Technische Universität Berlin SS 2003
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2

2. Übung "Analysis II"

5.) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Konvergieren die Integrale $\int_{a+}^{b} f\,dx$ und $\int_{a+}^{b} g\,dx$, so konvergiert das Integral $\int_{a+}^{b} fg\,dx$.

(b) Existiert das Integral $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, so gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(c) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F(x) := \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$. Dann ist F eine Stammfunktion zu f.

6 Punkte

6.) Überprüfen Sie, welche der folgenden Integrale konvergieren bzw. absolut konvergieren.

(a) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$ (b) $\int\limits_0^\infty x^x e^{-x^2}\,dx$ (c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ (d) $\int\limits_1^\infty \sin x^2\,dx$.

12 Punkte

7.) (a) Es sei $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ und $g : [x,y] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für eine Folge $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $A(t) := \sum\limits_{x \le n \le t} a_n$.
Zeigen Sie die „Regel der partiellen Summation“:

$$\sum_{x \le n \le y} a_n\, g(n) = A(y)g(y) - \int\limits_x^y A(t)\, g'(t)\,dt$$

(Tipp: Betrachten Sie: $A(y)g(y) - \sum\limits_{x \le n \le y} a_n g(n)$ und wenden Sie den Fundamentalsatz an.)

Bitte wenden!

(b) Leiten Sie aus (a) eine einfache Form der sog. „Eulerschen Summenformel" her:
Es sei $x < y$ und $g : [x, y] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\sum_{x<n\leq y} g(n) = \int_x^y g(t)\,dt + \int_x^y (t - [t])\, g'(t)\,dt + ([y] - y)\,g(y) - ([x] - x)\,g(x)\,.$$

(Tipp: Was ist a_n? Was ist $A(t)$? Achten Sie auf die verschiedene Summation in (a) und (b).)
Die Eulersche Summenformel eignet sich hervorragend, um asymptotische Aussagen über Summen der Form $\sum_{x<n\leq y} g(n)$ zu erhalten. Ein Beispiel findet sich in (c).

(c) Für $y > 1$ gilt: $\sum\limits_{n=1}^{[y]} \frac{1}{n} = \sum\limits_{1\leq n\leq y} \frac{1}{n} = \log y + \gamma + \varphi(y)$, wobei $\varphi : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion darstellt, die $|\varphi(y)| \leq \frac{1}{y}$ erfüllt. Dabei ist γ die Euler-Mascheroni-Konstante.

(Tipp: Arbeiten Sie folgende Punkte ab: Warum konvergiert $\int\limits_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt$? Benutzen Sie (b) für die Gleichung: $\sum\limits_{1\leq n\leq y} \frac{1}{n} = \log y + 1 - \int\limits_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt + \int\limits_y^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt - \frac{y-[y]}{y}$. Setzen Sie $\varphi(y) := \int\limits_y^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt - \frac{y-[y]}{y}$ und schätzen Sie wie gefordert ab. Beantworten Sie ganz zum Schluss die Aussage über γ.)

4+4+4 Punkte

$\sum$ 30 Punkte

Abgabe: 5.5.2003, in der Übung.

Die Zusatzübung für LAKs findet freitags 10 -12 im MA 042 statt.

Da am Ostermontag die Tutorien ausfallen, findet ausnahmsweise am Freitag, den 25.4.03 von 8-10 im MA 751 ein zusätzliches Tutorium statt.

Die Punktzahlen auf dem 1. Übungsblatt werden alle verdoppelt.