Technische Universität Berlin SoSe 03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII

10.Übung „Analysis II “

38.) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch die Vorschrift:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} .$$

Berechnen Sie die partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ von f. Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar? **6 Punkte**

39.) Vorgegeben seien die Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; x = (x_1, x_2, x_3)^t \mapsto (x_1 + x_2^2, x_1 x_2^2 x_3)^t,$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; u = (u_1, u_2)^t \to (u_1^2 + u_2, u_1 u_2, e^{u_2})^t.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi- Matrix von f und g bzgl. den Standardbasen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches.

(b) Berechnen Sie die Jacobi- Matrix von $g \circ f$ in jedem Punkt $(x_1, x_2, x_3)^t$ auf zwei Arten:

(i) Einmal direkt durch Berechnung von $g \circ f$.

(ii) Einmal mit Aufgabenteil (a) und der Kettenregel.

4 + 4 + 2 Punkte

40.) Leiten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; x = (x_1, x_2, x_3)^t \mapsto x_1 x_2 x_3$ entlang der Längen- und Breitenkreise auf der Sphäre $\partial B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ ab.

5 Punkte

41.) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ gilt: $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Beweisen Sie den Eulerschen Satz für homogene Funktionen:
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und homogen vom Grad α, so gilt für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) x_k = \alpha f(x).$$

4 Punkte

42.) (a) Es sei $r : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^+; x \mapsto \|x\|_2$, und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion aus $C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für kugelsymmetrische Funktionen $u(x) = \phi(\|x\|_2)$ gilt:

$$\Delta u = \phi'' \circ r + \frac{n-1}{r} \phi' \circ r, r > 0$$

Bitte wenden!

(b) **Zusatzaufgabe:** Bestimmen Sie sämtliche kugelsymmetrischen harmonischen Funktionen im $\mathbb{R}^n$.

5 Punkte + 4 Sonderpunkte

$\sum$ **30 Punkte**

Abgabe: 30.6.03, in der Übung.