Fortsetzung Beweis:

$$|f''(x_i)-M_i| \le \frac{3}{4} L \sigma^2 \quad i=0,\dots,n$$

c) **Abschätzung von $\|f'''-S'''\|$**

Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$. Dann

$$S'''(x) \equiv 6d_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}$$

$$\Rightarrow S'''(x) - f'''(x) = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} - f'''(x)$$

$$= \underbrace{\frac{M_j - f''(x_j)}{h_j}}_{|\cdot| \le \frac{3}{4} L \frac{\sigma^2}{h_j}} - \underbrace{\frac{M_{j-1} - f''(x_{j-1})}{h_j}}_{\text{dito}} + \frac{[f''(x_j) - f''(x)] - [f''(x_{j-1}) - f''(x)]}{h_j} - f'''(x)$$

$$f'''(x)(x_j - x) + f^{(4)}(\eta_1)\frac{1}{2}(x_j - x)^2$$
$$\underbrace{- f'''(x)(x_{j-1} - x)}_{f'''(x) h_j} - f^{(4)}(\eta_2)\frac{1}{2}(x_{j-1} - x)^2$$

nehmen $(x_j - x)^2 + (x_{j-1} - x)^2 \le h_j^2$

$$\Rightarrow |S'''(x) - f'''(x)| \le \frac{3}{2} L \frac{\sigma^2}{h_j} + L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{h_j} \qquad \frac{\sigma}{h_j} \le K$$

$$\le \frac{3}{2} LK\sigma + \frac{1}{2} LK\sigma =$$

$$= \underline{\underline{2 LK\sigma}}$$

d) Gleiches für $\|S''-f''\|$

$x \in [a,b] \Rightarrow \exists j : |x-x_j| \leq \frac{\sigma}{2}$

$$f''(x)-S''(x) = \int_{x_j}^{x} \underbrace{(f'''(t)-S'''(t))}_{|\,| \leq 2LK\sigma \text{ eben gezeigt}} dt + \underbrace{f''(x_j)-S''(x_j)}_{|\,| \leq \frac{3}{4}L\sigma^2}$$

$$\Rightarrow |f''(x)-S''(x)| \leq \underbrace{|x-x_j|}_{\leq \frac{\sigma}{2}} 2LK\sigma + \underbrace{\frac{3}{4}L\sigma^2}_{\leq \frac{3}{4}LK\sigma^2}$$

$$\leq \left(1+\frac{3}{4}\right)LK\sigma^2 = \frac{7}{4}LK\sigma^2$$

f', f analog, siehe Skript. $\square$

5 Numerische Integration

5.1. Newton-Cotes-Formeln

Test: Berechne $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$; Analytisch z.B. über Reihenentwicklung.

Oder: Numerisch über Quadraturformeln

Aufgabe der Num. Integration: Berechne

b

$$\int_a f(x)\,dx$$

Dabei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Grundidee der Newton-Cotes-Formeln:

- Zerlegung von $[a,b]$, äquidistant

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

- Wähle an Stelle von f das entsprechende Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

- Verwende

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx$$

Lagrangesches Interpolationspolynom

$f_i := f(x_i)$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b \prod_{\substack{k=0,\\ k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\,dx$$

Setzen $s = \frac{x-a}{h}$

$s: 0 \rightsquigarrow n$

$dx = h\,ds$

$x - x_k = (sh+a) - (kh+a)$

$= (s-k)h$

$$= h \sum_{i=0}^{n} f_i \underbrace{\int_0^n \prod_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{s-k}{i-k}\,ds}_{\sigma_k}$$

Damit insgesamt

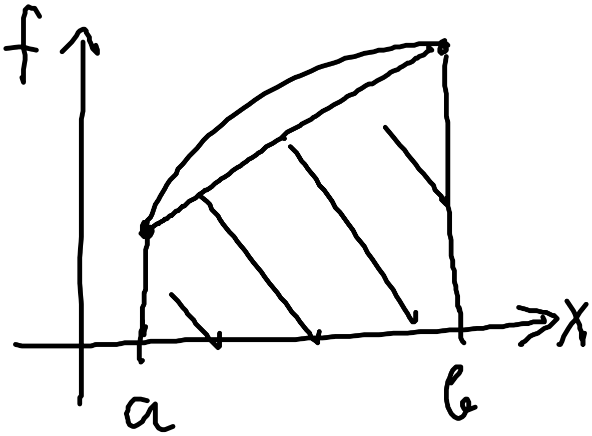
$$\boxed{\int_a^b P_n(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f_i \sigma_i}$$

<u>$n=1$</u> σ_0, σ_1 zu bestimmen

$$\sigma_0 = \int_0^1 \frac{s-1}{0-1}\,ds = -\int_0^1 (s-1)\,ds = -\frac{1}{2}(s-1)^2\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

analog $\sigma_1 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) = \underline{\underline{\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}}$$

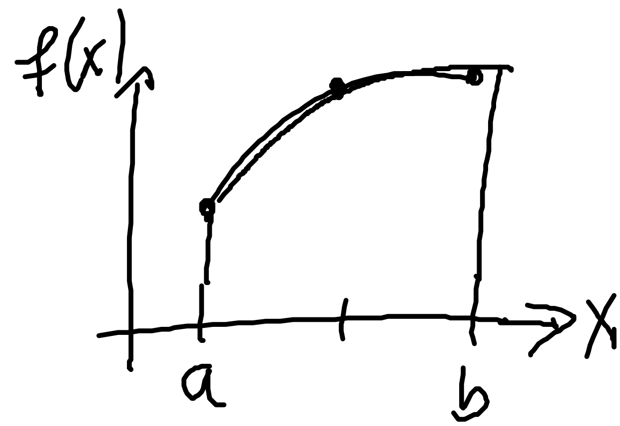


Trapezregel

$\underline{n=2}$: Man erhält

$$\sigma_0 = \sigma_2 = \frac{1}{6}, \quad \sigma_1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\underline{\underline{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}}$$



Simpson-Regel

$\underline{n=3}$ analog

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{8}\left(f(a) + 3 f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3 f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right)$$

Newtonsche $\frac{3}{8}$-Regel

Durch Ausklammern eines Faktors $ns \in \mathbb{N}$

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i}{ns}$$

Tabelle

n	α_i	ns	Fehler
1	1 1	2	$\frac{h^3}{12} f''(\xi)$
2	1 4 1	6	$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$
3	1 3 3 1	8	$\frac{h^5 3}{80} f^{(4)}(\xi)$

Bezeichnung (Abgeschlossene) Newton-Cotes Formeln

$n=8$: $ns = 28350$

α_i: 989, 5888, −928, 10496, −4540, 10496, ...

negative Gewichte

Satz 57 Für den Approximationsfehler bei Verwendung der Newton-Cotes-Formeln gilt

$$\int_a^b P_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = h^{n+1} K f^{(n)}(\xi)$$

o.B.

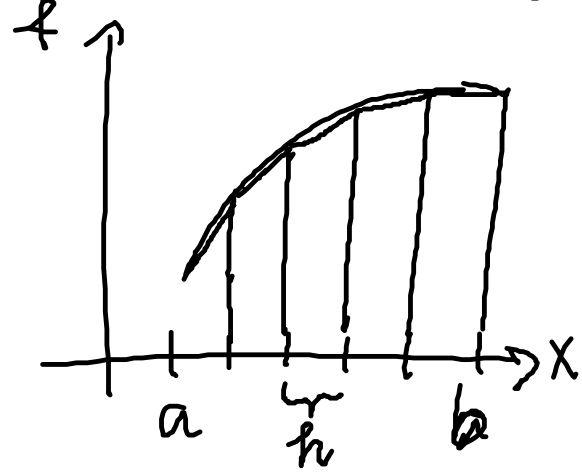
Beweis: z.B. Buch von R. Plato (TUB)

Summierte Newton-Cotes-Formeln

Grundidee: Zerlegung wie bisher: $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx}_{\text{Darauf Anwendung von Newton-Cotes-Formeln.}}$$

Summierte Trapezregel



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T(h) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right)$$

Fehlerabschätzung

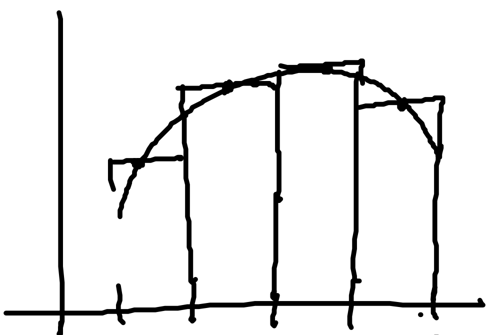
Für ein Intervall $\left|\quad\right| \le \frac{h^3}{12} \underbrace{\left|f''(\xi_i)\right|}_{\le M}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$

für $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \left|T(h) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le n \cdot \frac{h^3}{12} M \le \underline{\underline{\frac{b-a}{12} M h^2}}$$

$n = \frac{b-a}{h}$

Summierte Mittelpunktsregel



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$