TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Institut für Mathematik Abgabe: 7.5.
Ferus / Peters `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS02/AnalysisII`

2. Übung Analysis II

(Metrische Topologie, Konvergenz und Vollständigkeit, gleichmäßige Konvergenz)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Sei $Y \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d).

a) $A = \overset{\circ}{Y}$ genau dann, wenn A eine offene Teilmenge von X ist, die in Y enthalten ist, und jede andere offene Teilmenge von X, die in Y enthalten ist, enthält.

b) $B = \bar{Y}$ genau dann, wenn B eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, die Y enthält, und in jeder anderen abgeschlossenen Teilmenge, die Y enthält, enthalten ist.

2. Aufgabe

Geben Sie Beispiele für Folgen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ an, deren Durchschnitt abgeschlossen, offen bzw. weder offen noch abgeschlossen ist.

3. Aufgabe

Sei $f_k \in C^0[a, b]$ eine gegen $f \in C^0[a, b]$ gleichmäßig konvergente Folge. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b f_k(x)dx.$$

Obige Behauptung gilt nicht, wenn (f_k) nur punktweise konvergiert.

4. Aufgabe

Sei $f_k \in C^1[a, b]$ eine gegen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ punktweise konvergente Folge, deren Ableitungen gleichmäßig konvergieren. Dann ist f stetig differenziebar und es gilt

$$f'(x) = \lim f_k'(x).$$

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Zeigen Sie:

a) $Y = \overset{\circ}{Y} \iff Y$ offen $\iff \partial Y \cap Y = \emptyset$.

b) $Y = \bar{Y} \iff Y$ abgeschlossen $\iff \partial Y \subset Y$.

2. Aufgabe

Sei M ein vollständiger, nicht–leerer, beschränkter metrischer Raum. Weiter sei $f\colon M \to M$ eine kontrahierende Abbildung. Dann besteht der Durchschnitt der Mengenfolge: $M_0 = M$, $M_{k+1} = f(M_k)$ aus genau einem Punkt. Geben Sie eine Abschätzung für den Durchmesser von M_k an.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ nicht vollständig ist, dass aber die offenen Mengen von $(\mathbb{R}, d)$ mit denen von $(\mathbb{R}, d^1)$ übereinstimmen.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche sind abgeschlossen?
$A_1 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,\}$, $A_2 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\,\}$, $A_3 = A_1 \cap A_2$, $A_4 = A_1 \cup A_2$ und $A_5 = A_3 \cap \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 3\,\}$.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz unter der Voraussetzung, dass nicht f sondern $f^m = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m\text{–mal}}$ kontrahierend ist.

Gesamtpunktzahl: 15