TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Institut für Mathematik Abgabe: 28.5.
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS02/AnalysisII

5. Übung Analysis II

(gleichmäßige Stetigkeit, normierte Vektorräume)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung eine nicht stetige lineare Abbildung von $C^1([0,1])$ nach $C^0([0,1])$ ist, wenn man beide Vektorräume mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$ versieht.

b) Verwendet man allerdings auf $C^1([0,1])$ die Norm $\|f\| = \|f\|_{\sup} + \|f'\|_{\sup}$, so wird die Ableitung eine stetige Abbildung von $C^1([0,1])$ nach $C^0([0,1])$.

c) Eine Konsequenz von b) ist, dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_{\sup}$ auf $C^1([0,1])$ nicht äquivalent sind. Warum ist das kein Widerspruch zu dem in der VL bewiesen Satz: Zwei Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind äquivalent.

2. Aufgabe

Seien V und W zwei normierte Vektorräume und V endlich dimensional. Sei $L(V,W)$ versehen mit der Operatornorm. Sei (A_n) eine Cauchy–Folge in $L(V,W)$, dann ist $(A_n(v))$ für alle $v \in V$ eine Cauchy–Folge.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine gleichmäßig stetige Funktion zwischen zwei metrischen Räumen Cauchy–Folgen auf Cauchy–Folgen abbildet.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $W = \{\, (a\cos + b\sin)\big|_{[0,2\pi]} \mid a,b \in \mathbb{R} \,\} \subset C^1([0,2\pi])$ versehen mit der Norm $\|f\| = \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx$.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon W \to \mathbb{R}^2$, $(a\cos + b\sin)\big|_{[0,2\pi]} \mapsto (a,b)$ ein Isomorphismus ist, und dass für alle $f \in W$ gilt $\|\Phi(f)\| = \|f\|$.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung $A\colon W \to W$, $f \mapsto f'$ eine stetige lineare Abbildung ist, und dass gilt

$$\Phi \circ A \circ \Phi^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

c) Zeigen Sie direkt und mit Hilfe von b), dass $A^4 = A \circ A \circ A \circ A = \mathrm{Id}\,\big|_W$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Seien V und W zwei normierte Vektorräume und V endlich dimensional. Zeigen Sie: Wenn W ein Banachraum ist, so ist $L(V,W)$ mit der Operatornorm ein Banachraum.

Gesamtpunktzahl: 15