Elliptische DGL – Anwendungen

5. ÜBUNG

1. Lösen Sie folgendes Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitgleichung mit Hilfe der Fouriermethode:
$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(0,x) = \sin x,$
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$

2. Bestimmen Sie die Lösung der Laplace–Gleichung im Innengebiet $D_i:\ x^2+y^2<1$ und im Außengebiet $D_a:\ x^2+y^2>1$, die die Randbedingung
$u(r,\varphi) = 1 + 8\sin 2\varphi - 3\cos\varphi$ für $(x,y) \in \partial D$ erfüllt.

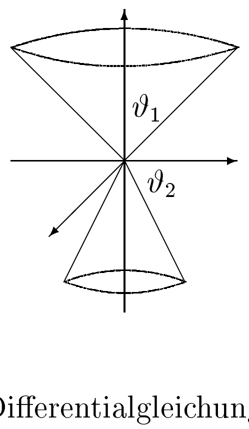
3. Bestimmen Sie die Lösung der Laplace–Gleichung im Gebiet $D:\ x^2+y^2<1$ bei der Randbedingung 2. Art $\frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ für $(x,y) \in \partial D$.

4. Bestimmen Sie die Lösung der DGl $\Delta u = 0$ für $(x,y) \in D : x^2+y^2+2x < 0$, welche die RB $u(x,y) = 4x^3 + 6x - 1$, $(x,y) \in \delta D$ erfüllt.

5. Bestimmen Sie die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung $\Delta u = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ für die Raumladungsdichte $\varrho = \varrho_0 r^n,\ r = \sqrt{x^2+y^2}$, ($\varepsilon$ Dielektrizitätskonstante).

6. Bestimmen Sie das Potential u in der Umgebung von zwei kegelförmigen Elektroden, deren Spitzen gegeneinander isoliert sind.

Kugelkoordinaten: $u(r,\vartheta,\varphi) = u(\vartheta)$
RB: $u(\vartheta_1) = u_1 = \text{konst}$
RB: $u(\vartheta_2) = u_2 = \text{konst}$



7. Bestimmen Sie die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung $\Delta u = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ für die Raumladungsdichte $\varrho = \varrho_0 r^n,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ($\varepsilon$ Dielektrizitätskonstante) bei Vorliegen eines kugelsymmetrischen Feldes $u(r)$.