Technische Universität Berlin SoSe 03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe02/AnalysisII`

7. Übung „Analysis II “

24.) (a) Vorgegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Stetigkeit von f bzgl. der euklidischen Metrik.

(b) Es sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y), \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ existieren, aber f ist in $(0,0)$ nicht stetig.

4+4 Punkte

25.) Die Menge $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ sei mit folgender Metrik versehen:

$$d\Big((x_1,y_1);(x_2,y_2)\Big) := \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}.$$

(a) Zeigen Sie: $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; (x,y) \mapsto x^y$ ist stetig.

(b) Prüfen Sie, ob für jede Folge $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$ der Grenzwert der Folge $f(x_n,y_n)$ existiert.

3+ 3 Punkte

26.) Seien X, Y nichtleere Mengen und $\wp(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X. Wir bilden den sogenannten *diskreten topologischen Raum* $(X, \wp(X))$ sowie den *trivialen topologischen Raum* $(Y, \{\varnothing, Y\})$.
Zeigen Sie:

$$f : Y \to X \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist konstant.}$$

4 Punkte

Bitte wenden!

27.) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, A, B seien nichtleere Teilmengen von X.
Wir definieren den Abstand zwischen A und B durch:

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Für $x \in X$ setzen wir abkürzend $d(x, B) := d(\{x\}, B)$.
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

(b) x ist Randpunkt von $A \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, X \setminus A) = 0$.

(c) $f(x) := d(x, A)$ ist auf X gleichmässig stetig.

(d) Sind A, B abgeschlossen und disjunkt, so existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$.

(Tipp zu (c): Zeigen Sie: $\forall x, y \in X : |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.)

2+3+3+4 Punkte

Abgabe: 10.6.03, in der Vorlesung.