Schwache Lösungen

8. ÜBUNG

1. Für welche ganzzahligen s gehören die folgenden Funktionen zu $H^s(-1,1)$?

   a) $f(x) = |x|$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$

2. Leiten Sie die schwache Formulierung zu folgenden Randwertproblemen her:

   a)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[k(x)(\nabla u)(x)] &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= g(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} (\Delta u)(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= g_2(x) \quad \text{auf} \quad \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(x)u(x) &= g_3(x) \quad \text{auf} \quad \Gamma_3 \qquad (\partial\Omega = \Gamma_2 \cup \Gamma_3). \end{aligned}$$

3. Gegeben sei ein glattes Gebiet Ω, welches durch eine glatte Kurve Γ_i in eine linke und rechte Hälfte geteilt wird. Die Lösung u soll die schwache Formulierung der folgenden Differntialgleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\,[a(x)\operatorname{grad}\,u] &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei soll $a(x)$ im jeweiligen Teilgebiet **positiv** und konstant sein:

$$a(x) = \begin{cases} a_1 & \text{in} \quad \Omega_1 \\ a_2 & \text{in} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

Welchen Beziehungen muß die schwache Lösung u dieser Aufgabe auf der Kurve Γ_i genügen? Setzen Sie dazu voraus, daß $u \in H^2(\Omega_j)$ $(j = 1, 2)$ gilt.