Technische Universität Berlin SoSe 03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII

6.Übung „Analysis II “

(letztes Übungsblatt der ersten Semesterhälfte)

Im folgenden sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$.

20.) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Beweis oder Gegenbeispiel...

(a) Ein isolierter Punkt von M ist immer ein Randpunkt.

(b) Jeder innere Punkt von $\overline{M}$ ist ein innerer Punkt von M.

(c) $\forall x_1, x_2 \in X, r_1, r_2 \geq 0 : K_{r_1}(x_1) \subset K_{r_2}(x_2) \Rightarrow r_1 \leq r_2$

(d) $x \notin M$ ist genau dann ein Berührpunkt von M , wenn x sowohl Randpunkt als auch Häufungspunkt ist.

4x2 = 8 Punkte

21.) Zeigen Sie:

(a) $$\overline{M} = \bigcap_{M \subset A, A \text{ abgeschlossen}} A$$

(b) $$\mathring{M} = \bigcup_{O \subset M, O \text{ offen}} O$$

$\overline{M}$ ist also die kleinste abgeschlossenen Menge, die M enthält und $\mathring{M}$ ist die größte offene Menge, die in M enthalten ist.

6 Punkte

22.) Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in (X, d).

Zeigen Sie:

$(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

4 Punkte

Bitte wenden!

23.) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.

Für $f, g \in C^\infty(I)$ definiere $p_n(f,g) := \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty$, für $n \in \mathbb{N}^*$ und $p_0(f,g) := \|f - g\|_\infty$.

Zeigen Sie:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n$ ist keine Metrik auf $C^\infty(I)$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : p_n$ ist Pseudometrik auf $C^\infty(I)$.

(c) $$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f,g)}{1 + p_n(f,g)}$$

definiert eine Metrik auf $C^\infty(I)$.

(d) $C^\infty(I)$ ist bezüglich der in c) definierten Metrik vollständig.

2 + 3 + 4 + 5 = 14 Punkte

$\sum$ **32 Punkte**

Abgabe: 02.06.03, in der Übung.