Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII

# 8. Übung „Analysis II “

28.) Kann man aus den folgenden offenen Überdeckungen $\mathcal{O}_i$ der Mengen $S_i$ endliche Teilüberdeckungen auswählen? Sind die Mengen $S_i$ kompakt?
Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) $S_1 = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{O}_1 = \{]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}[\}$, für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

(b) $S_2 = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $\mathcal{O}_2 = \{]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}[\} \cup \{]-\varepsilon, \varepsilon[\}$, für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

(c) $S_3 = ]0,1[$, $\mathcal{O}_3 = \{]-\varepsilon, 1+\varepsilon[ \mid 0 < \varepsilon < 1\}$.

**3 x 2 Punkte**

29.) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Beweis oder Gegenbeispiel...
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.

(a) Jede endliche Teilmenge $M \subset X$ ist kompakt.

(b) Jede offene Überdeckung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist eine Überdeckung von $\mathbb{R}$.

(c) Aus jeder Überdeckung einer kompakten Menge mit abgeschlossenen Mengen kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen.

**2 x 2 + 1 x 4 Punkte**

30.) Seien $X, Y$ nichtleere Mengen. Wir bilden wie in Aufgabe 26 den sogenannten *diskreten topologischen Raum* $(X, \wp(X))$ sowie den *trivialen topologischen Raum* $(Y, \{\varnothing, Y\})$.
Bestimmen Sie alle kompakten Teilmengen von $X$ und $Y$.

**4 + 2 Punkte**

**Bitte wenden!**

31.) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt.
Zeigen Sie:

(a) Jede Teilmenge $M$ von $K$ ohne Häufungspunkt in $K$ ist endlich.

(b) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K$ hat eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert in $K$.

(c) Ist $X$ kompakt, so ist $X$ vollständig.

**4 + 3 + 3 Punkte**

( Aufgabenteil (b) soll mit (a) hergeleitet werden. Wer den Satz von Bolzano-Weierstrass benutzt bekommt keine Punkte !)

**Zusatzaufgabe**

32.) Sei $\varepsilon > 0$.
Finde offene Intervalle $]a_n, b_n[$, $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ]a_n, b_n[ \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

**4 Punkte**

**$\sum$ 30 + 4 Punkte**

Abgabe: 16.6.03, in der Übung.