Technische Universität Berlin SS 2003
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2

1. Übung "Analysis II"

1.) (a) Bestimmen Sie Stammfunktionen zu folgenden Ausdrücken:

$$f_1(x) := \sqrt{2x+3}, \quad f_2(x) := x^2 \sin 2x, \quad f_3(x) := \frac{\arctan x}{1+x^2}$$

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_{-1}^{1} x\, e^{-x^2}\, dx, \quad \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx$$

3+2 Punkte

2.) Zeigen Sie ohne zu differenzieren:

(a)

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

.

(Tip: Subst. $t = \tan\frac{x}{2}$).

(b)

$$a \neq 0 : \int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}a^3} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}ax+a^2}{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}a^3}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{a}x+1\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{a}x-1\right)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Tip: Zerlegen Sie den Nenner in komplexe Linearfaktoren und fassen Sie diese zu quadratischen Polynomen zusammen oder umgehen Sie diese Rechnung mittels der Erweiterung $f(x) = ((x^4+2a^2x^2+a^4) - 2a^2x^2)$.

3+3 Punkte

3.) Entscheiden Sie mit dem Integralkriterium, welche der folgenden Reihen konvergieren.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^k}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln n \ln\ln n}, \quad \alpha > 0.$$

4 Punkte

4.) Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, stetig und es gelte:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| < \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Zeigen Sie: f hat eine Nullstelle.

2 Punkte

Abgabe: 28.4.03 in der Übung.