

Fortsetzung Beweis:

$$|f''(x_i) - M_i| \leq \frac{3}{4} L \sigma^2 \quad i=0, \dots, n$$

c) Abschätzung von $\|f''' - S'''\|$

Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$. Dann

$$S'''(x) \equiv b_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}$$

$$\Rightarrow S'''(x) - f'''(x) = \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} - f'''(x)$$

$$= \frac{M_j - f''(x_j)}{h_j} - \frac{M_{j-1} - f''(x_{j-1})}{h_j} + \frac{[f''(x_j) - f''(x)] - [f''(x_{j-1}) - f''(x)]}{h_j} - f'''(x)$$

$$| \leq \frac{3}{4} L \frac{\sigma^2}{h_j}$$

ditto

$$\begin{aligned} & f'''(x)(x_j - x) + f^{(4)}(\eta_1) \frac{1}{2} (x_j - x)^2 \\ & - f'''(x)(x_{j-1} - x) - f^{(4)}(\eta_2) \frac{1}{2} (x_{j-1} - x)^2 \\ & f'''(x) h_j \quad \text{wegen } (x_j - x)^2 + (x_{j-1} - x)^2 \leq h_j^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |S'''(x) - f'''(x)| \leq \frac{3}{2} L \frac{\sigma^2}{h_j} + L \cdot \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{h_j}$$

$$\frac{\sigma}{h_j} \leq K$$

$$\leq \frac{3}{2} L K \sigma + \frac{1}{2} L K \sigma =$$

$$= \underline{\underline{2 L K \sigma}}$$

d) Gleiches für $\|S'' - f''\|$

$$x \in [a, b] \Rightarrow \exists \xi: |x - x_j| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$f''(x) - S''(x) = \int_{x_j}^x \underbrace{(f'''(t) - S'''(t))}_{\substack{|| \leq 2LKG \\ \text{ebengemäß}}} dt + \underbrace{f''(x_j) - S''(x_j)}_{|| \leq \frac{3}{4}L(b-a)^2}$$

$$\Rightarrow |f''(x) - S''(x)| \leq \underbrace{|x - x_j|}_{\leq \frac{b-a}{2}} \cdot 2LKG + \frac{3}{4}L(b-a)^2 \leq \underbrace{\left(1 + \frac{3}{4}\right)}_{\leq \frac{7}{4}} LKG^2 = \frac{7}{4} LKG^2$$

f', f analog, siehe Skript. □

5. Numerische Integration

5.1. Newton-Cotes-Formeln

Test: Berechne $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$; Analytisch z.B. über Reihenentwicklung.

Oder: Numerisch über Quadraturformeln

Aufgabe der Num. Integration: Berechne

$$\int_a^b f(x) dx$$

Dabei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Grundidee der Newton-Cotes-Formeln:

- Zerlegung von $[a, b]$, "äquidistant"

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

- Wähle an Stelle von f das entsprechende Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i=0, \dots, n$$

- Verwende

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx$$

Lagrangesches Interpolationspolynom

$$f_i := f(x_i)$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b L_i(x) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} dx$$

Setzen $s = \frac{x-a}{h}$

$s: 0 \rightarrow n$

$dx = h ds$

$x-x_k = (sh+a) - (kh+a)$

$$= h \sum_{i=0}^n f_i \underbrace{\int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{s-k}{i-k} ds}_{\tilde{G}_i}$$

Damit insgesamt

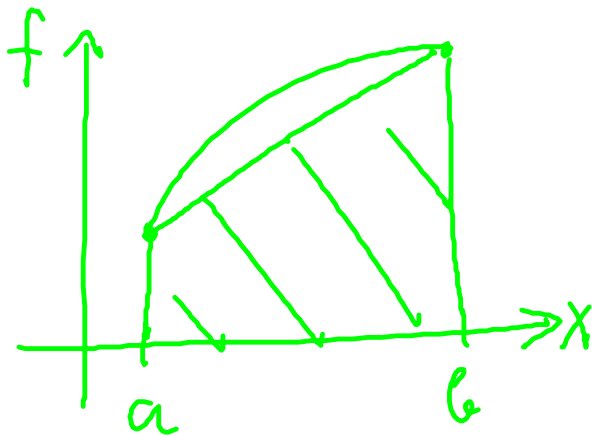
$$\int_a^b P_n(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f_i \tilde{G}_i$$

$n=1$ \tilde{G}_0, \tilde{G}_1 zu bestimmen

$$\tilde{G}_0 = \int_0^1 \frac{s-1}{0-1} ds = - \int_0^1 (s-1) ds = - \frac{1}{2} (s-1)^2 \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

analog $\sigma_1 = \frac{1}{2}$

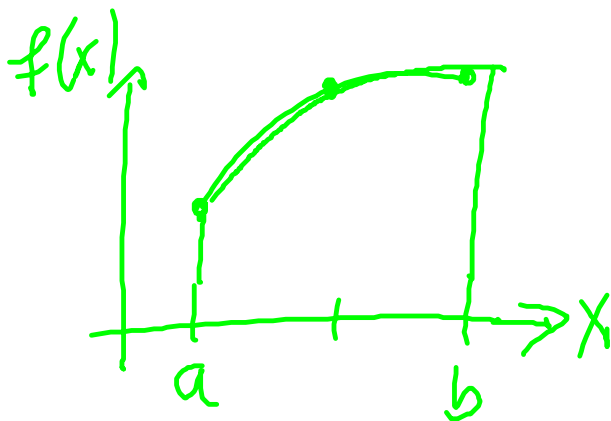
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$



Trapezregel

n=2: Man erhält
 $\sigma_0 = \sigma_2 = \frac{1}{6}$, $\sigma_1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$



Simpson-Regel

n=3 analog

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{8} (f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b))$$

Newton'sche $\frac{3}{8}$ -Regel

Durch Ausklammern eines Faktors $ns \in \mathbb{N}$

$$\bar{\sigma}_i = \frac{d_i}{ns}$$

<u>Tabelle</u>	n	d_i	ns	Fehler
	1	1 1	2	$\frac{h^3}{12} f''(\xi)$
	2	1 4 1	6	$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$
	3	1 3 3 1	8	$\frac{h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$

Bezeichnung (Abgeschlossen) Newton-Cotes Formeln

$n=8$: $ns=28350$

$d_i: 989, 5888, -928, 10496, -4540, 10496, \dots$

negatives Gewichte

Satz 57 Für den Approximationsfehler bei Verwendung der Newton-Cotes-Formeln gilt

$$\int_a^b P_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx = h^{n+1} \mathcal{L} f^{(n)}(\xi)$$

o.B.

Beweis: z.B. Buch von R. Plato (TUB)

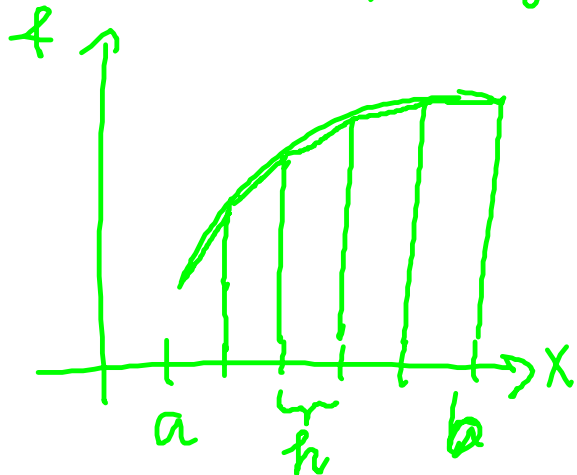
Summierte Newton-Cotes-Formeln

Grundidee: Zerlegung wie bisher: $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx}$$

Darauf Anwendung von
Newton-Cotes-Formeln.

Summierte Trapezregel



$$\int_a^b f(x) dx \approx T(h) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

$$= \frac{h}{2} (f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b))$$

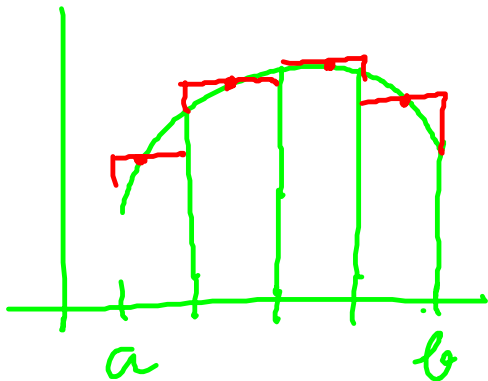
Fehlerabschätzung

Für ein Intervall $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ gilt
 $| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - T_i(h) | \leq \frac{h^3}{12} |f''(\xi_i)|$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$
wobei $|f''(\xi_i)| \leq M$

$$\Rightarrow \left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq n \cdot \frac{h^3}{12} M \leq \frac{b-a}{12} M h^2$$

$n = \frac{b-a}{h}$

Summierte Mittelpunktsregel



$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n h f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$