SS 2001
Prof. Volker Mehrmann
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Numerische Mathematik I für Ing.
– Übung 10 –

WICHTIGE HINWEISE ZUR KLAUSUR:

- **Die Klausur findet am Dienstag, den 3.7.2001 um 8.00 Uhr im H 104 statt! Einlass ist um 7.50 Uhr, die Klausur beginnt pünktlich um 8.00 Uhr! Die Gesamtzeit beträgt zwei Stunden.**
- **Bei der Klausur sind als Hilfsmittel nur Stift und Papier zugelassen!**
- **Bei der Klausur müssen der Ausweis für Studierende und ein amtlicher Lichtbildausweis vorgelegt werden!**
- **Studierende, für die diese Veranstaltung als Prüfung gewertet werden soll, müssen sich (je nach Studiengang!!!)**
  - **entweder bis spätestens Dienstag, den 26.6.2001 beim für ihren Studiengang zuständigen Prüfungsamt anmelden**
  - **oder dort ein Prüfungsformular abholen und dies ausgefüllt bis zum Freitag, den 29.6.2001 im Sekretariat MA 462 (nur Di,Do,Fr 9.30-11.30 Uhr) abgeben**

  Liegt keine Prüfungsmeldung vor, so wird die Klausur nicht als Prüfung anerkannt!
- **Studierende der Energie- und Verfahrenstechnik, die einen Schein über 6SWS benötigen, müssen die Klausur schreiben und an der Fortsetzung der Veranstaltung nach der Klausur teilnehmen. Sie müssen dies auf der Klausur in dem dafür vorgesehenen Feld ankündigen!**
- **Diese Regelungen gelten auch für diejenigen, deren Zulassung zur Klausur aus einem früheren Jahr anerkannt wurde!**

Theoretische Aufgaben: (Abgabe im jeweiligen Tutorium, 27.-29. Juni)

1. **Aufgabe:** (1+1+1 P.)
   (a) Wann ist eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv definit?
   (b) Welche Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ nutzen die Positiv-Definitheit von A aus?
   (c) Welches von ihnen ist i.a. das beste?

2. **Aufgabe:** (1+1 P.)
   (a) Es liege eine LR-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ vor. In welchen Teilschritten wird damit die Lösung x des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ berechnet?
   (b) Es liege eine QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ vor. In welchen Teilschritten wird damit die Lösung x des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ berechnet?

3. **Aufgabe:** (1+1+1 P.)
   Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine vollbesetzte Matrix. Wieviele Gleitpunktoperationen (flops) benötigt man größenordnungsmäßig in Bezug auf n (d.h. $\mathcal{O}(n)$ oder $\mathcal{O}(n^2)$ etc.)
   (a) für die Berechnung der LR-Zerlegung von A?
   (b) für die Lösung des gestaffelten Gleichungssystems $Ly = b$, wenn L eine Dreiecksmatrix ist?
   (c) für eine Matrix-Vektor-Multiplikation?

4. **Aufgabe:** (1+1 P.)
   Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine vollbesetzte, quadratische Matrix.
   (a) In welchem Fall ist es besonders sinnvoll, eine QR-Zerlegung für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu verwenden?
   (b) Was ist der Nachteil einer QR-Zerlegung gegenüber einer LR-Zerlegung?

5. **Aufgabe:** (1+1 P.)
   (a) Wofür ist die Kondition eines Problems ein Maß?
   (b) Welche beiden Voraussetzungen müssen (als Faustregel) erfüllt sein, damit ein gegebenes Problem mit einem

6. **Aufgabe:** (1 P.)
Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$, die u.a. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle spielt, hat keine explizite Stammfunktion. Das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ soll mit der summierten Trapezregel mit der Schrittweite $h = 1/8$ approximiert werden. Gib an, wie sich der Näherungswert für das Integral aus den Funktionswerten ergibt (die Werte selbst brauchen nicht ausgerechnet zu werden)!

7. **Aufgabe:** (3 P.)
Das Randwertproblem

$$-\lambda u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad x(0) = \alpha, x(1) = \beta$$

($\lambda > 0$ konstant und f vorgegeben) soll mit einem Differenzenverfahren gelöst und die zweite Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten

$$D_{2h}u(x) \quad := \quad \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

zur Schrittweite $h > 0$ approximiert werden. Gib die Matrix und die rechte Seite des sich ergebenden linearen Gleichungssystems an, wenn das Intervall $[0,1]$ äquidistant in n Teile unterteilt wird und $u_i \approx u(x_i), i = 0, \ldots, n$ die Näherungslösung bezeichnet.

Hinweis zur letzten Programmieraufgabe: (16 Punkte, Vorführen im Unix-Pool bis zum 29. Juni)
Zum Begriff "leading dimension":
Eine Matrix A (und allgemein ein mehrdimensionales Feld) wird *sequenziell* im Speicher abgelegt, d.h.

- in C/C++ (auch in Pascal) werden die Zeilenvektoren
- und in Fortran die Spaltenvektoren

von A hintereinander abgespeichert. D.h. eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{\tilde{m},\tilde{n}}$ liegt

- in C/C++ als $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0,\tilde{n}-1}, a_{10}, \ldots, a_{20}, \ldots, a_{\tilde{m}-1,0}, \ldots, a_{\tilde{m}-1,\tilde{n}-1}$
- und in Fortran als $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{\tilde{m}1}, a_{12}, \ldots, a_{13}, \ldots, a_{1\tilde{n}}, \ldots, a_{\tilde{m}\tilde{n}}$

im Speicher.
Wenn man eine Matrix mit festen Dimensionen $(\tilde{m}, \tilde{n})$ deklariert, die Dimensionen der tatsächlich benutzten Matrix aber (m, n) mit $m < \tilde{m}, n < \tilde{n}$ sind, bedeutet das, dass im Speicher Platz nicht benutzt wird. D.h.

- in C/C++ für ein Feld $A[\tilde{m}][\tilde{n}]$:

$$a_{00}, \ldots, a_{0,n-1}, \underbrace{a_{0,n}, \ldots, a_{0,\tilde{n}-1}}_{\text{nicht benutzt}}, a_{10}, \ldots, a_{1,n-1}, \underbrace{a_{1n}, \ldots, a_{1,\tilde{n}-1}}_{\text{nicht benutzt}}, \ldots, a_{m-1,0}, \ldots, a_{m-1,n-1}, \underbrace{a_{m-1,n}, \ldots, a_{m0}, \ldots, a_{\tilde{m}-1,\tilde{n}-1}}_{\text{nicht benutzt}}$$

- in Fortran für ein Feld $A(\tilde{m}, \tilde{n})$:

$$a_{11}, \ldots, a_{m1}, \underbrace{a_{m+1,1}, \ldots, a_{\tilde{m}1}}_{\text{nicht benutzt}}, a_{12}, \ldots, a_{m2}, \underbrace{a_{m+1,2}, \ldots, a_{\tilde{m}2}}_{\text{nicht benutzt}}, \ldots, a_{mn}, \underbrace{a_{m+1,n+1}, \ldots, a_{1,n+1}, \ldots, a_{\tilde{m}\tilde{n}}}_{\text{nicht benutzt}}$$

Übergibt man den Zeiger auf die Matrix (das ist der Zeiger auf das erste Matrixelement) und deren Dimensionen als (m, n) an ein Unterprogramm, so weiss dieses nicht, dass im Speicher nichtbenutzte Elemente sind. Die zusätzliche Information, die ein in Fortran geschriebenes Unterprogramm braucht, ist: Wie lang ist jede Spalte der Matrix A im Speicher. Das ist im Beispiel oben $\tilde{m}$. Diesen Wert bezeichnet man als "leading dimension" (engl.: führende Dimension) des Feldes A (in LAPACK `lda,ldb`= leading dimension of A, B). Der Wert $\tilde{n}$ wird nicht benötigt (warum?). Ein in C/C++/Pascal geschriebenes Unterprogramm braucht analog den Wert $\tilde{n}$ als leading dimension.
Das Problem tritt nicht auf, wenn die Felder immer genau in der benötigten Größe angelegt werden. Die leading dimension ist dann gleich der aktuellen Dimension, d.h. $m = \tilde{m}$ bzw. $n = \tilde{n}$. Bei *dynamisch zugewiesenem Speicher* wird dies meistens ohnehin der Fall sein, bei *statischer Speicherplatzverwaltung* bedeutet das aber, dass das Programm bei jeder Dimensionsänderung neu übersetzt werden muss. Daher (und weil Fortran 77 keine dynamische Speicherverwaltung hat), erwarten die LAPACK-Routinen die leading dimension als Parameter.
Sprechzeiten (alle im MA 241):

Thomas Slawig, Di 19.6. 13-15 Uhr, (Di 26.6. keine Sprechstunde) Mi 27.6. 13-15 Uhr, Fr 29.6. 14-16 Uhr
Uwe Prüfert, Do 12-14 Uhr.