Eindeutigkeit von Lösungen von PDGL

6. ÜBUNG

Wiederholung: Satz von Gauß

Warum sind Trommeln rund ?
Theorie zu den Eigenschwingungen von quadratischen und kreisförmigen Membranen.

1. Beweisen Sie die Folgerung 4.8 (Abschnitt 4.3, Seite 71) der Vorlesung und die zusätzliche Behauptung, daß die dort auftretende Grenzfunktion u harmonisch ist. Benutzen Sie dabei die Tatsache, daß die folgende Umkehrung des Mittelwertsatzes für harmonische Funktionen gilt: Ist $w \in C(\bar{G})$ und gilt für jedes $x \in G$ und jede Kugel $B(x,r) \subset G$ die Beziehung

$$w(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} w(y)\, dy, \tag{1}$$

so ist w harmonisch.

2. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Lösung des 3. Randwertproblems für die Laplacegleichung (Benutzen Sie Lemma 4.10 aus der Vorlesung).

3. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand Γ, $v \in C^1(\bar{G})$, $u \in C^2(\bar{G})$. Beweisen Sie die Formel der partiellen Integration

$$\int\limits_G u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_G v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_\Gamma uv\, \nu_i ds, \tag{2}$$

wobei ν_i die i–te Komponente des äußeren Normalenvektors ν bezeichnet, sowie die Greensche Formel

$$\int\limits_G v \Delta u\, dx = -\int\limits_G (\nabla u, \nabla v)\, dx + \int\limits_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds. \tag{3}$$

(Hinweis zu (2): Wenden Sie den Gaußschen Satz auf die Vektorfunktion an, deren i–te Komponente gleich uv ist und deren restliche Komponenten 0 sind.)

4. Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung folgender Randwertaufgaben (dabei seien $k > 0$, $h \geq 0$ Konstanten) :

a) $\Delta u = f$ in G, $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu = g$ auf Γ $\quad (h > 0)$

b) $-\Delta u + ku = f$ in G, $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ auf Γ

c) $-\Delta u + ku = f$ in G, $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu = g$ auf Γ.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit einer "Testfunktion" integrieren Sie über G und verwenden Sie (3). (Benötigte Glattheitsvoraussetzungen seien erfüllt.)