Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
Dr. Frank Jochmann, Dr. Friederike Körner

SommerSemester 2001

Höhere Mathematik IV für E-Techniker

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe01/HM4_ET/

9. Übungsblatt

Ü Aufgabe 1 Für ein lineares, zeitinvariantes, stetiges System S gilt (ganz analog wie bei der $\mathcal{L}$-Transformation)

$$\mathcal{F}[S[f](t)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot H(\omega) \qquad \text{mit Impulsantwort } h(t) = S[\delta(t)] \quad \text{und } H(\omega) = \mathcal{F}[h](\omega).$$

Das System S ist *kausal*, wenn für alle Funktionen $f(t)$ gilt:
Wenn $f(t) = 0$ für $t < 0$, so ist auch $S[f](t) = 0$ für $t < 0$.
i) Ist S ein kausales System, so gilt auch auch für die Impulsantwort $h(t) = S[\delta(t)]$, dass $h(t) = 0$ für alle $t < 0$ ist.
ii) Welche Übertragungsfunktion muss ein idealer Tiefpassfilter, der genau alle Frequenzen zwischen $-\Omega$ und Ω passieren lässt, haben? Ist solch ein Filter realisierbar?
iii) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|\,\mathrm{d}\omega < \infty$ und $f(t) = 0$ für alle $t < 0$. Dann gibt es eine Fortsetzung F von $\mathcal{F}[f]$ auf die Halbebene $\{z \;:\; \mathrm{Im} z < 0\}$, die dort analtytisch ist und $|F(z)| \le M/|z|$ für eine Konstante $M > 0$ erfüllt.

Ü Aufgabe 2 Für eine beliebige Funktion $f(t)$ und eine gegebene Konstante $T > 0$ finde man eine Funktion $g(t)$, deren Frequenzspektrum von endlicher Bandbreite ist (d.h. $\mathcal{F}[g](\omega) = 0$ für $|\omega| > \pi/T$), mit der Eigenschaft, dass $g(nT) = f(nT)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

T Aufgabe 3 Bestätigen Sie, dass für die Systemantwort $S[f]$ eines idealen Tiefpaßfilters mit Bandbreite Ω auf die Eingangsfunktion $f(t) = \sin \alpha t$ gilt:

$$S[f](t) = \begin{cases} \sin \alpha t & \text{falls } \alpha < \Omega \\ 0 & \text{falls } \alpha > \Omega \end{cases}$$

Aufgabe 4 **T** Deuten Sie die Unschärfe-Relation

$$\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\omega \mathcal{F}[f](\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}} \ge \frac{1}{2}\,.$$

Bestätigen Sie die Unschärfe-Relation für einige Beispiele durch Einsetzen, z.B.:

T $f(t) = e^{-|t|}$ **H** $g(t) = e^{-|t|} \cos t.$

Aufgabe 5 Transformieren Sie mithilfe der $\mathcal{L}$-Transformation und der $\mathcal{F}$-Transformation die partielle DGL jeweils in eine gewöhnliche DGL.

T $u_t = c^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$

H $u_{tt} + \lambda u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$