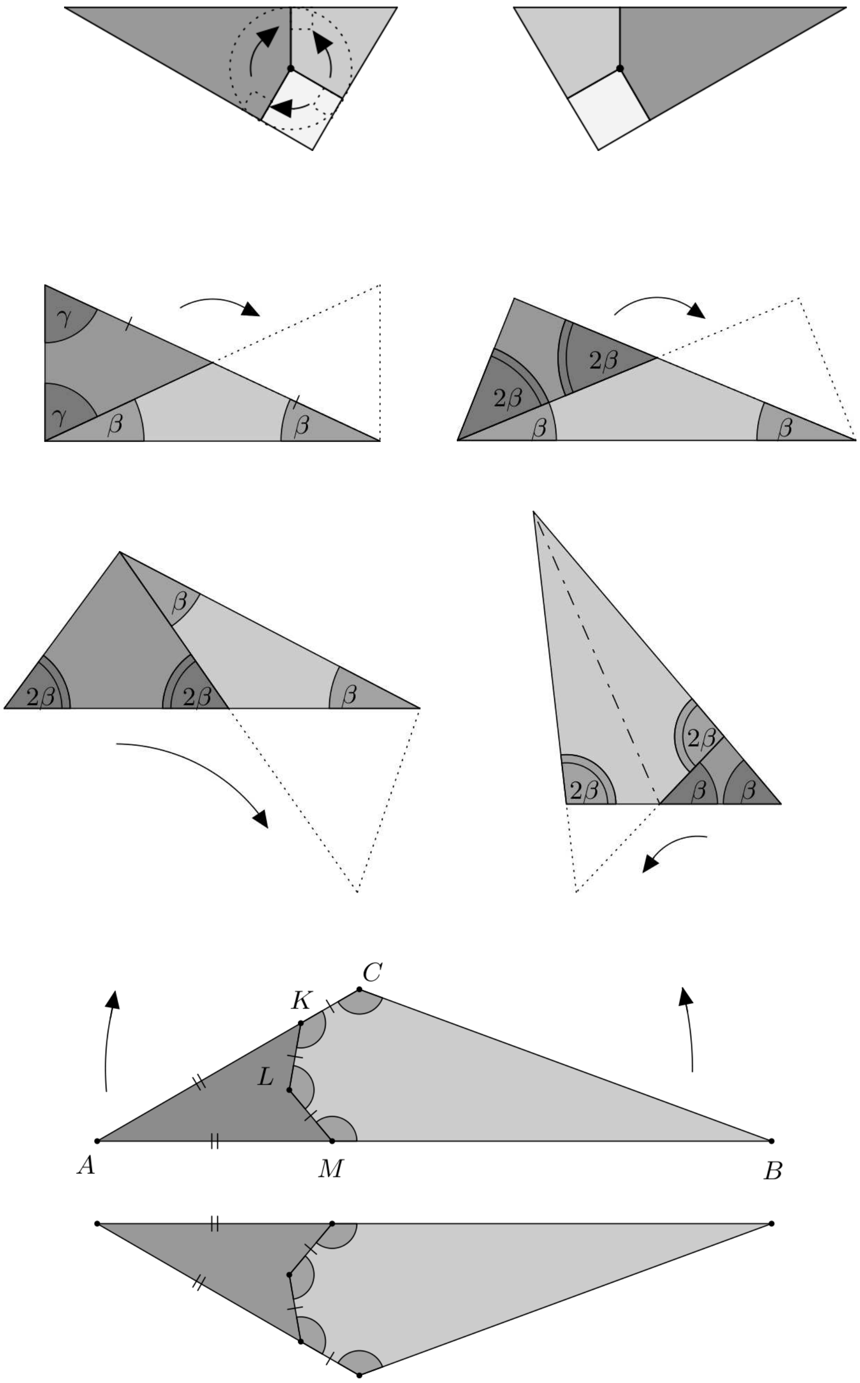
c) Beweist für den Fall, dass $\alpha = \pi/6 = 30°$ und $\beta = \pi/9 = 20°$ gilt, dass dann ebenfalls eine Zerlegung in zwei Polygone ausreicht.

d) Gegeben sind nun zwei flächengleiche konvexe Polygone P und Q in der Ebene. Beweist, dass eine Zerlegung von P in endlich viele Polygone existiert, die nur mit Verschiebungen und Drehungen in eine Zerlegung von Q überführt werden kann.

Lösung

a) Wenn wir die Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Dreiecksseiten fällen, zerlegen wir das Dreieck in drei Vierecke. Das Vertauschen zweier Vierecke überführt $\triangle ABC$ in sein Spiegelbild.

b) Für $\alpha = \pi/2$ betrachten wir die Zerlegung durch die Seitenhalbierende von a in zwei



Lösung von a) bis c)

Dreiecke. Nach dem Satz des Thales sind die Strecken vom Mittelpunkt von a zu den Eckpunkten alle gleich lang. Es folgt, dass die beiden Teilungsdreiecke gleichschenklig mit Basiswinkel β beziehungsweise γ sind. Drehen wir eines der Dreiecke um den Mittelpunkt von a auf den anderen Schenkel des anderen Dreiecks, bekommen wir das Spiegelbild von $\triangle ABC$.

Ist $\alpha = 3\beta$, so betrachten wir die Zerlegung in zwei Dreiecke, die entsteht, wenn wir α im Verhältnis $1 : 2$ teilen, wobei der kleinere Winkel an c liegen soll. Wir erhalten wieder zwei gleichschenklige Dreiecke, diesmal mit Basiswinkeln β beziehungsweise 2β, die wir entsprechend zum Spiegelbild umordnen können.

Ist $\alpha = 2\beta < \pi/2$, so tragen wir von γ einen Winkel β ab, der an a liegen soll. Die entsprechende Zerlegung liefert wieder zwei gleichschenklige Dreiecke mit Basiswinkeln β beziehungsweise 2β.

Ist $\alpha = 2\beta > \pi/2$, so tragen wir vom Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden von γ mit c aus einen Winkel β ab, der gegenüber von B liegen soll. Die entsprechende Zerlegung liefert ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel β und ein Viereck, welches spiegelsymmetrisch zur Winkelhalbierenden von γ liegt. Drehen wir das Dreieck um S auf das Viereck, erhalten wir das Spiegelbild von $\triangle ABC$.

c) Wir wählen einen Streckenzug $CKLM$ von drei gleich langen Seiten, sodass K auf $\overline{AC}$ und M auf $\overline{AB}$ liegt und sodass die Winkel $\angle MLK$ und $\angle LKC$ jeweils gleich γ sind. Dann ist $\angle BML$ ebenfalls so groß wie γ. Der Streckenzug teilt das Dreieck in ein Vier- und ein Fünfeck. Packen wir das Viereck so um, dass die Punkte M, L, K auf L, K, C landen, erhalten wir das Spiegelbild des Dreiecks $\triangle ABC$.

Wir wollen anmerken, dass es noch mindestens zwei weitere Zerlegungen gibt, die das gewünschte tun. Wir überlassen das Finden dieser als Zusatzaufgabe für die Leser dieser Musterlösung.

d) Da P beliebig sein kann, genügt es, die Aussage für ein Rechteck Q zu zeigen, dessen eine Seitenlänge 1 ist. Dazu reicht es aus, dass jedes Dreieck in ein flächengleiches Rechteck mit einer Seitenlänge 1 umgeordnet werden kann, da die Rechtecke leicht aufeinander gestapelt werden können und wir dann das Resultat auf eine Zerlegung von P in Dreiecke anwenden können.

Jedes Dreieck können wir in ein flächengleiches Rechteck verwandeln. Dazu betrachten wir die Höhe von dem Eckpunkt X aus, an dem der größte Winkel liegt. Diese Höhe verläuft im Innern des Dreiecks. Ziehen wir eine Parallele der X gegenüberliegenden Seite durch den Mittelpunkt der Höhe, so zerlegen wir das Dreieck in zwei Dreiecke und zwei Vierecke. Drehen wir die beiden Dreiecke an den Schnittpunkten der Parallelen mit den entsprechenden Dreiecksseiten, so erhalten wir ein Dreieck, dessen eine Seitenlänge die halbe Höhe ist und dessen andere Seite die X gegenüberliegende ist.

Durch Halbieren und Umordnen können wir jedes Rechteck in ein flächengleiches Rechteck verwandeln, bei dem keine Seite mehr als doppelt so lang ist wie die andere. Haben wir nun zwei solche flächengleiche Rechtecke, legen wir sie so übereinander, dass sie einen Eckpunkt, sagen wir den Ursprung eines Koordinatensystems gemeinsam haben, die Seiten entlang der Achsen angeordnet sind und sich beide Rechtecke im oberen Quadranten befinden. Verbinden wir nun den Eckpunkt des Rechtecks mit der längeren x-Seite mit dem der längeren y-Seite, so zerlegen wir die Rechtecke jeweils in ein Fünfeck und zwei Dreiecke. Das Fünfeck ist bei beiden Rechtecken auf derselben Stelle. Die Dreiecke eines Rechtecks sind jeweils ähnlich zu denen des anderen. Sind x_1 und x_2 die Längen der

x-Seiten der Dreiecke eines Rechtecks und x_1' und x_2' die Längen der x-Seiten der dazu ähnlichen Dreiecke, so $x_1 + x_2' = x_1' + x_2$. Wäre x_1 größer oder kleiner als x_1', so wäre auch x_2 größer beziehungsweise kleiner als x_2'. Die Summen der Flächeninhalte der beiden Dreiecke ist nach Voraussetzung aber gleich, ergo müssen die Strecken gleich groß sein, die Dreiecke also kongruent. Damit lassen sich die Rechtecke ineinander zerlegen.

Ist ein Rechteck aus der ursprünglichen Dreieckszerlegung gegeben, so wählen wir als zweites ein flächengleiches, dessen eine Seite durch eine (positive oder nicht-positive) Zweierpotenz gegeben ist. Die andere Seite soll dennoch nicht mehr als doppelt oder weniger als halb so lang sein. Das zweite Rechteck können wir dann auf einfache Weise in eines mit einer Seitenlänge 1 transformieren. Aneinanderkleben der einzelnen Teilrechtecke liefert ein großes Rechteck, dessen eine Seitenlänge 1 ist. Die andere ist durch den Flächeninhalt des Polygons gegeben, und die Behauptung ist gezeigt. $\square$