

„Analysis II“ Was man zur Klausur auswendig können sollte

Diese Übersicht soll Ihnen helfen unwichtiges und wichtiges auseinander zu halten. Sie erhebt allerdings keinen Anspruch auf Vollständigkeit und darf nicht während der Klausur benutzt werden.

1. Grundrechenarten
+, −, Bruchrechnung, Potenzgesetze, ... auch für komplexe Zahlen
2. Ungleichungen
... auch mit Brüchen und Beträgen.
3. Binomische Formeln

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\(a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\end{aligned}$$

4. Wichtige Funktionen
Funktionsverläufe und Wertetabellen für die trigonometrischen Funktionen ergänzen!

- (a) Exponentialfunktion
 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Definition:

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Funktionalgleichung: $e^{(x+y)} = e^x e^y$

Ableitung: $(e^x)' = e^x$

Wichtige Werte: $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

- (b) Natürlicher Logarithmus

$\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

Definition: Umkehrfunktion von \exp

Funktionalgleichung: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Ableitung: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Wichtige Werte: $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

(c) Trigonometrische Funktionen

Definition: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 + \cos^2 = 1$

Additionstheoreme: $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\alpha)$,

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$

Ableitungen: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

Tangens und Cotangens: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $\cot = \frac{\cos}{\sin}$

Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Die Umkehrfunktionen heißen „arcus“Funktionen arcsin, arccos und arctan

(d) Hyperbelfunktionen

Definition: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$

Die Umkehrfunktionen heißen „Area“Funktionen Arsinh, Arcosh und Artanh.

5. Ableitungsregeln

... auch mehrdimensional

6. Integrationsregeln

sowie Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

7. Folgen und Reihen

Grenzwertsätze, Konvergenzkriterien, Regel von de L'Hospital.

Funktionenfolgen (punktweise und gleichmäßige Konvergenz, Vertauschungssätze)

Wichtige Reihen:

(a) geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

für $|q| < 1$

(b) binomische Reihe:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

mit $\binom{\alpha}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j}$

(c) harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

divergiert für $\alpha \leq 1$ und konvergiert für $\alpha > 1$

(e) Exponentialreihe s.o.

(f) Sinus- und Cosinusreihe

8. Definitionen von Grundbegriffen, ... z.B Metrik, Norm, Stetigkeit u.s.w.