Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe02/AnalysisII

4.Übung „Analysis II “

12.) (a) Berechnen Sie das Taylorpolynom T_4^0 zu der Funktion $f(x) = \sin^2 x$ und bestimmen Sie eine Konstante $M > 0$ derart, dass

$$|f(x) - T_4^0(x)| \leq M|x|^5, \quad \text{für } x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}] \text{ ist.}$$

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom T_n^1 von $f(x) = \ln x$ durch Berechnung von $\frac{d^n \ln x}{dx^n}\Big|_{x=1}$. Zeigen Sie, dass für festes x mit $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ das Restglied von Lagrange gegen 0 für $n \to \infty$ konvergiert.

8 Punkte

13.) Zeigen Sie:

(a) Für $|x| < 1$ gilt: $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$.

(b) Für $|x| < 1$ gilt: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} x^{2k}$.

8 Punkte

14.) Beweisen Sie: Konvergiert der Quotient

$$\frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} x^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} x^{2k}, \text{ für } |x| < r, \text{ so gilt}$$

$$\frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{2k} x^{2k}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_{2k} x^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{2k} x^{2k}, \text{ für } |x| < r.$$

4 Punkte

15.) Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $x \mapsto f(x,t) = \frac{x}{e^x - 1} e^{tx}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für alle t und hinreichend kleine $|x|$ existiert eine Potenzreihenentwicklung der Form $f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$.

(b) Mit der Entwicklung $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ und den Bernoulli- Zahlen B_n sind für die $B_n(t)$ aus (a) folgende Darstellung herzuleiten:

$$B_n(t) = t^n + \binom{n}{1} B_1 t^{n-1} + \binom{n}{2} B_2 t^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} t + B_n$$

Die $B_n(t)$ heißen Bernoullische Polynome. Berechnen Sie $B_n(t)$ für $n = 0, 1, 2, 3$.

(c) Es gilt:

(i) $B_n(0) = B_n(1) = B_n$, für $n \geq 2$; $B_0(1) = B_0$, $B_1(1) = -B_1$.

(ii) $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$, für $n \geq 1$.

(iii) $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$, für $n \geq 1$.

(iv) $\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(1)\big)$, für $n \geq 1$, $\quad m \geq 1$.

(Tipp: Für (ii) und (iii) kann man entweder fleissig rechnen oder auch $\frac{d}{dt} f(x,t)$ bzw. $f(x, t+1) - f(x,t)$ betrachten.)

12 Punkte

$\sum$ **32 Punkte**

Zusatzaufgabe: Es sei $F(x) := \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}$. Es ist bekannt, dass F für jedes $R > 0$ in $|x| \leq R$ konvergiert. Zeigen Sie:

(a) $F(x) - \frac{1}{x} \longrightarrow 0$, für $x \longrightarrow 0$.

(b) $F(\frac{x}{2}) + F(\frac{x+1}{2}) = 2F(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(Tipp: zu (b): Für die n-te Partialsumme S_n von F ist zunächst zu beweisen: $S_n(\frac{x}{2}) + S_n(\frac{x+1}{2}) = 2S_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}$.)

+ 10 Sonderpunkte

Abgabe: 19. 5. 03, in der Übung.