TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Institut für Mathematik Stand: 16. September 2002
Ferus / Peters

Lösungen zur Klausur vom 16.7.2002
Analysis II

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

a) $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfüllt für alle x, y, $z\in\mathbb{R}$

(i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow |f(x)-f(y)|=0 \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$, die letzte Äquivalenz folgt aus der Injektivität von f.

(ii) Symmetrie: $d(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=d(y,x)$.

(iii) Dreiecksungleichung: $d(x,y)=|f(x)-f(y)\le|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|=d(x,z)+d(z,y)$. Die Ungleichung in der Mitte folgt aus der Dreiecksungleichung für die Standardmetrik von $\mathbb{R}$.

b) Da $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ und $\lim a_n=\infty$, ist $\lim f(a_n)=1$. Also ist $f(a_n)$ in $(\mathbb{R},|\cdot|)$ konvergent und somit eine Cauchy–Folge. Daraus folgt

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\ge N\colon |f(a_n)-f(a_m)|<\epsilon\\ \Longrightarrow\ &\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\ge N\colon d(a_n,a_m)<\epsilon\end{aligned}$$

Also ist (a_n) in $(\mathbb{R},d)$ eine Cauchy–Folge.

c) Angenommen $\lim a_n=a$, d.h. $0=\lim d(a_n,a)=\lim(f(a_n)-f(a))$. Damit ist $\lim f(a_n)=f(a)\neq 1$ und das steht im Widerspruch zu $\lim f(a_n)=\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M, dann existiert ein $j\in I$ mit $a\in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein ϵ, so dass $U_\epsilon(a)\subset U_j$. Da $\lim a_n=a$ ist, exisitiert zu diesem ϵ ein $N\in\mathbb{N}$, sodass für alle $n\in\mathbb{N}$, $n\ge N$ gilt $a_n\in U_\epsilon(a)$ und damit $a_n\in U_j$. Außerdem gibt es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $i_n\in I$ mit $a_n\in U_{i_n}$. Dann ist aber

$$M\subset U_{i_0}\cup U_{i_1}\cup\ldots\cup U_{i_{N-1}}\cup U_j.$$

D.h., M wird bereits von endlich vielen U_i's überdeckt. Also ist M kompakt.

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2)^{\frac{2}{3}}}{h}=\lim_{h\to 0}|h|^{\frac{1}{3}}=0,$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2)^{\frac{2}{3}}}{h}=0.$

b) Es genügt zu zeigen, dass für

$$R(x,y) := |f(x,y) - f(0,0) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|$$

gilt

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{|R(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Das ist aber wahr, denn $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to 0} \frac{|R(x,y)|}{\|(x,y)\|} &= \lim_{(x,y)\to 0} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} \\ &= \lim_{(x,y)\to 0} \frac{|(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to 0} (x^2+y^2)^{\frac{1}{6}} = 0 \end{aligned}$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\operatorname{grad} f(0) \neq 0$, also kein lokales Extremum.

b) Es gibt keine 2–mal differenzierbar Funktion mit dieser Hesse–Matrix, also kann auch kein lokales Extremum vorliegen.

c) $\operatorname{grad} f(0) = 0$, $\det \operatorname{hess} f(0) = 3$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = -2 < 0$, also ist die Hesse–Matrix negativ definit und f besitzt bei 0 ein Maximum.

d) $\operatorname{grad} f(0) = 0$ und die Hesse–Matrix ist semidefinit (ihre Determinante ist negativ) also kann man keine Aussage machen:

1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} f(x,y) = 2(x+y, x+y), && \operatorname{hess} f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ \Longrightarrow\ &\operatorname{grad} f(0) = 0, && \operatorname{hess} f(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Da $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0)$ hat f bei 0 ein (lokales) Minimum.

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2 + x^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} f(x,y) = (1(x+y) + 3x^2, 2(x+y)), && \operatorname{hess} f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 2+6x & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ \Longrightarrow\ &\operatorname{grad} f(0) = 0, && \operatorname{hess} f(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Da $f(x,-x) = x^3$ hat f hier kein lokales Extremum.

5. Aufgabe (10 Punkte)

- $f'(x,y) = e^x \begin{pmatrix} \sin y & \cos y \\ \cos y & -\sin y \end{pmatrix}$, $\det f'(x,y) = -e^{2x} \neq 0$. Da f stetig differenzierbar ist, folgt aus dem Umkehrsatz, dass f lokal umkehrbar ist.

- $f(x,y) = f(x, y+2\pi)$, also ist f nicht injektiv und damit auch nicht global umkehrbar.

6. Aufgabe (10 Punkte)

- Nimmt f in $(x,y) \in U_1(0)$ (im Inneren von $B_1(0)$) ein globales Extremum an, so liegt bei (x,y) ein lokales Extremum vor. Daher muss $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ gelten. Nun ist $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -4y^3) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = 0$. Aber $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = -1$ und $f(1,0) = 1$, also ist Null kein globales Extremum.

- Da $B_1(0)$ kompakt ist, nimmt f Maximum und Minimum an. Wir haben gesehen, dass f dies nicht im Inneren von $B_1(0)$ tut. Also muss f, Maximum und Minimum auf $\partial B_1(0)$ annehmen. Wenn f in $(x,y) \in \partial B_1(0)$ ein Maximum oder ein Minimum annimmt, dann muss f in (x,y) ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$ besitzen. Da $\operatorname{grad} g(x,y) = (2x, 2y) \neq 0$ ist für $g(x,y) = 1$, muss ein ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y) \quad \text{und} \quad g(x,y) = 1 \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 1 \\
\Leftrightarrow &x = 0, y = \pm 1, \lambda = -2 \quad \text{oder} \quad y = 0, x = \pm 1, \lambda = 1
\end{aligned}$$

  Es ist $f(0, \pm 1) = -1$ und $f(\pm 1, 0) = 1$, also ist das Maximum von f gleich 1 und das Minimum von f gleich -1.

7. Aufgabe (10 Punkte)

a) Es gilt $\operatorname{grad} E(\varphi, \omega) = (\sin\varphi, \omega) = 0 \Leftrightarrow w = 0$ und $\cos\varphi = \pm 1$. Wenn $(\varphi, \omega) \in M(c)$ und $c \neq \pm 1$, dann ist $\operatorname{grad} E(\varphi, \omega) \neq 0$, also $D_{(\varphi,\omega)}E$ surjektiv. Da E stetig differenzierbar ist, ist $M(c)$ eine 1–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

b) $E(x(0)) = -1 + \frac{1}{2}\omega_0^2$ und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} E(x(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}(-\cos(\varphi(t)) + \frac{1}{2}\omega^2(t)) = \sin\varphi(t)\dot{\varphi}(t) + \omega(t)\dot{\omega}(t) \\
&= \sin\varphi(t)\omega(t) - \omega(t)\sin\varphi(t) = 0
\end{aligned}$$

  Also ist $E(x(t)) - \frac{1}{2}\omega_0^2 - 1$, und damit $x(t) \in M(\frac{1}{2}\omega^2 - 1)$.

c) Da die linke Seite der Differentialgleichung, d.h. $(\omega, \varphi) \mapsto (\omega, -\sin\varphi)$ stetig differenzierbar ist, ist das AWP nach dem Satz von Picard-Lindelöf (Variante für den Hausgebrauch) lokal eindeutig lösbar.