TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Institut für Mathematik Abgabe: n.V. mit dem Tutor
Ferus / Peters http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS02/AnalysisII

12. Übung Analysis II

(Differentialgleichungen)

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$\dot{x} = x, \qquad x, t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung und skizzieren Sie einige davon im Richtungsfeld.

2. Aufgabe

Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Lösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = f(t)x + g(t), \quad x(t_0) = x_0, \qquad x, t, x_0, t_0 \in \mathbb{R},$$

$f, g\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}$ stetig, her.

3. Aufgabe

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$\dot{x} = (1 - x^2)t, \qquad x, t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung, skizzieren Sie einige davon im Richtungsfeld und verallgemeinern Sie die angewandte Lösungsmethode.

Raumaufteilung in der Klausur

Die Klausur findet am Dienstag, dem 16.07.02, von 8.00 bis 10 Uhr je nach Anfangsbuchstaben ihres Nachnamens im Hörsaal

A–K: H104; L-Z: H105

statt.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

a) Wandeln Sie die gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + x = 0, \qquad x, t \in \mathbb{R}$$

in eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung um.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen.

c) Beweisen Sie, dass $\ddot{x} + x = 0$, $x(0) = 0$ genau dann, wenn $x = \sin$.

d) Lösen Sie $\ddot{x} + x = a\cos + b\sin$, für beliebige Konstanten a, $b \in \mathbb{R}$.

Hausaufgaben

Die Punkte dieses Blattes sind Zusatzpunkte.

1. Aufgabe (5 Punkte)

Skizzieren Sie die Richtungsfelder der Differentialgleichungen für x, $t \in \mathbb{R}$

$$a) \quad \dot{x} = -\frac{t}{x},\ x > 0, \qquad b) \quad \dot{x} = \frac{x}{t}, t \neq 0,$$

bestimmen Sie alle ihre Lösungen und skizzieren Sie einige davon im Richtungsfeld.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen sind dehnungsbeschränkt (= lipschitzstetig)?

a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

c) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt: $h\colon K \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}.$$

Gesamtpunktzahl: 15