Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Dr. Frank Jochmann, Dr. Friederike Körner

SommerSemester 2001

Höhere Mathematik IV für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe01/HM4_ET/

Lösungen zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 3 Sei $f(t)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion, für die die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[f](\omega)$ existiert. Zeigen Sie:

H Ist f eine ungerade Funktion, so gilt $\mathcal{F}[f](\omega) = -2i \int_0^\infty f(t) \cdot \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$.

Sei $f(t)$ eine ungerade Funktion, also $f(-t) = -f(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \quad \text{Subst. } \tau = -t \\
&= -\int_{\infty}^{0} f(-\tau)e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \quad f(-\tau) = -f(\tau) \\
&= \int_0^\infty -f(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty f(t)(-e^{i\omega t} + e^{i\omega t})\,\mathrm{d}t \\
&= -2i \int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Berechnen Sie für folgende Funktionen die Fourier-Transformierten:

H ii) $$f(t) = \begin{cases} t & \text{für } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} te^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \quad \text{partielle Integration} \\
&= [\frac{te^{-i\omega t}}{-i\omega}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{-i\omega} + e^{i\omega}}{-i\omega} - [\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2}]_{-1}^{1} \\
&= 2i\frac{\cos\omega}{\omega} - 2i\frac{\sin\omega}{\omega^2}
\end{aligned}$$

H iv)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{3}{4t^2+4t+8}\\
f(t) &= \frac{3}{(2t+1)^2+7} = \frac{3}{7}\frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{7}})^2+1} = \frac{3}{7}\frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{7}}(t+\frac{1}{2})]^2+1}\\
\mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{3}{7}e^{i\frac{\omega}{2}}\mathcal{F}[\frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{7}}t]^2+1}](\omega)\\
&= \frac{3}{7}e^{i\frac{\omega}{2}}\frac{\sqrt{7}}{2}\mathcal{F}[\frac{1}{t^2+1}](\frac{\sqrt{7}}{2}\omega)\\
&= \frac{3}{2\sqrt{7}}e^{i\frac{\omega}{2}}\pi e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}|\omega|}\\
&= \frac{3\pi}{2\sqrt{7}}e^{\frac{1}{2}(i\omega-\sqrt{7}|\omega|)}
\end{aligned}
$$