23. Berliner Tag der Mathematik

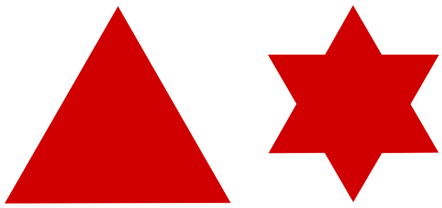
Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 7–8

21. April 2018

Aufgabe 1

10 Punkte

Mohamed backt Kekse. Dazu verwendet er zwei Ausstechformen: ein gleichseitiges Dreieck und einen gleichseitigen sechseckigen Stern wie in der Abbildung.

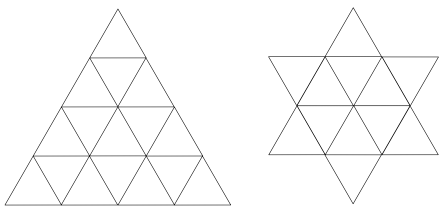


Mohameds Ausstechformen

Beide Formen haben den gleichen Umfang. Die Kekse aus der dreieckigen Form haben einen Flächeninhalt von jeweils 4 Quadratzentimetern. Wie groß ist dann die Fläche eines sternförmigen Kekses? Eure Antwort ist zu begründen.

Lösung

Ist a die Seitenlänge des Sterns, so ist $12a$ sein Umfang. Da beide Formen den gleichen Umfang haben, ist die Seitenlänge des Dreiecks $4a$. Die Abbildung zeigt, wie das Dreieck in 16 gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge a und der Stern in 12 gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge a zerlegt werden kann.



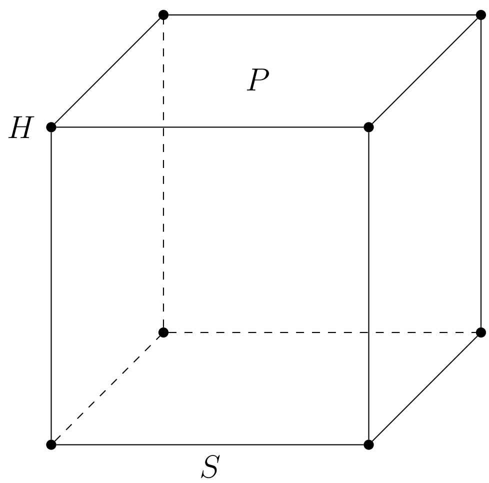
Zerlegung des Dreiecks und des Sterns in kongruente gleichseitige Dreiecke

Das Verhältnis der Flächeninhalte des Sterns und des Dreiecks ist daher 3:4. Die sternförmigen Kekse haben damit einen Flächeninhalt von 3 Quadratzentimetern. □

Aufgabe 2

3+3+4 Punkte

Die Stadt Metropolis ist ein Würfel, dessen Ecken Häuser, dessen Kanten Straßen und dessen Seitenflächen Plätze sind. In der Abbildung wird exemplarisch das Haus H, die Straße S und der Platz P dargestellt.



Stadtplan von Metropolis

a) Die Bewohnerinnen von Metropolis möchten ihre Häuser so mit den Zahlen von 1 bis 8 nummerieren, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und für jeden Platz die Summe der Hausnummern der vier angrenzenden Häuser stets dieselbe Zahl k ist. Findet heraus, was k ist! Eure Antwort ist zu begründen. Gebt außerdem eine Nummerierung der Häuser an, die diese Eigenschaft erfüllt.

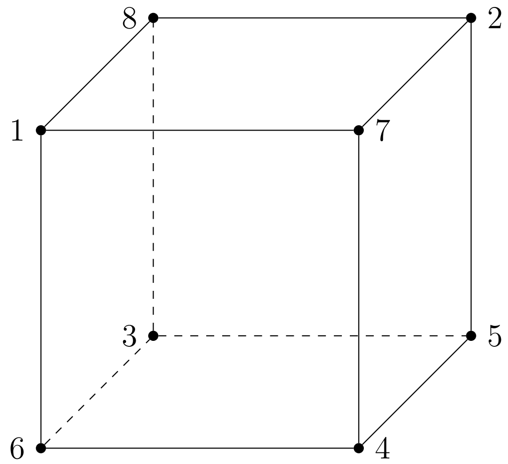
b) Nun möchten die Einwohnerinnen auch ihre Straßen so mit den Zahlen von 1 bis 12 nummerieren, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und sich für jeden Platz die Nummern der vier angrenzenden Straßen zu der stets gleichen Zahl l summieren. Findet heraus, was l ist, begründet eure Antwort, und gebt eine entsprechende Nummerierung der Straßen an.

c) Die Stadtverwaltung von Metropolis beschließt, dass die Häuser so in jeweils einer Farbe gestrichen werden sollen, dass zwei durch eine Straße verbundene Häuser verschiedene Farben haben. Die Stadtverwaltung beauftragt Dr. Mabuse damit, jedem Haus zwei Farbeimer mit verschiedenen Farben zu bringen. Allerdings liegt Dr. Mabuse mit der Verwaltung im Streit und möchte ihren Plan durchkreuzen. Kann ihm das gelingen?

Falls ja, gebt eine Verteilung von je zwei Farben auf die Häuser an und begründet, dass es bei jeder Auswahl aus diesen Farben stets zwei durch eine Kante verbundene Ecken geben wird, die gleich gefärbt sind; falls nicht, beweist, dass die Bewohnerinnen von Metropolis bei jeder Lieferung von Farbeimern ihre Häuser so färben können, dass je zwei durch eine Straße verbundene Häuser verschieden gefärbt sind.

Lösung

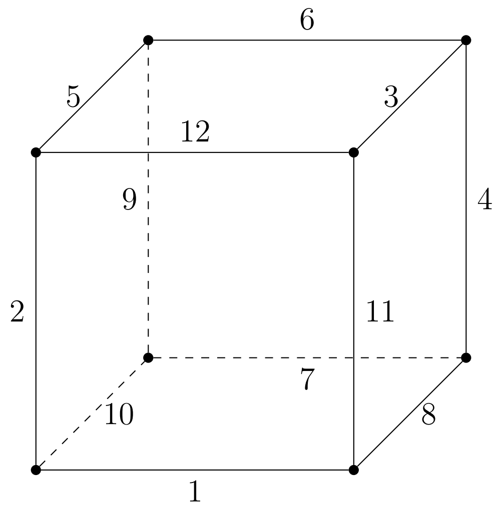
a) Die Summe aller Hausnummern ist $1 + 2 + \ldots + 8 = 4 \cdot 9 = 36$. Jedes Haus gehört zu drei Plätzen, folglich ist die Summe der Zahlen auf den Plätzen, $6k$, gleich dreimal 36 und k damit gleich $3 \cdot 36/6 = 18$.



Zulässige Nummerierung der Häuser

Um zu einer möglichen Nummerierung zu gelangen, schreiben wir die kleinste Zahl 1 an ein Haus und die drei größten Zahlen 6, 7 und 8 an die drei benachbarten Häuser. Durch die Bedingung, dass sich die Hausnummern an jedem Platz zu 18 summieren, erhalten wir die Hausnummern von drei weiteren Häusern: 2, 3 und 4. Für das verbleibende Haus bleibt die Hausnummer 5 über. In der Tat summieren sich dann die Hausnummer an jedem Platz zu 18. Die Abbildung zeigt die Verteilung der Hausnummern, die wir dadurch erhalten.

b) Die Summe aller Straßennummern ist $1 + 2 + \ldots + 12 = 6 \cdot 13 = 78$. Jede Straße gehört zu zwei Plätzen, folglich ist die Summe der Zahlen auf den Plätzen, $6l$, gleich zweimal 78 und l damit gleich $2 \cdot 78/6 = 26$.



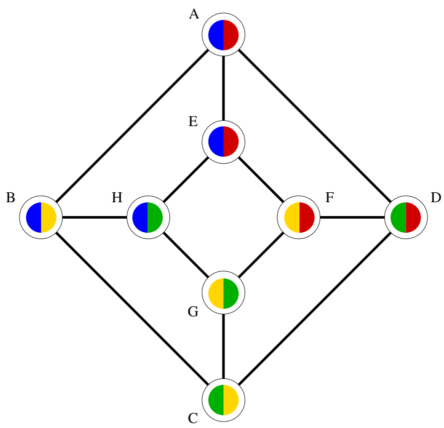
Zulässige Nummerierung der Straßen

Um eine mögliche Nummerierung zu finden, verteilen wir die beiden kleinsten und die beiden größten Zahlen 1, 2, 11 und 12 auf die Straßen eines Platzes $(1+2+11+12 = 26)$. Dabei seien 1 und 2 sowie 11 und 12 benachbart, sodass es eine Straße gibt, die zu den Straßen 1 und 2 benachbart ist und die drittgrößte Nummer 10 bekommt, und eine, die zu den Straßen 11 und 12 benachbart ist und die drittkleinste Nummer 3 erhält. Weiterhin liege die größte Zahl 12 der kleinsten Zahl 1 gegenüber.

Wir haben nun vier Plätze, bei denen jeweils zwei angrenzende Straßen schon über eine Nummer verfügen. Die Zahlen summieren sich zu 11, 14, 15 und 12, wobei sich die ersten beiden und die letzten beiden Plätze jeweils eine unnummerierte Straße teilen, die beiden anderen Straßen sind jene mit den Nummern 3 und 10. Die verbleibenden Nummern 4, 5, 6, 7, 8 und 9 müssen nun so verteilt werden, dass sie sich auf diesen Plätzen zu 15, 12, 11 beziehungsweise 14 summieren. Um 15 auf dem ersten Platz zu erhalten, gibt es nur die Möglichkeiten $15 = 9 + 6$ und $15 = 8 + 7$. Der zweite Platz teilt eine unnummerierte Straße mit dem ersten Platz. Stünde die 9 oder 6 auf dieser Straße, so müsste die andere Straße mit 3 beziehungsweise 6 nummeriert sein, doch diese Nummern sind (dann) bereits vergeben. Folglich sind die Nummern der verbleibenden Straßen des ersten Platzes mit 8 und 7 nummeriert.

Die Nummer 9 muss nun auf eine der Straßen der letzten beiden Plätze stehen. Auf dem Platz, an dem noch 11 zur Summe 26 fehlen, kann sie offenbar nicht stehen, da $11 = 9+2$ und die 2 schon vergeben ist. Folglich tragen die verbleibenden zwei Straßen des vierten Platzes, an dem noch 14 zur Summe 26 fehlen, die Nummern 9 und 5, wobei die mit dem dritten Platz geteilten Straße mit 5 nummeriert ist. Die vierte Straße des vierten Platzes trägt dann die Nummer 6. Für den zweiten Platz bleibt dann nur noch die 4 übrig, sodass mit $12 = 4+8$ die Nummer 8 auf die Straße zwischen dem ersten und dem zweiten Platz vergeben wird. Die Straßen des noch nicht betrachteten Platzes tragen also die Nummern 9, 6, 4 und 7, welche sich zu 26 summieren. Die Abbildung zeigt die erhaltene zulässige Verteilung der Straßennummern.

c) Dr. Mabuse kann den Plan der Stadtverwaltung durchkreuzen. Eine Zuordnung von Farbeimern, bei der die Bewohnerinnen von Metropolis ihre Häuser nicht wie gewünscht anstreichen können, zeigt die folgende Abbildung:



Dr. Mabuses Verteilung von Farbeimern

Wenn das Haus A in blauer Farbe gestrichen wird, dann sind die folgenden Farbwahlen laut Vorschrift der Stadtverwaltung erzwungen:

$$\begin{aligned} B &\to \text{ gelb,} \\ C &\to \text{ grün,} \\ D &\to \text{ rot,} \\ F &\to \text{ gelb,} \\ G &\to \text{ grün.} \end{aligned}$$

Jetzt sind aber die Häuser C und G beide grün, obwohl sie durch eine Straße verbunden sind. Daher kann das Haus A nicht blau sein.

Wenn das Haus A dagegen in roter Farbe angemalt wird, dann sind die folgenden Farbwahlen erzwungen:

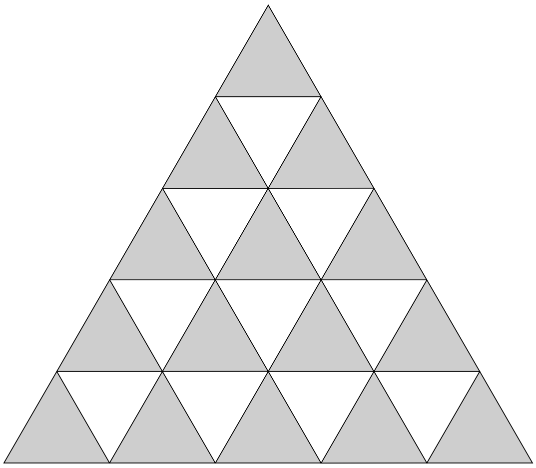
$$\begin{aligned} \text{D} &\rightarrow \text{ grün,} \\ \text{C} &\rightarrow \text{ gelb,} \\ \text{B} &\rightarrow \text{ blau,} \\ \text{H} &\rightarrow \text{ grün,} \\ \text{G} &\rightarrow \text{ gelb.} \end{aligned}$$

Nun sind die Häuser C und G beide gelb. Folglich kann dem Wunsch der Stadtverwaltung mit dieser Auswahl an Farben nicht entsprochen werden. □

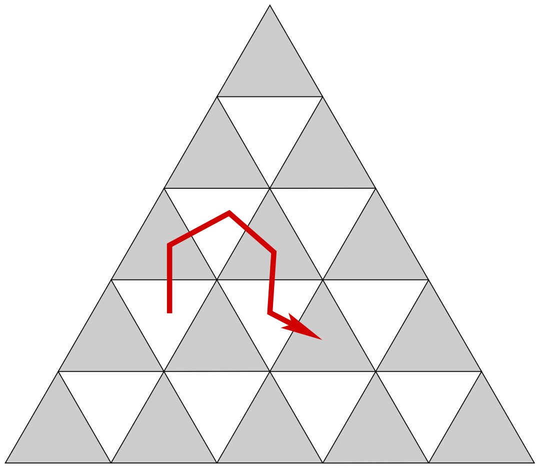
Aufgabe 3

3+7 Punkte

Ein gleichseitiges Dreieck D der Seitenlänge 15 ist durch Geraden, die parallel zu den Seiten von D sind, in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 zerlegt. Diese kleinen Dreiecke nennen wir Zellen. (Die Abbildung zeigt den Fall für ein Dreieck der Seitenlänge 5.)



(a) Aufteilung eines Dreiecks der Seitenlänge 5



(b) Erlaubter Weg durch die Zellen

a) Wie viele dreieckige Zellen gibt es? Begründet eure Antwort.

b) Eine Besucherin betritt das Dreieck D mit der Kantenlänge 15 über eine der drei Eckzellen und will möglichst viele Zellen des Dreiecks betreten. Dabei darf sie von einer Zelle aus als nächstes nur in eine Zelle gehen, die mit dieser eine Kante gemeinsam hat. Ist die Besucherin also in einem Eckdreieck, so kann sie nur zu einem einzigen Nachbardreieck weiterlaufen. Für die übrigen Randdreiecke könnte sie jeweils zu zwei Nachbardreiecken weiterlaufen; lediglich für die inneren Zellen gibt es genau drei Nachbarzellen.

Nun wurde der Besucherin verboten, irgendeine Zelle mehr als einmal zu betreten. Erklärt, wie viele Zellen die Besucherin unter dieser Bedingung höchstens besuchen kann.

Lösung

a) Es sind $1+3+5+7+\ldots+(2\cdot 15-1) = 2\cdot(1+2+\ldots+15)-15 = 2\cdot 8\cdot 15-15 = 15^2 = 225$ Dreiecke.

b) Wir färben das Dreieck schachbrettartig wie in der Abbildung. In jeder der 15 Reihen gibt es dann jeweils ein schwarzes Dreieck mehr als ein weißes. Folglich gibt es $15 \cdot (15-1)/2 = 105$ weiße und $15 \cdot (15+1)/2 = 120$ schwarze Zellen. Da die Besucherin abwechselnd schwarze und weiße Felder besucht, kann sie höchstens $2 \cdot 105 + 1 = 211$ Felder besuchen, wenn sie mit einer schwarzen Zelle beginnt. Wenn sie sukzessive alle Dreiecke einer Reihe bis auf eines durchschreitet und anschließend die Reihe wechselt, besucht sie insgesamt 211 Zellen. □

Aufgabe 4

3+4+3 Punkte

a) Kathi spielt mit (fünfstelligen) Postleitzahlen. Von einer beliebigen Postleitzahl zieht sie die Zahl in umgekehrter Ziffernreihenfolge ab. Dabei beobachtet sie, dass das Ergebnis stets durch 99 teilbar ist, egal, mit welcher Zahl sie startet. Zum Beispiel ist $10623 - 32601 = -21978 = -99 \cdot 222$. Beweist ihre Beobachtung!

b) Nun stellt Kathi eine Tabelle mit zwei Zeilen und neun Spalten auf und schreibt in jede der beiden Zeilen die Zahlen von 1 bis 9 in beliebiger Reihenfolge. In jeder der neun Spalten subtrahiert sie die untere von der oberen Zahl und bildet dann das Produkt aller neun Differenzen. Egal, in welcher Reihenfolge genau Kathi die Zahlen zu Beginn in die Tabelle schreibt, das Produkt ist immer eine gerade Zahl. Begründet dies.

3	2	1	6	4	5	8	9	7
1	6	4	3	9	8	2	7	5

(b) In der Beispieltabelle ist das Produkt der Differenzen gleich 25920

c) Kathi geht einen Schritt weiter. Sie denkt sich zwei natürliche Zahlen $b > a \geq 1$ aus und stellt nun eine Tabelle mit zwei Zeilen und $b-a$ Spalten auf. In die erste Zeile trägt sie hintereinander die Zahlen $a+1, a+2, \ldots, a+(b-a)$ und in die zweite Zeile hintereinander die Zahlen $b+1, b+2, \ldots, b+(b-a)$ ein. Sie bemerkt, dass es für ihre spezielle Wahl von a und b keine Spalte in der Tabelle gibt, in der die beiden Zahlen einen gemeinsamen Teiler haben.

Wie viele Spalten hat Kathis Tabelle? Beweist, dass sich die Differenz $b-a$ eindeutig aus Kathis Beobachtung der Teilerfremdheit der beiden Zahlen jeder Spalte ermitteln lässt!

$a+1$	$a+2$	$\cdots$	$\cdots$	$a+(b-a)$
$b+1$	$b+2$	$\cdots$	$\cdots$	$b+(b-a)$

(c) Kathis neue Tabelle mit $b-a$ Spalten

Lösung

a) In Dezimaldarstellung gilt:

$$abcde - edcba = 9999(a-e) + 990(b-d) = 99 \cdot (101\,(a-e) + 10\,(b-d))\,.$$

b) Wir benötigen zwei einfache Feststellungen:

(i) Ein Produkt ist genau dann gerade, wenn einer der Faktoren gerade ist.

Also genügt es zu zeigen, dass mindestens eine der neun Differenzen zweier Spalteneinträge gerade ist.

(ii) Eine Differenz oder Summe ist genau dann gerade, wenn die beiden beteiligten Zahlen gerade oder beide ungerade sind.

Die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ enthält vier gerade und fünf ungerade Zahlen. Daher ist es unvermeidbar, dass zumindest eine ungerade Zahl in der unteren Zeile unter eine ungerade Zahl in der oberen Zeile geschrieben wird. Die Differenz zu dieser Spalte ist dann der gesuchte gerade Faktor.

c) Die Differenz der zweiten von der ersten Zahl einer Spalte der Tabelle ist stets gleich $b - a$. Wenn zwei Zahlen c und d einen gemeinsamen Teiler e haben, so teilt e auch die Differenz $c - d$. Aus der Voraussetzung der Teilerfremdheit der Einträge jeder Spalte folgt daher, dass $b - a$ keine gemeinsamen Teiler mit den $b - a$ aufeinanderfolgenden Zahlen von $a + 1$ bis b hat, die in der ersten Reihe der Tabelle stehen. Unter $b - a$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist aber stets eine dabei, die von $b - a$ geteilt wird. $b - a > 1$ würde dann zu einem Widerspruch führen, da $b - a$ ein echter Teiler von einer der Zahlen von $a + 1$ bis b wäre. Folglich ist $b - a = 1$. □

23. Berliner Tag der Mathematik

Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 9–10

21. April 2018

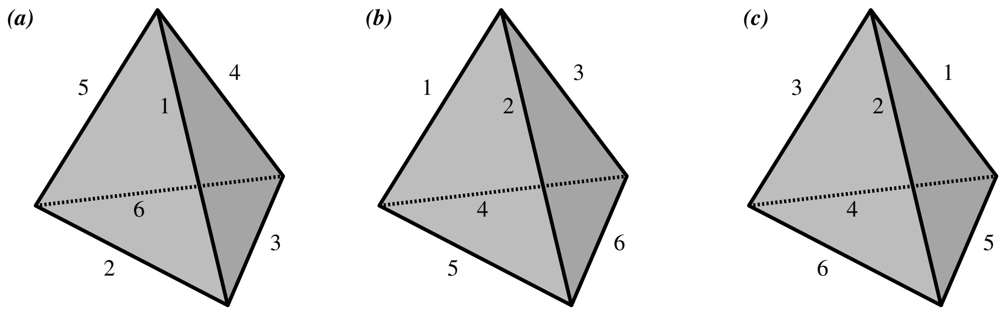
Aufgabe 1

5+5 Punkte

Büşra möchte ihren Freundinnen eine Freude machen und fertigt bunte Tetraeder aus Papier an. Die Tetraeder sind alle identisch und regulär, das heißt, dass alle Kanten der jeweils vier dreieckigen Seitenflächen gleich lang sind. Ihr stehen die sechs Farben Blau, Grün, Türkis, Rot, Orange und Violett zur Verfügung. Büşra ist es wichtig, dass keine zwei Freundinnen gleich bemalte Tetraeder bekommen, es soll also nicht möglich sein, zwei ihrer Exemplare durch eine Drehung ineinander überführen zu können.

a) Dieses Jahr bemalt Büşra die Seitenflächen der Tetraeder so in jeweils einer Farbe, dass keine zwei Seitenflächen eines Tetraeders dieselbe Farbe haben. Wie viele verschiedene Tetraeder kann sie für ihre Freundinnen höchstens herstellen? Euer Lösungsweg ist anzugeben.

b) Nächstes Jahr bemalt Büşra die Kanten der Tetraeder so in jeweils einer Farbe, dass keine zwei Kanten eines Tetraeders dieselbe Farbe haben. Wie viele verschiedene Tetraeder kann sie dann höchstens herstellen? Stellt auch hier euren Lösungsweg dar.



Kantenfärbungen von regulären Tetraedern

Beispiel: Die Kantenfärbungen (a) und (b) in der Abbildung liefern identische Tetraeder, aber (c) zeigt eine andere Kantenfärbung.

Lösung

a) Zunächst sucht sich Büşra vier aus den sechs Farben aus, um die vier Seitenflächen eines Tetraeders zu bemalen. Äquivalent sucht sie sich zwei Farben aus, die nicht vorkommen. Für die erste Farbe f_6 hat sie sechs, für die zweite Farbe f_5 noch fünf Möglichkeiten. Allerdings spielt die Reihenfolge, in der die beiden Farben gewählt werden, keine Rolle, sodass (f_5, f_6) und (f_6, f_5) nur als eine Möglichkeit zählen. Büşra hat also $6 \cdot 5/2 = 15$ Möglichkeiten, sich vier Farben auszusuchen.

Wir betrachten alle möglichen Tetraeder, die mit den Farben f_1, f_2, f_3, f_4 gefärbt sind. Wir können die Tetraeder stets auf ihre Seitenfläche mit der Farbe f_1 stellen. Nun können wir die Tetraeder so drehen, dass f_1 weiterhin unten und f_2 zudem auf der nach vorne zeigenden Seitenfläche zu sehen ist. Für die Färbung der verbleibenden zwei Flächen mit den Farben f_3 und f_4 gibt es nur zwei Möglichkeiten, die durch Drehung nicht ineinander überführt werden können.

Insgesamt kann Büşra höchstens $15 \cdot 2 = 30$ Tetraeder für ihre Freundinnen herstellen.

b) Zunächst betrachten wir alle möglichen Bilder eines kantengefärbten Tetraeders, das heißt, dass wir auch die in (a) und (b) gezeigten Bilder als verschieden betrachten.

Färbt Büşra die Kanten $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ der Reihe nach mit den sechs zur Verfügung stehenden Farben, dann gibt es für k_1 sechs Möglichkeiten, für k_2 noch fünf Möglichkeiten, für k_4 gibt es vier Möglichkeiten und so weiter, insgesamt hat sie also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Möglichkeiten.

Wir gehen nun von diesen 720 Bildern aus und überlegen, wie viele Bilder jeweils die gleiche Färbung des Tetraeders zeigen. Wir können jede der vier Seiten des Tetraedes als die Grundseite wählen. Ist die Grundseite festgelegt, dann kann noch jede der drei Ecken der Grundseite als die vordere gewählt werden. Insgesamt erhalten wir so $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten das Tetraeder zu positionieren, jede dieser Möglichkeiten liefert ein anderes Bild.

Da von den 720 Bildern jeweils 12 die gleiche Färbung des Tetraeders zeigen, gibt es $720/12 = 60$ verschiedene Färbungen der Kanten des Tetraeders, die Büşra verwenden kann. □

Aufgabe 2

3+2+2+3 Punkte

a) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $xy = x + y + 3$ erfüllen.

b) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $x^2 = 14 + y^2$ erfüllen.

c) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $x^2 - 7y = 1$ erfüllen.

d) Findet alle ganzen Zahlen x und y, die die Gleichung $x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = y^2$ erfüllen.

Begründet eure Antworten. Falls es für eine Gleichung keine ganzen Zahlen geben sollte, die diese erfüllen, so ist dies zu beweisen.

Lösung

a) Umstellen liefert die äquivalente Gleichung $4 = xy - x - y + 1 = (x-1) \cdot (y-1)$. Da sich 4 bis auf Vorzeichen nur als Produkt von zwei Zweien oder einer Vier und einer Eins darstellen lässt, erhalten wir die Lösungen $x = 5, y = 2$; $x = 2, y = 5$; $x = 0, y = -3$; $x = -3, y = 0$; $x = y = 3$; $x = y = -1$.

b) Umstellen liefert $(x-y)\cdot(x+y) = 14$. Modulo Vorzeichen lässt sich 14 nur als Produkt von einer Zwei und einer Sieben sowie einer Eins und einer Vierzehn darstellen. Insbesondere haben $x-y$ und $x+y$ verschiedene Parität, sodass die Summe $2x$ ungerade ist. Folglich kann es keine ganzzahligen Lösungen geben.

c) Schreiben wir $x = 7k + r$ mit einer ganzen Zahl k und r zwischen -3 und 3, so liefern einfache Rechnungen, dass nur für $r = \pm 1$ Lösungen existieren. Es ergeben sich die Lösungen $x = 7k \pm 1, y = 7k^2 \pm 2k$ mit einer beliebigen ganzen Zahl k.

d) Es gilt $y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)(x^2+3x+2)$. Für $y = 0$ erhalten wir die trivialen Lösungen $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$. Wir wollen zeigen, dass es keine weiteren gibt. Wegen $x^2 + 3x = x(x+3)$ ist diese Zahl stets gerade. Daher ist $a := (x^2+3x)/2$ eine ganze Zahl und es gilt $y^2 = 4a(a+1)$. Da wir $y = 0$ sowie $-3 \leq x \leq 0$ schon behandelt haben, gilt $y \neq 0$ und $x \leq -4$ oder $x > 0$. In jedem Fall ist $a > 0$.

Da a und $a+1$ teilerfremd und positiv sind, müssen wegen $y^2 = 4a(a+1)$ sowohl a als auch $a+1$ positive Quadratzahlen sein. Da es keine aufeinanderfolgenden positiven Quadratzahlen gibt, gibt es daher keine weiteren Lösungen. □

Aufgabe 3

2+2+2+4 Punkte

a) Konstruiert alle rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenuse 10 Zentimeter lang ist und deren Höhe, gemessen von der Hypotenuse, 6 Zentimeter misst. Beweist, dass es keine weiteren Dreiecke mit dieser Eigenschaft gibt als die von euch angegebenen.

b) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Länge 10 Zentimeter und wird von ihrer Höhe im Verhältnis 9 zu 1 geteilt. Berechnet die Länge der Höhe.

c) Sei $x > 0$ eine reelle Zahl. In der Ebene seien eine Strecke der Länge 1 Zentimeter und eine Strecke der Länge x^2 Zentimeter gegeben. Beschreibt, wie sich daraus eine Strecke der Länge x Zentimeter nur mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt!

d) In einem (nicht notwendigerweise rechtwinkligen) Dreieck ist die Höhe h_a 12 Zentimeter lang, die Höhe h_b ist 20 Zentimeter lang. Beweist für die verbleibende Höhe h_c, dass ihre Länge größer als 7,5 und kleiner als 30 Zentimeter ist.

Lösung

a) Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist die Hypotenuse Durchmesser des Umkreises. Da die Höhe auf die Hypotenuse höchstens so groß wie der Umkreisradius, also 5 Zentimeter, sein kann, existiert kein solches Dreieck.

b) Sei x die Länge der Höhe in Zentimetern. Nach zweifacher Anwendung des Satzes des Pythagoras gilt $(x^2 + 1^2) + (x^2 + 9^2) = 10^2$, also $2x^2 = 100 - 81 - 1 = 18$ und damit $x = 3 = \sqrt{9}$.

c) Wenn wir in b) eine Hypotenuse der Länge $x^2 + 1$ Zentimeter nehmen und sie im Verhältnis $x^2 : 1$ teilen, so ist die Höhe nach einer analogen Rechnung genau x Zentimeter lang.

Die Konstruktionsvorschrift lautet nun wie folgt: Zunächst tragen wir die Strecke der Länge 1 Zentimeter an die Strecke der Länge x^2 Zentimeter an. Wir errichten einen Thaleskreis über der Strecke s der Länge x^2+1 Zentimeter und errichten eine Senkrechte über dem Punkt, der s im Verhältnis x^2 zu 1 teilt. Da Mittelpunkte und Senkrechten allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, können wir die Höhe aus Aufgabe b) nur mit Zirkel und Lineal konstruieren. Diese hat, wie oben beschrieben, die gesuchte Länge x Zentimeter.

d) Sei F der Flächeninhalt des Dreieckes. Dann gilt

$$a = \frac{2F}{h_a}, b = \frac{2F}{h_b} \text{ und } c = \frac{2F}{h_c}.$$

Wir erhalten daraus das Verhältnis

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt $a + b > c$ und $c > a - b$. Folglich

$$\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{2}{15},$$

woraus $h_c > 7,5$ folgt. Des Weiteren gilt

$$\frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{1}{30},$$

sodass $h_c < 30$. □

Aufgabe 4

7+3 Punkte

Der Wannsee ist ein beliebtes Ausflugsziel. An Wochenenden wird die Fähre der BVG, die zwischen der S-Bahn-Station Wannsee und Alt-Kladow verkehrt, daher gerne von Jung und Alt genutzt. Aufgrund der großen Nachfrage setzt die BVG heute eine zusätzliche Fähre ein, die mit einer anderen Geschwindigkeit als die andere Fähre verkehrt. Beide bewegen sich allerdings mit konstanter Geschwindigkeit fort und legen stets dieselbe Distanz d zwischen den Anlegestellen zurück.

Die beiden Schiffe verlassen gleichzeitig die Anlegestellen an der S-Bahn-Haltestelle Wannsee beziehungsweise in Alt-Kladow. Sie treffen sich zum ersten Mal, wenn sie 1,8 Kilometer von Alt-Kladow entfernt sind. An den Anlegestellen hält jede Fähre zehn Minuten, um Fahrgäste aus- und einsteigen zu lassen, und kehrt dann zurück. Auf dem Rückweg treffen sich die beiden Schiffe erneut, nun sind sie 1 Kilometer von der Anlegestelle an der S-Bahn-Station Wannsee entfernt.

a) Berechnet aus den obigen Angaben die Distanz d zwischen den beiden Anlegestellen.

b) Berechnet außerdem das Verhältnis der Geschwindigkeiten der beiden Schiffe zueinander.

Lösung

a) Wenn sich die Schiffe zum ersten Mal treffen, dann entspricht die Distanz, die beide Schiffe zusammen zurückgelegt haben, gleich dem Abstand zwischen den beiden Anlegestellen. Wenn sie sich zum zweiten Mal treffen, dann entspricht die gemeinsam zurückgelegte Distanz gleich dem Dreifachen der gesuchten Entfernung (da beide Fähren jeweils einmal den Wannsee überquerten und sich nun auf dem Rückweg befinden). Da die Boote ihre Geschwindigkeit nicht ändern und gleich lange an der Anlegestelle hielten, haben sie daher zum Zeitpunkt des zweiten Treffens beide jeweils die dreifache Distanz im Vergleich zum ersten Treffen zurückgelegt. Folglich hat jenes Boot, welches von Alt-Kladow startete und 1,8 Kilometer beim ersten Treffen zurückgelegt hatte, sich zum Zeitpunkt des zweiten Treffens 5,4 Kilometer weit fortbewegt. Dabei hat es einmal den Wannsee überquert und ist 1 Kilometer von der Anlegestelle an der S-Bahn-Haltestelle Wannsee entfernt. Der Abstand zwischen den beiden Anlegestellen ist daher $5,4 - 1 = 4,4$ Kilometer.

b) Bekanntlich ist Weg gleich Geschwindigkeit mal Zeit: $s = vt$. Sei $d = 4,4$ Kilometer die Distanz zwischen den beiden Anlegestellen (die wir hier als noch unbekannt annehmen dürfen, wir werden sie im Verlaufe der Rechnung erneut herausbekommen). Seien a und b die Entfernungen von den Anlegestellen in Alt-Kladow beziehungsweise an der S-Bahn-Station Wannsee zum Zeitpunkt des ersten beziehungsweise zweiten Treffens. Es gilt also $a = 1,8$ Kilometer und $b = 1$ Kilometer. Sei u die Geschwindigkeit der Fähre, die in Alt-Kladow startete, und v die der anderen. Sei nun t die Zeit des erstens Zusammentreffens (wenn beide Fähren die Anlegestellen verlassen, gelte $t = 0$). Dann gilt $a = ut$ und $d - a = vt$, sodass nach Auflösung nach t gilt:

$$\frac{a}{u} = \frac{d-a}{v} \Rightarrow \frac{a}{d-a} = \frac{u}{v}.$$

Einsetzen von $a = 1,8$ Kilometer und $d = 4,4$ Kilometer liefert bereits das gesuchte Verhältnis. Als alternative Bestimmung der Entfernung d bietet sich die folgende Argumentation an:

Sei t' der Zeitpunkt des zweiten Treffens, wobei wir die gemeinsame Haltezeit von zehn Minuten nicht berücksichtigen. Dann gilt $d + b = ut'$ und $2d - b = vt'$, sodass

$$\frac{d+b}{u} = \frac{2d-b}{v} \Rightarrow \frac{d+b}{2d-b} = \frac{u}{v}.$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke für das Verhältnis der Geschwindigkeiten gleich, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b} &\Rightarrow 2da - ab = d^2 + db - da - ab \\ &\Rightarrow d^2 + db - 3da = 0 \\ &\Rightarrow d = 3a - b, \end{aligned}$$

wobei wir $d \neq 0$ nutzten. Setzen wir $a = 1,8$ Kilometer und $b = 1$ Kilometer in die Gleichung ein, so erhalten wir wie in a)

$$d = 3 \cdot 1,8 - 1 = 4,4 \text{ Kilometer}.$$

Des Weiteren erhalten wir für das Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{d-a} = \frac{1,8}{4,4 - 1,8} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}.$$

In Worten ist das Verhältnis der Geschwindigkeit der langsameren Fähre zu der der schnelleren 9:13. □

23. Berliner Tag der Mathematik

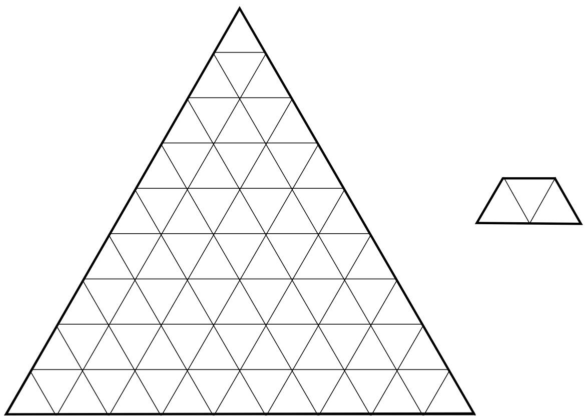
Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 11–13

21. April 2018

Aufgabe 1

10 Punkte

Gegeben sei ein Fußboden in Form eines gleichseitigen Dreieckes der Seitenlänge n. Der Fußboden soll nun so mit trapezförmigen Fliesen mit den Seiten 1-1-1-2 überdeckt werden, dass keine Lücken entstehen und sich keine Fliesen überschneiden. Die Fliesen dürfen dabei gedreht, aber nicht zugeschnitten werden. Bestimmt alle positiven ganzen Zahlen n, für die das Fliesen des Fußbodens möglich ist!



Dreieckiger Fußboden und trapezförmige Fliese

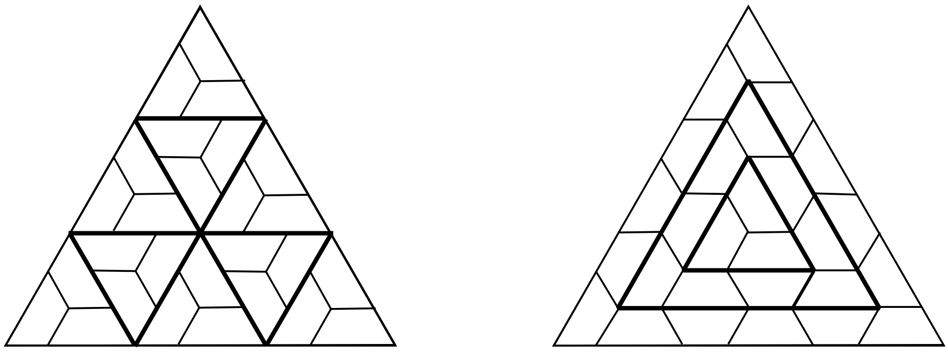
Lösung

Die Anzahl der elementaren 1-1-1-Dreiecke, in die der n-n-n-Fußboden zerfällt, ist n^2. Wir erhalten diese Zahl durch das zeilenweise Addieren der einzelnen Dreiecke:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = 2(1 + 2 + \ldots + n) - n = n(n + 1) - n = n^2.$$

Alternativ können wir die Elementardreiecke, deren Spitze nach oben zeigt, und jene, deren Spitze nach unten zeigt, getrennt voneinander betrachten. Vom ersten Typ gibt es $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$, vom zweiten Typ gibt es $1+2+3+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$, zusammen sind es also n^2.

Da eine Fliese genau drei Elementardreiecke enthält, muss n^2 ein Vielfaches von 3 sein, also muss auch n ein Vielfaches von 3 sein. In der Tat ist eine Fliesung des Fußbodens genau für alle Vielfachen $n = 3k$ von 3 möglich, wie die Abbildung auf zwei verschiedene Weisen zeigt. $\square$

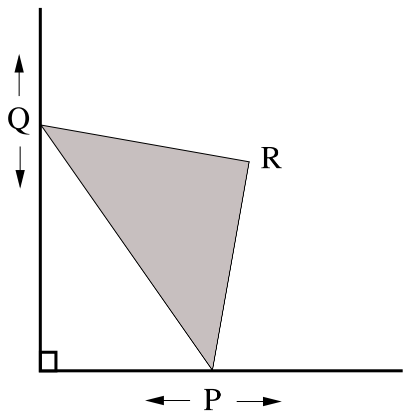


Zwei mögliche Fliesungen des Fußbodens für $n = 3 \cdot 3$

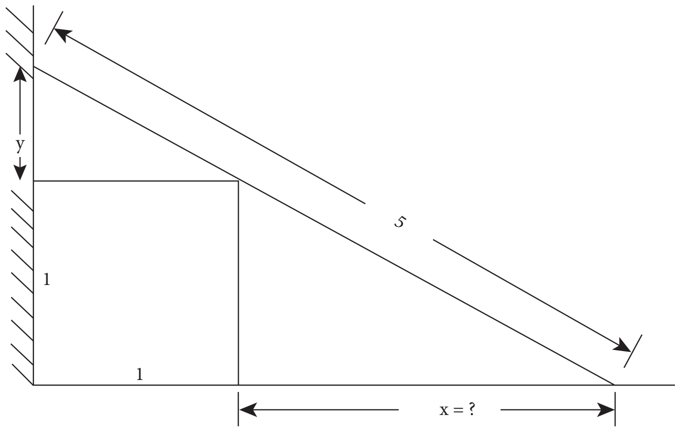
Aufgabe 2

5+5 Punkte

a) Die spitzen Ecken P und Q eines Geodreiecks (das heißt, eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks) haben den Abstand 1 und gleiten entlang zweier benachbarter Seiten eines rechteckigen Tisches (siehe Abbildung). Bestimmt die Bahn, die die rechtwinklige Ecke R des Geodreiecks beschreibt!



(a) Geodreieck auf dem Tisch

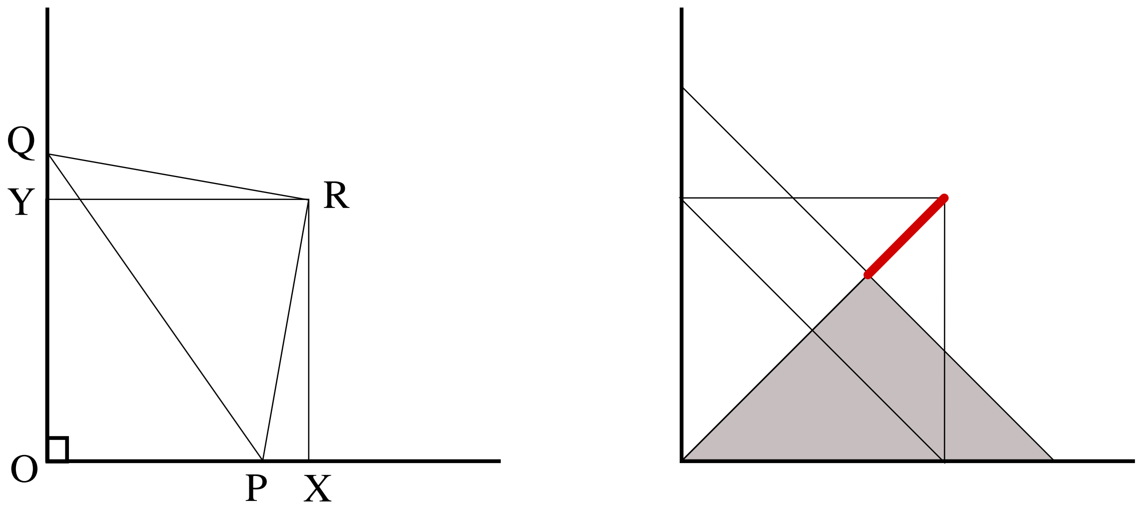


(b) Leiter an der Wand

b) Eine fünf Meter lange Leiter lehnt so an einer Wand, dass sie eine würfelförmige Kiste von einem Meter Kantenlänge berührt, die direkt an der Wand steht (siehe Abbildung). In welchem Abstand steht der Fuß der Leiter zu der Kiste? (Wenn es mehr als eine Lösung gibt, sind alle anzugeben.)

Lösung

a) Wir fällen die Lote von R auf die beiden Seiten des Tisches, auf denen sich die zwei spitzen Ecken des Geodreiecks befinden. Die Fußpunkte heißen X und Y, wobei X auf der Seite von P und Y auf der Seite von Q liegt. Mit O bezeichnen wir die Ecke des Tisches. Dann gilt:



Konstruktion der Lotfußpunkte X und Y sowie die Bahn von R (rot)

(i) Die Winkel $\angle QRP$ und $\angle YRX$ sind beides rechte Winkel. Deshalb sind die Winkel $\angle QRY$ und $\angle PRX$ gleich.

(i) Die Winkel $\angle RYQ$ und $\angle RXP$ sind rechte Winkel.

(ii) Die Strecken QR und RP sind gleich lange Katheten des Geodreiecks.

Aus (i), (ii) und (iii) folgt, dass die Dreiecke $\triangle QRY$ und $\triangle PRX$ kongruent sind, insbesondere sind die Strecken RX und RY gleich lang. Daher liegt der Punkt R auf der Winkelhalbierenden g der beiden Tischseiten.

Wir können auch feststellen, in welchem Bereich der Winkelhalbierenden g der Punkt R liegt: Wenn eine der Katheten des Geodreiecks mit g in Deckung ist, dann ist der Abstand von R zu den Achsen genau $d = k/\sqrt{2}$, wobei $k = 1/\sqrt{2}$ die Kathetenlänge ist. Es ist also $d = 1/2$. Andererseits kann der Abstand nicht größer als $k = 1/\sqrt{2}$ werden. Das rechte Bild zeigt die Bahn des Punktes R.

b) Sei x der Abstand des Fußes der Leiter zur Kiste und y der entsprechende Abstand von der Spitze. Leiter, Boden und Wand bilden ein rechtwinkliges Dreieck, sodass nach dem Satz von Pythagoras gilt:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5^2 = 25.$$

Die beiden kleinen rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich zueinander, sodass

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = 1$$

gilt. Ersetzen wir in der ersten Gleichung $y = 1/x$, so erhalten wir eine Gleichung vierten Grades in x. Da solche Gleichungen in der Regel schwer zu lösen sind, behalten wir die Symmetrie in x und $1/x$ bei:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1 &= 25 \\ \Rightarrow \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) &= 25 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) &= 25. \end{aligned}$$

Wir haben nun eine quadratische Gleichung in $z = x + 1/x$ mit den Lösungen

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4+100}}{2} = -1 \pm \sqrt{26}.$$

Da nur die positive Lösung geometrisch sinnvoll ist, ist

$$x + \frac{1}{x} = -1 + \sqrt{26} \Rightarrow x^2 + (1 - \sqrt{26})x + 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat nun die beiden Lösungen

$$x = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{23 - 2\sqrt{26}}}{2}.$$

Wegen der Symmetrie in x und $y = 1/x$ überrascht es nicht, zwei Lösungen zu haben. □

Aufgabe 3

4+3+3 Punkte

Gegeben sei ein quadratisches 20×20-Gitter. Dieses kleben wir so auf einen Zylindermantel, dass der rechte und der linke Rand genau zusammenstoßen.

Ein 1×1-Teilquadrat nennen wir *Karte*. Zwei Karten heißen *benachbart*, wenn sie auf dem Zylinder eine gemeinsame Kante haben. Jede Karte der obersten und der untersten Reihe des Gitters hat dann genau drei Nachbarn (rechts, links und unten beziehungsweise oben), alle anderen Karten haben vier Nachbarn (rechts, links, unten und oben).

7	14	1	13
9	16	5	10
2	6	3	15
12	11	8	4

4×4-Gitter auf einem Zylinder: Karte 7 ist mit den Karten 9, 13 und 14, Karte 9 mit 2, 7, 10 und 16, Karte 2 mit 6, 9, 12 und 15 und Karte 12 mit den Karten 2, 4 und 11 benachbart

Ein *Atlas* ist eine Nummerierung der Karten des 20×20-Gitters mit den Zahlen von 1 bis 400, sodass jede Zahl genau einmal vorkommt. Mit D bezeichnen wir die größte auftretende Differenz zwischen den Zahlen zweier benachbarter Karten. Im 4×4-Gitter in der Abbildung sind die Karten mit den Nummern 1 und 16, 2 und 16 sowie 1 und 15 nicht benachbart, die Karten mit den Nummern 2 und 15 dagegen schon. Im Beispiel gilt daher $D = 15 - 2 = 13$.

a) Beweist, dass für jeden Atlas des 20×20-Gitters $D \geq 14$ gilt.

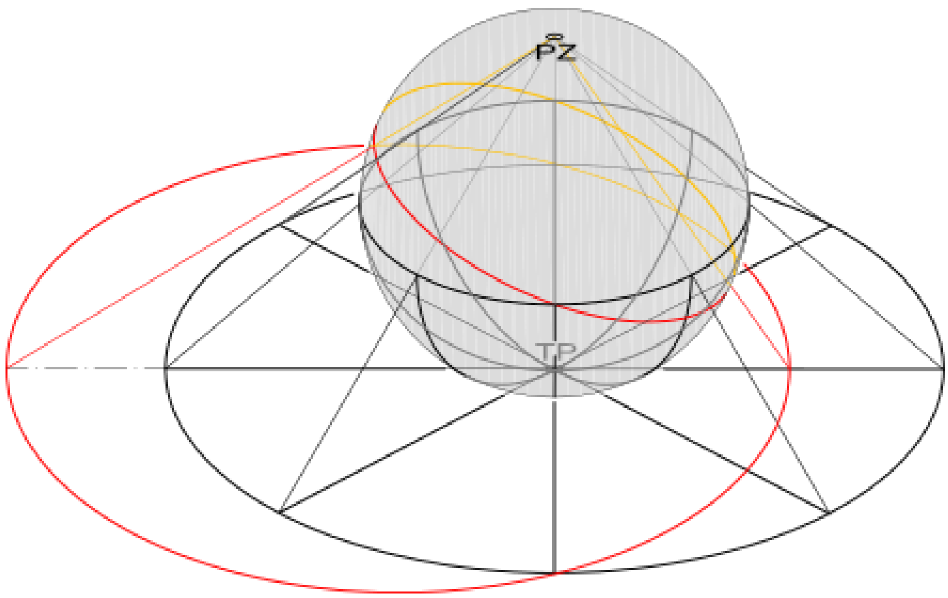
b) Findet einen Atlas des 20×20-Gitters, bei dem die größte auftretende Differenz D zweier benachbarter Karten gleich 20 ist.

c) Zeigt, dass für jeden Atlas des 20×20-Gitters sogar $D \geq 20$ gilt, das heißt, dass euer Atlas aus Aufgabenteil b) sogar optimal ist.

Hinweis: Natürlich folgt der einfachere Aufgabenteil a) aus dem schwierigeren Teil c). Wenn ihr dies als Lösung für den Aufgabenteil a) schreibt, bekommt ihr die vier Punkte dafür aber nur dann, wenn ihr im Aufgabenteil c) die volle Punktzahl erhaltet.

Bemerkung: Die in der Kartografie häufig verwendete *Mercator-Projektion* bildet die Erdoberfläche winkeltreu auf einen Zylinder ab. Ein Teilquadrat auf dem Zylinder entspricht dann einer Karte, und ein Atlas bringt diese Karten in eine bestimmte Reihenfolge. Wenn ihr eine Seite im Atlas aufschlagt und nach der Fortführung einer Karte an ihrem Rand sucht, müsst ihr manchmal nur auf die Nachbarseite schauen oder nur einmal umblättern, manchmal müsst ihr mehrere Seiten durchblättern. In der obigen Aufgabe findet ihr heraus, wie viele Seiten ihr im schlimmsten Fall in jedem Atlas durchblättern müsst, wenn ihr nach zwei benachbarten Karten schaut.

Die erste winkeltreue Karte wurde übrigens schon in der Antike entdeckt. Es handelt sich dabei um die *stereographische Projektion.* Diese Projektion bildet die Kugeloberfläche vom Projektionszentrum aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene wie folgt ab: Zwei Punkte sind Urbild und Bild genau dann, wenn sie und das Projektionszentrum auf einer Geraden liegen. Diese Abbildung ist nicht nur winkeltreu, sie bildet auch Kreise auf der Kugeloberfläche, die nicht durch das Projektionszentrum gehen, auf Kreise in der Ebene ab.



Stereographische Projektion (Lizenz: creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/,
Original: commons.wikimedia.org/wiki/File:Stereographic_projection.svg von Analemma)

Lösung

a) Seien A und B zwei Karten. Zwischen A und B suchen wir einen kürzesten Weg auf dem Zylindergitter, welcher nur über benachbarte Karten führt. In vertikaler Richtung müssen wir höchstens 19 Kanten überqueren (dies ist der Fall, wenn A und B am oberen beziehungsweise unteren Rand sind), in horizontaler Richtung müssen wir höchstens 10

Kanten überqueren (wenn wir 20 Mal nach rechts gehen, passieren wir durch die Identifizierung des rechten Randes mit dem linken Rand alle Karten auf der gleichen Höhe, entsprechend besuchen wir sie ebenfalls alle, wenn wir zehnmal nach links oder zehnmal nach rechts gehen). In der Summe schaffen wir es in höchstens 29 Zügen, um von A nach B zu gelangen.

Sei nun A die Karte mit der Zahl 1 und B die Karte mit der Zahl 400. Wenn sich die Zahlen benachbarter Karten um nicht mehr als 13 unterscheiden würden, so könnten wir auf dem kürzesten Weg von A nach B nicht mehr als $29 \cdot 13 = 377 < 399 = 400 - 1$ hinzugewinnen, Widerspruch. Folglich muss es mindestens ein Paar benachbarter Karten geben, bei der sich die Differenz der Zahlen um mindestens 14 unterscheidet.

b) Wir nummerieren die k-te Zeile von links nach rechts aufeinanderfolgend mit den Zahlen von $20(k-1)+1$ bis $20k$. Die Differenz zwischen zwei benachbarten Karten in verschiedenen Zeilen ist dann stets gleich 20, die Zahlen zweier benachbarter Quadrate derselben Zeile unterscheiden sich um 1 im Innern oder um 19 am Rand. Das Maximum der Differenzen ist also 20.

c) Wir betrachten irgendeinen Atlas, also eine Nummerierung der Karten mit den Zahlen von 1 bis 400. Jede Zeile und jede Spalte hat einen maximalen Eintrag. Sei r das Minimum dieser 40 Maxima. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Karte mit der Zahl r den maximalen Eintrag ihrer Zeile R aufweist (ansonsten vertauschen wir die Begriffe Zeile und Spalte im Folgenden). Das Maximum der R-ten Zeile ist also r. Jede andere Zeile oder jede andere Spalte, die nicht die Karte mit der Zahl r enthält, hat also ein größeres Maximum.

Wir färben alle Karten mit einer Zahl $s \leq r$ grün, die Karten mit einer Zahl $t > r$ rot. Da r das Maximum der Zeile R ist, ist die Zeile R komplett grün. Jede der 19 Spalten, die nicht die Karte mit der Zahl r enthalten, haben jeweils eine Karte mit einer Zahl, die kleiner als r ist (zumindest jenes, welches in der gleichen Reihe wie die Karte mit der Zahl r ist), und eine Karte mit einer Zahl, die größer als r ist (zumindest das Maximum jener Spalte). Da es neunzehn solcher Spalten gibt, gibt es zumindest eine, sagen wir S, sodass all ihre roten Karten mit zumindest $r+19$ nummeriert sind. In dieser Spalte gibt es eine rote Karte, welche mit einer grünen Karte benachbart ist, und die Differenz zwischen ihnen beträgt mindestens $(r+19)-(r-1) = 20$. Daher gibt es in jedem Atlas mindestens zwei benachbarte Karten, deren Seitenzahl sich um mindestens 20 unterscheidet. □

Aufgabe 4

3+2+2+3 Punkte

Im Folgenden betrachten wir eine endliche Zahl n von Münzen, die alle flach auf einem Tisch liegen. Insbesondere überlappen sich keine zwei Münzen, berühren können sie sich aber. In den ersten beiden Aufgabenteilen betrachten wir gleich große 1-Euro-Münzen, in den letzten beiden Aufgabenteilen dürfen die Münzen verschiedene Größen haben.

a) Ist es für jede natürliche Zahl n und für jede Anordnung von n 1-Euro-Münzen möglich, eine Münze zu finden, die nicht mehr als drei andere Münzen berührt?

b) Gibt es eine Anzahl n von 1-Euro-Münzen und eine geeignete Anordnung von ihnen, sodass jede Münze genau drei andere Münzen berührt?

c) Gibt es eine Anzahl n von nicht notwendigerweise gleich großen Münzen und eine geeignete Anordnung von ihnen, sodass jede Münze genau fünf andere Münzen berührt?

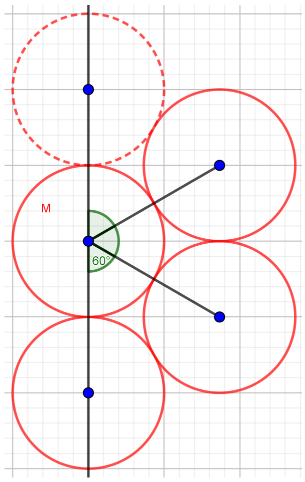
d) Gibt es eine Anzahl n von nicht notwendigerweise gleich großen Münzen und eine geeignete Anordnung von ihnen, sodass jede Münze sechs oder mehr andere Münzen berührt?

Eure Antworten sind zu begründen.

Hinweis: Die vier Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden und sind nicht nach Schwierigkeit sortiert. Falls die Antwort auf einen der Aufgabenteile b) bis d) Ja lautet, so ist für jenen Aufgabenteil natürlich nur eine Anzahl n und eine Anordnung von Münzen anzugeben, für die die gesuchte Eigenschaft erfüllt ist.

Lösung

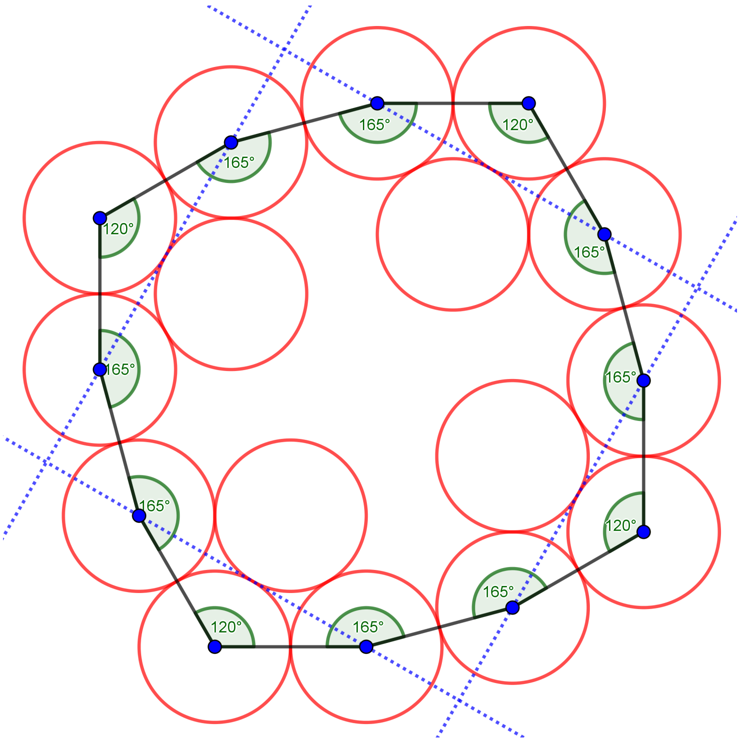
a) Ja. Wir legen auf den Tisch ein kartesisches Koordinatensystem. Von allen Münzen betrachten wir zunächst jene, deren Mittelpunkte eine möglichst kleine x-Koordinate haben, und unter jenen wiederum eine, deren Mittelpunkt eine möglichst große y-Koordinate hat. Unter allen Münzen, die ganz links liegen, nehmen wir also die oberste und nennen sie M. Wenn an diese Münze M zwei andere Münzen anliegen, so liegt zwischen den Mittelpunkten ein Winkel von mindestens 60 Grad, wobei Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn sich alle drei Münzen berühren und die Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck beschreiben.



Es können nicht mehr als drei andere Münzen an M anliegen

Angenommen, es würden nun vier oder mehr Münzen an M anliegen. Nach Voraussetzung kann keine andere Münze links von M liegen, sie alle liegen im Halbraum rechts von der entsprechend verschobenen x-Achse. Da zwei im Ring benachbarte Münzen mindestens einen Winkel von 60 Grad bilden, der Winkel zwischen der untersten und der obersten anliegenden Münze aber höchstens 180 Grad sein kann, folgt, dass es sich um vier Münzen handelt, die M berühren, und die Winkel immer exakt 60 Grad sind. Doch dann befindet sich eine Münze auf derselben x-Koordinate wie M, liegt aber höher, was ein Widerspruch zur Wahl von M ist.

b) Ja. Wir nehmen ein 4×4-Gitter von 16 Münzen und verschieben die vier mittleren Münzen leicht nach außen, sodass sie auch die jeweiligen Eckmünzen berühren. Die anderen Münzen werden entsprechend mitverschoben, ihre Berührungen mit Nachbarmünzen bleiben aber erhalten. Wir erhalten eine Konfiguration so ähnlich wie in der Abbildung, in der jede Münze genau drei andere berührt.



Jede der sechszehn 1-Euro-Münzen berührt genau drei andere Münzen

Eine mathematisch genaue Beschreibung der Abbildung ist die folgende: Die zwölf äußeren Münzen seien in den Ecken eines Zwölfecks mit der Kantenlänge d und den Winkeln

$$120^\circ - 165^\circ - 165^\circ - 120^\circ - 165^\circ - 165^\circ - 120^\circ - 165^\circ - 165^\circ - 120^\circ - 165^\circ - 165^\circ$$

angeordnet. Dann berührt jede Münze genau zwei andere Münzen. In jeder der vier Ecken mit einem Winkel von 120° passt nun so eine Münze von innen rein, dass alle drei äußeren Münzen an der Ecke berührt werden. Dazu spiegeln wir die Münzen an den Ecken mit einem Winkel von 120° an den Geraden, die die Mittelpunkte benachbarter Münzen verbinden. Da der Winkel an der Ecke 120° beträgt, liegt die gespiegelte Münze in einem Winkel von 60° an und berührt tatsächlich die Münze an der Ecke.

Da die anderen äußeren Winkel mit 165° stets größer sind als 120°, berühren die inneren Münzen keine anderen Münzen und überlappen auch nicht. Auf diese Weise berührt jede Münze genau drei andere Münzen.

c) Ja. Wir betrachten einen Dodekaeder mit seinem Symmetriezentrum. Wenn wir in diesem eine kleine Kugel zentrieren und sie langsam aufblasen, erhalten wir irgendwann den Moment, dass diese Kugel eine Kante des Dodekaeders berührt. Aus Symmetriegründen berührt sie dann jede Kante des Dodekaeders. Die Umkreise der Seitenflächen bilden damit eine Kreispackung auf der Kugel, bei der jeder Kreis genau fünf andere Kreise berührt (so viele Kanten hat eine Seitenfläche). Wenn wir nun die Kreispackung mit der in der dritten Aufgabe beschriebenen stereographischen Projektion auf die Ebene projizieren und als Nordpol einen Punkt der Kugel wählen, der in keinem ausgefüllten Kreis liegt, so erhalten wir die gesuchte Kreispackung beziehungsweise Konfiguration von Münzen in der Ebene.

d) Nein. Wir gehen einmal davon aus, dass es möglich wäre. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir eine Zusammenhangskomponente betrachten, das heißt, eine Konfiguration von Münzen, sodass sich je zwei Münzen über einen Weg sich berührender Münzen erreichen lassen. Unter allen Münzen betrachten wir die kleinste. Dann kann sie nur dann sechs Nachbarn haben, wenn all ihre Nachbarmünzen die gleiche Größe haben. Es folgt, dass alle Münzen der Zusammenhangskomponente gleich groß sind. Im Aufgabenteil a) haben wir aber gesehen, dass es dann mindestens eine Münze gibt, die nicht mehr als drei andere Münzen berührt. □