Technische Universität Berlin SoSe03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII

3.Übung „Analysis II “

8.) Betrachten Sie die Folge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f_n(x) := nx(1-x)^n.$$

(a) Berechnen Sie den Grenzwert, gegen den die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann.

(c) Es gilt dennoch $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$.

Gleichmäßige Konvergenz ist also keine notwendige Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunktion.
(Tipp: zu (b): Wo liegen die Extrempunkte der f_n?)

8 Punkte

9.) Vorgegeben sei

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f_n(x) := \frac{x}{n^2}\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$$

Zeigen Sie: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen 0, aber

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = 1.$$

Gleichmäßige Konvergenz reicht also nicht aus, um Grenzübergänge und uneigentliche Integration zu vertauschen.

(Tipp: Für die gleichmäßige Konvergenz ist die Kenntnis von $\|f_n\|_\infty$ nützlich.)

6 Punkte

10.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cosh n)x^n$.

Bitte wenden!

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\ln n}{n}} x^n.$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma(n)x^n, \quad \Gamma$ bezeichnet die Gammafunktion.

8 Punkte

11.) (a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion:

$$f(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Rechtfertigen Sie jede Umformung, in welcher Sie Grenzübergänge vertauschen.

(b) Bestimmen Sie die Summenfunktion von

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

In welchen offenen Intervallen gilt die gewonnene Summendarstellung?

8 Punkte

$\sum$ **30 Punkte**

Abgabe: 12. 5. 03 , in der Übung.