SS 2001
Prof. Volker Mehrmann
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Klausur Numerische Mathematik I für Ing.

BITTE DIESES FELD IN DRUCKSCHRIFT AUSFÜLLEN:

Name:		Vorname:	
Matrikel-Nr.:		Studiengang:	

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (Matrikel-Nr. und Punktzahl) am schwarzen Brett vor dem MA 472 bin ich einverstanden (wenn ja bitte unterschreiben, sonst nicht):

Unterschrift: ....

Betrifft nur Energie- und Verfahrenstechnik und PI:
Für mich soll die Veranstaltung als 6 SWS anerkannt werden. Ich nehme daher an der Fortsetzung in den letzten beiden Semesterwochen (Beginn 9.7.01, 16.15 Uhr, MA 043) teil. ☐ (gegebenfalls ankreuzen)

(Die Teilnahme und eine evtl. Rücksprache sind Voraussetzungen für eine Anerkennung als 6 SWS)

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe	Zulassung	Note
Punkte										
max. Punkte	**4**	**6**	**8**	**6**	**5**	**7**	**4**	**40**		
Korrektor										

WICHTIGE HINWEISE:

- **Zum Bestehen der Klausur sind 20 von 40 Punkten erforderlich.**
- **Als Hilfsmittel sind nur Stift und Papier zugelassen! Keine Taschenrechner! Ausdrücke, die nicht im Kopf berechnet werden können (z.B. $\sqrt{2}$ etc.) bitte unverändert stehen lassen!**
- **Bitte den Ausweis für Studierende und einen amtlichen Lichtbildausweis bereit halten!**
- **Aushang der Ergebnisse am schwarzen Brett vor dem MA 472 ab Mittwoch, 4.7.01, 10.00 Uhr. Dort wird auch der Einsicht- bzw. Rückgabetermin bekanntgegeben.**

KLAUSURAUFGABEN:

1. **Aufgabe:** (**4** (2+2) Punkte)
   Betrachte das Anfangswertproblem (AWP)
   $$y''(t) = \left(1 - y^2(t)\right) y'(t) - y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$
   (a) Reduziere das AWP durch Hinzunahme zusätzlicher Variablen auf ein AWP für ein System erster Ordnung.
   (b) Berechne die erste Iterierte $\vec{u}_1$ des Eulerverfahrens für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

2. **Aufgabe:** (**6** (2+2+2) P.)
   Das System
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.015 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die *exakte* Lösung $x = (x_1, x_2)^T$.
(b) Berechne die Lösung $\tilde{x}$, die sich bei dezimaler Gleitpunktrechnung ergibt, wenn für die Zahlendarstellung nur eine dreistellige Mantisse zur Verfügung steht. Nicht darstellbare Zahlen sollen *gerundet* werden.
(c) Berechne den absoluten und den relativen Fehler von $\tilde{x}$ gegenüber der exakten Lösung in einer beliebigen Vektornorm.

3. **Aufgabe:** (**8** (3+3+2) P.)
Es sei $f(x) = x^3$.

(a) Gib das Interpolationspolynom zweiten Grades zu f und den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ in der Form $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ an.
(b) Benutze die Gleichung

$$f(x) - p_n(x) \quad = \quad w(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \qquad w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \qquad \xi \in [x_0, x_n],$$

um den Betrag des absoluten Fehlers $|f(x) - p_2(x)|$ an der Stelle $x = 0.5$ abzuschätzen.
(c) Welches Interpolationspolynom ergibt sich, wenn man die Sützstelle $x_3 = 3$ hinzunimmt.

4. **Aufgabe:** (**6** (0.5+3.5+2) P.)
Gegeben seien die Wertepaare $\{(x_i, f_i)\}_{i=0,\ldots,2} = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$.

(a) Zeichne den interpolierenden linearen Spline.
(b) Es soll ein interpolierender kubischer Spline s mit natürlichen Randbedingungen (d.h. $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$) bestimmt werden. Mache dazu den Ansatz

$$s(x) \quad = \quad \begin{cases} s_0(x) \;=\; a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) \;=\; a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, & x \in [x_1, x_2] \end{cases} \qquad (1)$$

und formuliere die Bedingungen für s_0 und s_1 an den Stützstellen.
(c) Gib das Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, 1)$ in (1) an. Das Gleichungssystem soll NICHT gelöst werden!

5. **Aufgabe:** (**5** (3+1+1) P.)

(a) Berechne die Kondition von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$.
Hinweis: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
(b) Skaliere A durch Links-Multiplikation mit einer Diagonalmatrix so, dass alle Zeilensummen gleich sind. Es genügt, die Diagonalmatrix anzugeben.
(c) Welche Größe versucht man mit der Skalierung einer Matrix zu beeinflussen?

6. **Aufgabe:** (**7** (1+6) P.)
Das Randwertproblem

$$-u''(x) + u'(x) = x, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 1, u(1) = 0$$

soll mit einem Differenzenverfahren auf dem Gitter $x_i = ih, i = 0, \ldots, n$ für die Schrittweite $h = 1/n$ gelöst werden. Dabei soll die erste Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten erster Ordnung,

$$\delta_h u(x) \quad := \quad \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h},$$

und die zweite Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung,

$$D_{2h} u(x) \quad := \quad \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)}{h^2},$$

ersetzt werden.

(a) Welche der Werte der Näherungslösung $u_i \approx u(x_i), i = 0, \ldots, n$ ergeben sich aus den Randbedingungen?
(b) Was sind die restlichen Unbekannten? Schreibe die Matrix A und die rechte Seite b des sich ergebenden linearen Gleichungssystems $Au = b$ für die restlichen Unbekannten auf.

7. **Aufgabe:** (**4** (2+2) P.)

(a) Welche Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ nutzen die Positiv-Definitheit von A aus?
(b) Welche beiden Voraussetzungen müssen (als Faustregel) erfüllt sein, damit ein gegebenes Problem mit einem