23. Berliner Tag der Mathematik

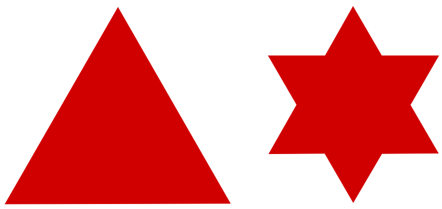
Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 7–8

21. April 2018

Aufgabe 1

10 Punkte

Mohamed backt Kekse. Dazu verwendet er zwei Ausstechformen: ein gleichseitiges Dreieck und einen gleichseitigen sechseckigen Stern wie in der Abbildung.



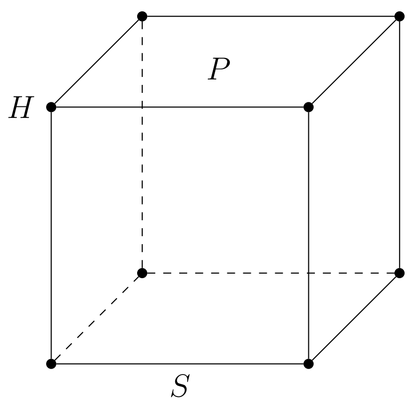
Mohameds Ausstechformen

Beide Formen haben den gleichen Umfang. Die Kekse aus der dreieckigen Form haben einen Flächeninhalt von jeweils 4 Quadratzentimetern. Wie groß ist dann die Fläche eines sternförmigen Kekses? Eure Antwort ist zu begründen.

Aufgabe 2

3+3+4 Punkte

Die Stadt Metropolis ist ein Würfel, dessen Ecken Häuser, dessen Kanten Straßen und dessen Seitenflächen Plätze sind. In der Abbildung wird exemplarisch das Haus H, die Straße S und der Platz P dargestellt.



Stadtplan von Metropolis

a) Die Bewohnerinnen von Metropolis möchten ihre Häuser so mit den Zahlen von 1 bis 8 nummerieren, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und für jeden Platz die Summe der Hausnummern der vier angrenzenden Häuser stets dieselbe Zahl k ist. Findet heraus, was k ist! Eure Antwort ist zu begründen. Gebt außerdem eine Nummerierung der Häuser an, die diese Eigenschaft erfüllt.

b) Nun möchten die Einwohnerinnen auch ihre Straßen so mit den Zahlen von 1 bis 12 nummerieren, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und sich für jeden Platz die Nummern der vier angrenzenden Straßen zu der stets gleichen Zahl l summieren. Findet heraus, was l ist, begründet eure Antwort, und gebt eine entsprechende Nummerierung der Straßen an.

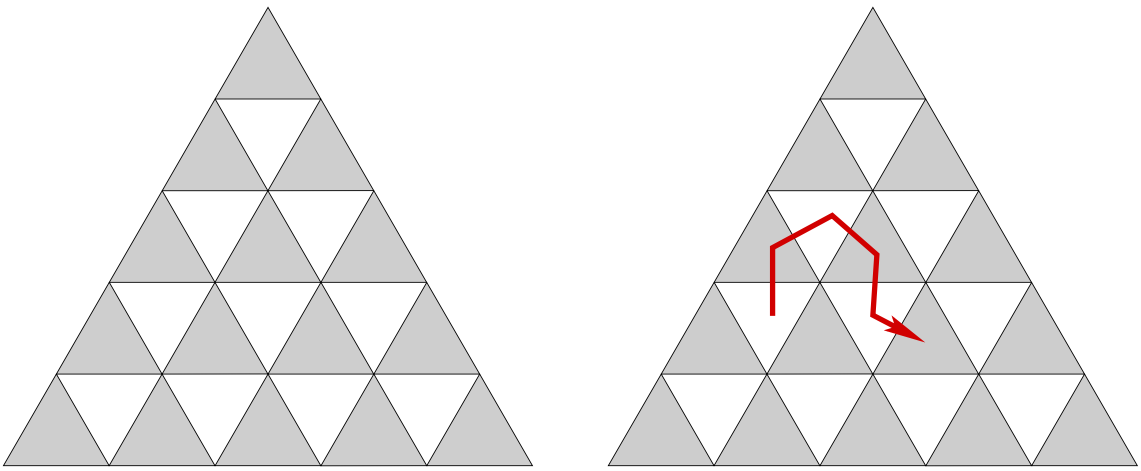
c) Die Stadtverwaltung von Metropolis beschließt, dass die Häuser so in jeweils einer Farbe gestrichen werden sollen, dass zwei durch eine Straße verbundene Häuser verschiedene Farben haben. Die Stadtverwaltung beauftragt Dr. Mabuse damit, jedem Haus zwei Farbeimer mit verschiedenen Farben zu bringen. Allerdings liegt Dr. Mabuse mit der Verwaltung im Streit und möchte ihren Plan durchkreuzen. Kann ihm das gelingen?

Falls ja, gebt eine Verteilung von je zwei Farben auf die Häuser an und begründet, dass es bei jeder Auswahl aus diesen Farben stets zwei durch eine Kante verbundene Ecken geben wird, die gleich gefärbt sind; falls nicht, beweist, dass die Bewohnerinnen von Metropolis bei jeder Lieferung von Farbeimern ihre Häuser so färben können, dass je zwei durch eine Straße verbundene Häuser verschieden gefärbt sind.

Aufgabe 3

3+7 Punkte

Ein gleichseitiges Dreieck D der Seitenlänge 15 ist durch Geraden, die parallel zu den Seiten von D sind, in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 zerlegt. Diese kleinen Dreiecke nennen wir Zellen. (Die Abbildung zeigt den Fall für ein Dreieck der Seitenlänge 5.)



(a) Aufteilung eines Dreiecks der Seitenlänge 5

(b) Erlaubter Weg durch die Zellen

a) Wie viele dreieckige Zellen gibt es? Begründet eure Antwort.

b) Eine Besucherin betritt das Dreieck D mit der Kantenlänge 15 über eine der drei Eckzellen und will möglichst viele Zellen des Dreiecks betreten. Dabei darf sie von einer Zelle aus als nächstes nur in eine Zelle gehen, die mit dieser eine Kante gemeinsam hat. Ist die Besucherin also in einem Eckdreieck, so kann sie nur zu einem einzigen Nachbardreieck weiterlaufen. Für die übrigen Randdreiecke könnte sie jeweils zu zwei Nachbardreiecken weiterlaufen; lediglich für die inneren Zellen gibt es genau drei Nachbarzellen.

Nun wurde der Besucherin verboten, irgendeine Zelle mehr als einmal zu betreten. Erklärt, wie viele Zellen die Besucherin unter dieser Bedingung höchstens besuchen kann.

Aufgabe 4

3+4+3 Punkte

a) Kathi spielt mit (fünfstelligen) Postleitzahlen. Von einer beliebigen Postleitzahl zieht sie die Zahl in umgekehrter Ziffernreihenfolge ab. Dabei beobachtet sie, dass das Ergebnis stets durch 99 teilbar ist, egal, mit welcher Zahl sie startet. Zum Beispiel ist $10623 - 32601 = -21978 = -99 \cdot 222$. Beweist ihre Beobachtung!

b) Nun stellt Kathi eine Tabelle mit zwei Zeilen und neun Spalten auf und schreibt in jede der beiden Zeilen die Zahlen von 1 bis 9 in beliebiger Reihenfolge. In jeder der neun Spalten subtrahiert sie die untere von der oberen Zahl und bildet dann das Produkt aller neun Differenzen. Egal, in welcher Reihenfolge genau Kathi die Zahlen zu Beginn in die Tabelle schreibt, das Produkt ist immer eine gerade Zahl. Begründet dies.

3	2	1	6	4	5	8	9	7
1	6	4	3	9	8	2	7	5

(b) In der Beispieltabelle ist das Produkt der Differenzen gleich 25920

c) Kathi geht einen Schritt weiter. Sie denkt sich zwei natürliche Zahlen $b > a \geq 1$ aus und stellt nun eine Tabelle mit zwei Zeilen und $b-a$ Spalten auf. In die erste Zeile trägt sie hintereinander die Zahlen $a+1, a+2, \ldots, a+(b-a)$ und in die zweite Zeile hintereinander die Zahlen $b+1, b+2, \ldots, b+(b-a)$ ein. Sie bemerkt, dass es für ihre spezielle Wahl von a und b keine Spalte in der Tabelle gibt, in der die beiden Zahlen einen gemeinsamen Teiler haben.

Wie viele Spalten hat Kathis Tabelle? Beweist, dass sich die Differenz $b-a$ eindeutig aus Kathis Beobachtung der Teilerfremdheit der beiden Zahlen jeder Spalte ermitteln lässt!

$a+1$	$a+2$	$\cdots$	$\cdots$	$a+(b-a)$
$b+1$	$b+2$	$\cdots$	$\cdots$	$b+(b-a)$

(c) Kathis neue Tabelle mit $b-a$ Spalten

23. Berliner Tag der Mathematik

Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 9–10

21. April 2018

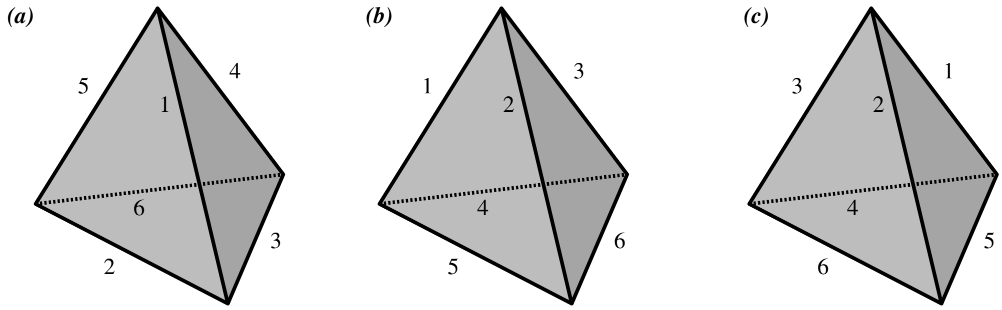
Aufgabe 1

5+5 Punkte

Büşra möchte ihren Freundinnen eine Freude machen und fertigt bunte Tetraeder aus Papier an. Die Tetraeder sind alle identisch und regulär, das heißt, dass alle Kanten der jeweils vier dreieckigen Seitenflächen gleich lang sind. Ihr stehen die sechs Farben Blau, Grün, Türkis, Rot, Orange und Violett zur Verfügung. Büşra ist es wichtig, dass keine zwei Freundinnen gleich bemalte Tetraeder bekommen, es soll also nicht möglich sein, zwei ihrer Exemplare durch eine Drehung ineinander überführen zu können.

a) Dieses Jahr bemalt Büşra die Seitenflächen der Tetraeder so in jeweils einer Farbe, dass keine zwei Seitenflächen eines Tetraeders dieselbe Farbe haben. Wie viele verschiedene Tetraeder kann sie für ihre Freundinnen höchstens herstellen? Euer Lösungsweg ist anzugeben.

b) Nächstes Jahr bemalt Büşra die Kanten der Tetraeder so in jeweils einer Farbe, dass keine zwei Kanten eines Tetraeders dieselbe Farbe haben. Wie viele verschiedene Tetraeder kann sie dann höchstens herstellen? Stellt auch hier euren Lösungsweg dar.



Kantenfärbungen von regulären Tetraedern

Beispiel: Die Kantenfärbungen (a) und (b) in der Abbildung liefern identische Tetraeder, aber (c) zeigt eine andere Kantenfärbung.

Aufgabe 2

3+2+2+3 Punkte

a) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $xy = x + y + 3$ erfüllen.

b) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $x^2 = 14 + y^2$ erfüllen.

c) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $x^2 - 7y = 1$ erfüllen.

d) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = y^2$ erfüllen.

Begründet eure Antworten. Falls es für eine Gleichung keine ganzen Zahlen geben sollte, die diese erfüllen, so ist dies zu beweisen.

Aufgabe 3

2+2+2+4 Punkte

a) Konstruiert alle rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenuse 10 Zentimeter lang ist und deren Höhe, gemessen von der Hypotenuse, 6 Zentimeter misst. Beweist, dass es keine weiteren Dreiecke mit dieser Eigenschaft gibt als die von euch angegebenen.

b) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Länge 10 Zentimeter und wird von ihrer Höhe im Verhältnis 9 zu 1 geteilt. Berechnet die Länge der Höhe.

c) Sei $x > 0$ eine reelle Zahl. In der Ebene seien eine Strecke der Länge 1 Zentimeter und eine Strecke der Länge x^2 Zentimeter gegeben. Beschreibt, wie sich daraus eine Strecke der Länge x Zentimeter nur mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt!

d) In einem (nicht notwendigerweise rechtwinkligen) Dreieck ist die Höhe h_a 12 Zentimeter lang, die Höhe h_b ist 20 Zentimeter lang. Beweist für die verbleibende Höhe h_c, dass ihre Länge größer als 7,5 und kleiner als 30 Zentimeter ist.

Aufgabe 4

7+3 Punkte

Der Wannsee ist ein beliebtes Ausflugsziel. An Wochenenden wird die Fähre der BVG, die zwischen der S-Bahn-Station Wannsee und Alt-Kladow verkehrt, daher gerne von Jung und Alt genutzt. Aufgrund der großen Nachfrage setzt die BVG heute eine zusätzliche Fähre ein, die mit einer anderen Geschwindigkeit als die andere Fähre verkehrt. Beide bewegen sich allerdings mit konstanter Geschwindigkeit fort und legen stets dieselbe Distanz d zwischen den Anlegestellen zurück.

Die beiden Schiffe verlassen gleichzeitig die Anlegestellen an der S-Bahn-Haltestelle Wannsee beziehungsweise in Alt-Kladow. Sie treffen sich zum ersten Mal, wenn sie 1,8 Kilometer von Alt-Kladow entfernt sind. An den Anlegestellen hält jede Fähre zehn Minuten, um Fahrgäste aus- und einsteigen zu lassen, und kehrt dann zurück. Auf dem Rückweg treffen sich die beiden Schiffe erneut, nun sind sie 1 Kilometer von der Anlegestelle an der S-Bahn-Station Wannsee entfernt.

a) Berechnet aus den obigen Angaben die Distanz d zwischen den beiden Anlegestellen.

b) Berechnet außerdem das Verhältnis der Geschwindigkeiten der beiden Schiffe zueinander.

23. Berliner Tag der Mathematik

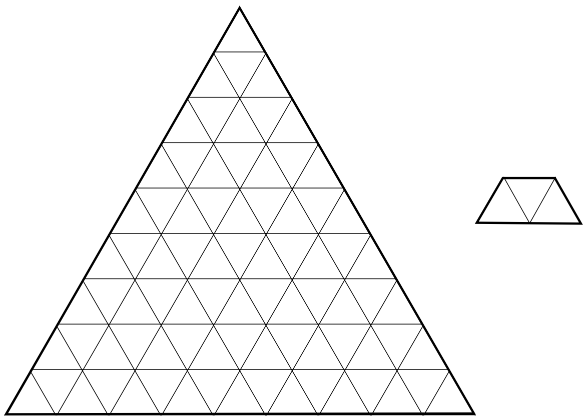
Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 11–13

21. April 2018

Aufgabe 1

10 Punkte

Gegeben sei ein Fußboden in Form eines gleichseitigen Dreieckes der Seitenlänge n. Der Fußboden soll nun so mit trapezförmigen Fliesen mit den Seiten 1-1-1-2 überdeckt werden, dass keine Lücken entstehen und sich keine Fliesen überschneiden. Die Fliesen dürfen dabei gedreht, aber nicht zugeschnitten werden. Bestimmt alle positiven ganzen Zahlen n, für die das Fliesen des Fußbodens möglich ist!



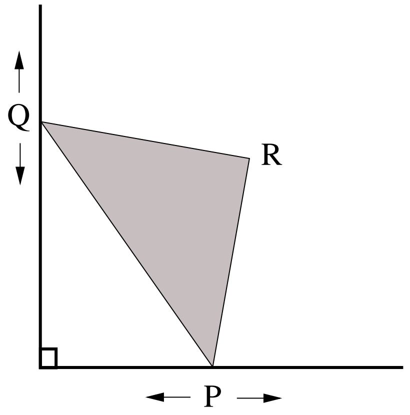
Dreieckiger Fußboden und trapezförmige Fliese

Aufgabe 2

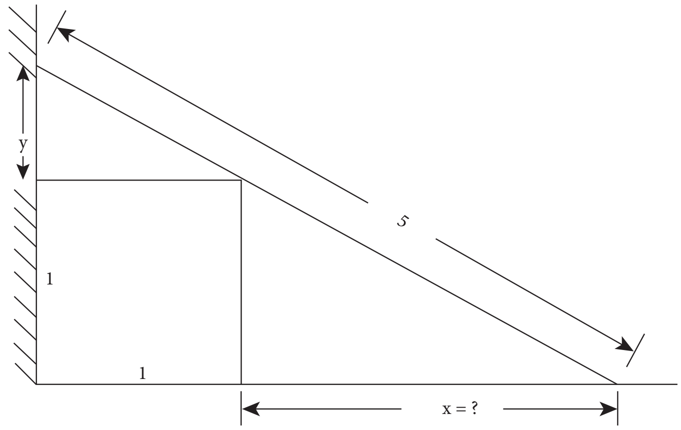
5+5 Punkte

a) Die spitzen Ecken P und Q eines Geodreiecks (das heißt, eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks) haben den Abstand 1 und gleiten entlang zweier benachbarter Seiten eines rechteckigen Tisches (siehe Abbildung). Bestimmt die Bahn, die die rechtwinklige Ecke R des Geodreiecks beschreibt!

b) Eine fünf Meter lange Leiter lehnt so an einer Wand, dass sie eine würfelförmige Kiste von einem Meter Kantenlänge berührt, die direkt an der Wand steht (siehe Abbildung). In welchem Abstand steht der Fuß der Leiter zu der Kiste? (Wenn es mehr als eine Lösung gibt, sind alle anzugeben.)



(a) Geodreieck auf dem Tisch



(b) Leiter an der Wand

Aufgabe 3

10 Punkte

Gegeben sei ein quadratisches 20×20-Gitter. Dieses kleben wir so auf einen Zylindermantel, dass der rechte und der linke Rand genau zusammenstoßen.

Ein 1×1-Teilquadrat nennen wir *Karte*. Zwei Karten heißen *benachbart*, wenn sie auf dem Zylinder eine gemeinsame Kante haben. Jede Karte der obersten und der untersten Reihe des Gitters hat dann genau drei Nachbarn (rechts, links und unten beziehungsweise oben), alle anderen Karten haben vier Nachbarn (rechts, links, unten und oben).

7	14	1	13
9	16	5	10
2	6	3	15
12	11	8	4

4×4-Gitter auf einem Zylinder: Karte 7 ist mit den Karten 9, 13 und 14, Karte 9 mit 2, 7, 10 und 16, Karte 2 mit 6, 9, 12 und 15 und Karte 12 mit den Karten 2, 4 und 11 benachbart

Ein *Atlas* ist eine Nummerierung der Karten des 20×20-Gitters mit den Zahlen von 1 bis 400, sodass jede Zahl genau einmal vorkommt. Mit D bezeichnen wir die größte auftretende Differenz zwischen den Zahlen zweier benachbarter Karten. Im 4×4-Gitter in der Abbildung sind die Karten mit den Nummern 1 und 16, 2 und 16 sowie 1 und 15 nicht benachbart, die Karten mit den Nummern 2 und 15 dagegen schon. Im Beispiel gilt daher $D = 15 - 2 = 13$.

a) Beweist, dass für jeden Atlas des 20×20-Gitters $D \geq 14$ gilt.

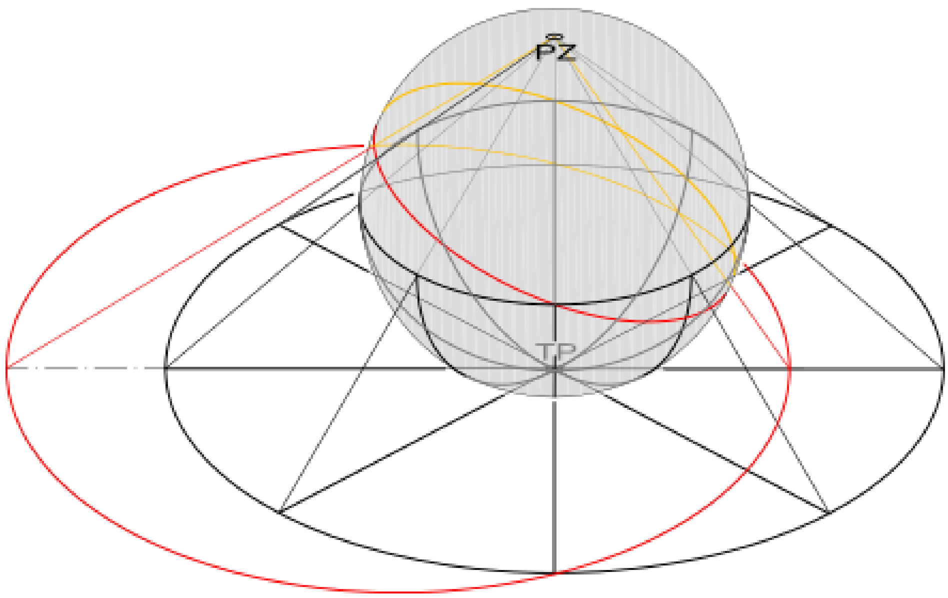
b) Findet einen Atlas des 20×20-Gitters, bei dem die größte auftretende Differenz D zweier benachbarter Karten gleich 20 ist.

c) Zeigt, dass für jeden Atlas des 20×20-Gitters sogar $D \geq 20$ gilt, das heißt, dass euer Atlas aus Aufgabe b) sogar optimal ist.

Hinweis: Natürlich folgt der einfachere Aufgabenteil a) aus dem schwierigeren Teil c). Wenn ihr dies als Lösung für den Aufgabenteil a) schreibt, bekommt ihr die vier Punkte dafür aber nur dann, wenn ihr im Aufgabenteil c) die volle Punktzahl erhaltet.

Bemerkung: Die in der Kartografie häufig verwendete *Mercator-Projektion* bildet die Erdoberfläche winkeltreu auf einen Zylinder ab. Ein Teilquadrat auf dem Zylinder entspricht dann einer Karte, und ein Atlas bringt diese Karten in eine bestimmte Reihenfolge. Wenn ihr eine Seite im Atlas aufschlagt und nach der Fortführung einer Karte an ihrem Rand sucht, müsst ihr manchmal nur auf die Nachbarseite schauen oder nur einmal umblättern, manchmal müsst ihr mehrere Seiten durchblättern. In der obigen Aufgabe findet ihr heraus, wie viele Seiten ihr im schlimmsten Fall in jedem Atlas durchblättern müsst, wenn ihr nach zwei benachbarten Karten schaut.

Die erste winkeltreue Karte wurde übrigens schon in der Antike entdeckt. Es handelt sich dabei um die *stereographische Projektion*. Diese Projektion bildet die Kugeloberfläche vom Projektionszentrum aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene wie folgt ab: Zwei Punkte sind Urbild und Bild genau dann, wenn sie und das Projektionszentrum auf einer Geraden liegen. Diese Abbildung ist nicht nur winkeltreu, sie bildet auch Kreise auf der Kugeloberfläche, die nicht durch das Projektionszentrum gehen, auf Kreise in der Ebene ab.



Stereographische Projektion (Lizenz: creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/, Original: commons.wikimedia.org/wiki/File:Stereographic_projection.svg von Analemma)

Aufgabe 4

3+2+2+3 Punkte

Im Folgenden betrachten wir eine endliche Zahl n von Münzen, die alle flach auf einem Tisch liegen. Insbesondere überlappen sich keine zwei Münzen, berühren können sie sich aber. In den ersten beiden Aufgabenteilen betrachten wir gleich große 1-Euro-Münzen, in den letzten beiden Aufgabenteilen dürfen die Münzen verschiedene Größen haben.

a) Ist es für jede natürliche Zahl n und für jede Anordnung von n 1-Euro-Münzen möglich, eine Münze zu finden, die nicht mehr als drei andere Münzen berührt?

b) Gibt es eine Anzahl n von 1-Euro-Münzen und eine geeignete Anordnung von ihnen, sodass jede Münze genau drei andere Münzen berührt?

c) Gibt es eine Anzahl n von nicht notwendigerweise gleich großen Münzen und eine geeignete Anordnung von ihnen, sodass jede Münze genau fünf andere Münzen berührt?

d) Gibt es eine Anzahl n von nicht notwendigerweise gleich großen Münzen und eine geeignete Anordnung von ihnen, sodass jede Münze sechs oder mehr andere Münzen berührt?

Eure Antworten sind zu begründen.

Hinweis: Die vier Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden und sind nicht nach Schwierigkeit sortiert. Falls die Antwort auf einen der Aufgabenteile b) bis d) Ja lautet, so ist für jenen Aufgabenteil natürlich nur eine Anzahl n und eine Anordnung von Münzen anzugeben, für die die gesuchte Eigenschaft erfüllt ist.