TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Institut für Mathematik Abgabe: 30.4. i.d. VL
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS02/AnalysisII`

1. Übung Analysis II

(Metriken, offene und abgeschlossene Mengen)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

a) Auf $C^0([a,b])$ definiert $d^1(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ eine Metrik.

b) Die offenen Mengen von $(C^0([a,b]), d^1)$ sind auch in $(C^0([a,b]), d^{\sup})$ offen.

c) Zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $k > 0$ gibt es eine Funktion $f \in C^0([a,b])$ mit $d^{\sup}(0,f) > k$ und $d^1(0,f) < \epsilon$. Insbesondere gilt die Umkehrung von $b)$ nicht.

2. Aufgabe

Sei $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von metrischen Räumen und $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$. Dann ist

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x,y)}{1 + d_i(x,y)}$$

eine Metrik auf X und die Mengen der Form $U = \prod_{i=0}^{\infty} U_i$, U_i offen in (X_i, d_i), sind offene Mengen in (X, d).

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass $\delta(x,y) := \arctan|x-y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert, deren offene (und abgeschlossene) Mengen mit den offenen (und abgeschlossenen) Mengen der Standardmetrik $d(x,y) = |x-y|$ übereinstimmen. Ist $(\mathbb{R}, d)$ beschränkt?

2. Aufgabe

Skizzieren Sie die ϵ–Umgebungen $U_\epsilon(a)$ für $a \in \mathbb{R}^2$ zu den Metriken d^p, $p \geq 1$. (Beginnen Sie mit $p = 1, 2, \infty$.) Was passiert für $p = \frac{1}{2}$?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (U–Bahn Metrik) (6 Punkte)

Sei X die Menge der Berliner U–Bahnstationen und $d(x,y)$ für x, $y \in X$ die Länge der kürzesten Schienenverbindung zwischen x und y.
Zeigen Sie, dass (X,d) eine Metrik ist. Ist dieser Raum beschränkt? Bestimmen Sie die offenen und abgeschlossenen Teilmengen von (X,d).

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die (offenen) ϵ–Umgebungen eines beliebigen metrischen Raumes wirklich offen sind.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie den Abstand der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = |x|$ einmal in $(C^0([-1,1]), d^{\sup})$ und einmal in $(C^0([-1,1]), d^1)$ (s. Übungsaufgabe 1).

Gesamtpunktzahl: 15