TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Mathematik
Dr. Frank Jochmann, Dr. Friederike Körner SommerSemester 2001

HÖHERE MATHEMATIK IV für E-TECHNIKER

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe01/HM4_ET/

Lösungen zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 4 Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der T-periodischen Sägezahnschwingung mit

H $$f(t) = \begin{cases} t - \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{3T}{4} - t & \text{für } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mathcal{L}[f] &= \frac{1}{1-e^{-Tz}} \int_0^T e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{1-e^{-Tz}} \{ \int_0^{T/2} e^{-zt}(t - \frac{T}{4})\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} e^{-zt}(\frac{3T}{4} - t)\,\mathrm{d}t \} \\
&= \frac{1}{1-e^{-Tz}} \{ [\frac{T}{4z}e^{-zt} - \frac{tz+1}{z^2}e^{-zt}]_0^{T/2} + [(-\frac{3T}{4z} + \frac{tz+1}{z^2})e^{-zt}]_{T/2}^{T} \} \\
&= \frac{1}{1-e^{-Tz}} \{ -\frac{T}{4z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^2}e^{-zT/2} + (-\frac{3T}{4z} + \frac{zT+1}{z^2})e^{-zT} \} \\
&= \frac{1}{1-e^{-Tz}} \{ \frac{T}{4z}(e^{-Tz} - 1) + \frac{1}{z^2}(1 - e^{-Tz/2})^2 \} \\
&= -\frac{T}{4z} + \frac{1}{z^2} \frac{(1+e^{-Tz/2})^2}{1-e^{-Tz}} \\
&= -\frac{T}{4z} + \frac{1}{z^2} \frac{1-e^{-Tz/2}}{1+e^{-Tz/2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 i) **T** Wie ist der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung
a) an einem Widerstand R, b) an einem Kondensator C, c) an einer Spule L wenn $i(0) = 0$? Bilden Sie die Laplace-Transformierten der drei Gleichungen für $i(0) = 0$.

a) Widerstand: $u(t) = Ri(t)$, $\quad U(s) = RI(s)$

b) Kondensator: $u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t$, $\quad U(s) = \frac{1}{sC}I$

c) Spule: $u(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$, $\quad U(s) = sLI(s)$

ii) **H** In einer Reihenschaltung von Kondensator, Widerstand und Spule (vgl. Bild im Skript S. 14.1.22) gilt $u(t) = u_C(t) + u_R(t) + u_L(t)$.

Bilden Sie die Laplace-Transformierte der Gleichung und berechnen Sie $I := \mathcal{L}[i(t)]$ mit $i(0) = 0$.

$$\begin{aligned} U(s) &= U_C(s) + U_R(s) + U_L(s) = \\ &= (\frac{1}{sC} + R + sL)I = \frac{1 + sRC + s^2LC}{sC} I \\ \iff \qquad I &= \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1} U \end{aligned}$$

H Aufgabe 6 Lösen Sie das DGL-System

$$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} \frac{-2}{z-1} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z & -1 \\ 1 & 2-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1] \\ \mathcal{L}[y_2] \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1] \\ \mathcal{L}[y_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{z^3-5z^2+9z-5} \\ 2\frac{z^2-3z+3}{z^3-5z^2+9z-5} \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t + e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t \\ e^t + e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$