6. Verfahren höherer Ordnung

Es geht wieder um die Anfangswertaufgabe

$$\boxed{\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}} \quad \text{in } (t_0, t_0 + a]$$

$$I := [t_0, t_0 + a]$$

Betrachten Einschrittverfahren der Form

$$u_0 = y_0$$
$$u_{i+1} = u_i + h\,\phi(t_i, u_i, h, f), \quad i = 0, \dots, n-1$$

Wdh: Lokaler Fehler des Verfahrens

$$\tau(t, z, h, f) = h\left(\frac{y(t+h) - z}{h} - \phi(t, z, h, f)\right), \quad h > 0$$

t beliebig aus I aber fest $z := y(t)$.

Def: Das obige Einschrittverfahren heißt konsistent von der Ordnung p, wenn für alle hinreichend glatten Funktionen f und alle $t \in I$ gilt

$$|\tau(t, z, h, f)| \leq C h^{p+1},$$

wobei c unabhängig von t, z, h ist.

<u>Bemerkung</u> Bei Konsistenzordnung p kann man für den kumulativen Fehler (Gesamtfehler) die Ordnung p erwarten.

6.1. Konstruktion einfacher Verfahren höherer Ordnung

<u>Ansatz</u> $\phi(t,z,h,f) = a_1 f(t,z) + a_2 f\big(t+p_1 h, z + p_2 h f(t,z)\big)$

mit festen Konstanten a_1, a_2, p_1, p_2

Ziel der Wahl von a_i, p_i: Fehler τ von hoher Ordnung (d.h. Taylorentwicklung von τ soll mit hoher Potenz von h beginnen).

<u>Bsp</u> <u>Entwicklung von Ordnung 2</u>

$$\tau(t,z,h,f) = h\left(\frac{y(t+h)-z}{h} - \phi(t,z,h,f)\right) \qquad z = y(t)$$

$$= y(t+h) - y(t) - h\Big(a_1 f(t,z) + a_2 f\big(t+p_1 h,\, z + p_2 h f(t,z)\big)\Big)$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ f(t,y(t)) \\ = f(t,z)}}{y'(t)}\,h + \frac{1}{2}\,\underset{\uparrow}{y''(t)}\,h^2 + O(h^3) - a_1 h f(t,z)$$
$$\qquad - a_2 h f\big(t+p_1 h,\, z + p_2 h f(t,z)\big)$$

$$y' = f(t,y)$$

$$\Rightarrow y'' = f_t + f_z \cdot \underbrace{y'}_{f} = f_t + f_z f$$

$$= f(t,z)h + \frac{1}{2}h^2\big(f_t + f_z f\big) - a_1 h f(t,z) - a_2 h \Big\{ f(t,z) + f_t(t,z) p_1 h$$
$$+ O(h^3) \qquad\qquad + f_z(t,z) p_2 h f(t,z) + O(h^2) \Big\}$$

$$= h f \underbrace{(1 - a_1 - a_2)}_{\overset{(!)}{=}0} + h^2 f_t \underbrace{\left(\frac{1}{2} - a_2 p_1\right)}_{\overset{(!)}{=}0} + h^2 f_z f \underbrace{\left(\frac{1}{2} - a_2 p_2\right)}_{=0} + O(h^3)$$

$\Rightarrow$ Wir erhalten Verfahren der Konsistenzordng. 2, wenn

$$\boxed{a_1 + a_2 = 1\,, \quad a_2 p_1 = \frac{1}{2}\,, \quad a_2 p_2 = \frac{1}{2}}$$

<u>Jetzt Wahlmöglichkeiten</u>:

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}\,, \; p_1 = p_2 = 1$

Verfahrensvorschrift

$$u_{i+1} = u_i + h\frac{1}{2}\left(f(t_i,u_i) + f(t_i+h, u_i + f(t_i,u_i))\right)$$

Verfahren von Heun

• $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$$\phi = f\left(t+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(t,z)\right)$$

Modifiziertes Euler-Verfahren von Collatz

Beide Verfahren haben Ordnung h^2 und erfordern je 2 Funktionsauswertungen pro Zeitschritt.

Bsp 65 $y'(t) = -2ty^2,\ y(0) = 1$ | $f(t,z) = -2tz^2$

exakte Lösung $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Verfahrensvorschriften

Heun: $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[-2t_i u_i^2 - 2t_{i+1}\left(u_i - 2ht_i u_i^2\right)^2\right]$

Collatz: $u_{i+1} = u_i + -2\left(t_i+\frac{h}{2}\right)\left(u_i - ht_i u_i^2\right)^2$

Etwas systematischere Herangehensweise:

$$y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0$$

$$\Updownarrow \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

Grundidee: Ersetzung des Integrals durch Quadraturformel

$[t_0, t_0 + a]$: Zerlegung $t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + a$

$$y_j := y(t_j)$$

$$\Rightarrow \quad y_{j+1} = y_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s))\, ds \qquad h_j := t_{j+1} - t_j$$

Näherung für das Integral: Quadraturformel,

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s))\, ds \approx h_j \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell f(s_\ell, y(s_\ell))$$

mit passenden Gewichten γ_ℓ und Zwischenstellen s_ℓ.

$$\Rightarrow \quad y_{j+1} \approx y_j + h_j \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell f(s_\ell, \underbrace{y(s_\ell)}_{\text{unbekannt} \Rightarrow})$$

Nährung nötig

Beispiele

(i) Mittelpunktsregel als Quadraturformel

$$y_{j+1} \approx y_j + h_j f\Big(t_j + \frac{h_j}{2}, \underbrace{y\big(t_j + \tfrac{h_j}{2}\big)}_{\approx \underbrace{y(t_j)}_{y_j} + \underbrace{y'(t_j)}_{f(t_j, y_j)} \frac{h_j}{2}}\Big)$$

$$\Rightarrow y_{j+1} \approx y_j + h_j f\Big(t_j + \frac{h_j}{2}, y_j + \frac{h_j}{2} f(t_j, y_j)\Big)$$

d.h.

$$\boxed{u_{j+1} = u_j + h_j f\Big(t_j + \frac{h_j}{2}, u_j + \frac{h_j}{2} f(t_j, u_j)\Big)}$$

Klass. Verfahren von Runge, 1895

Verfeinerung der Notation:

$$k_1(t_j, y_j) := f(t_j, y_j)$$
$$k_2(t_j, y_j) := f\Big(t_j + \frac{1}{2} h_j, y_j + \frac{1}{2} h_j k_1(t_j, y_j)\Big)$$

$\Rightarrow$ Verfahren von Runge lautet

$$u_{j+1} = u_j + h\,k_2(t_j, y_j)$$

(vi) Trapezregel

$$y_{j+1} \approx y_j + \frac{h}{2}\Big(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, \underbrace{y_{j+1}}_{\approx y_j + f(t_j, y_j) h_j})\Big)$$

$\Rightarrow$ Verfahren

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h_j}{2}\Big(f(t_j, u_j) + f(t_j + h_j, u_j + h_j f(t_j, u_j))\Big)$$

Verfahren von Heun

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h_j}{2} k_1(t_j, u_j) + \frac{h_j}{2} k_2(t_j, u_j)$$

$$\text{mit } k_2 = f(t_j + h_j, u_j + h_j k_1)$$

Zurück zur Summe m

$$h_j \sum_{\ell=1} \gamma_\ell \underbrace{f(s_\ell, y(s_\ell))}_{\approx k_\ell(t_j, y_j)}$$

$$s_\ell = t_j + \alpha_\ell h_j$$

Rekursiv

$$k_1(t_j, y_j) = f(t_j, y_j)$$

$$k_2(t_j, y_j) = f(t_j + \alpha_2 h_j, y_j + h_j \beta_{21} k_1(t_j, y_j))$$

$$k_3(t_j, y_j) = f(t_j + \alpha_3 h_j, y_j + h_j(\beta_{31} k_1(t_j, y_j) + \beta_{32} k_2(\ldots)))$$

$$\vdots$$

$$k_m(t_j, y_j) = f(t_j + \alpha_m h_j, y_j + h_j(\beta_{m1} k_1 + \ldots + \beta_{m,m-1} k_{m-1}))$$

$$\boxed{u_{j+1} = u_j + h_j \sum_{\ell=1}^{m} \gamma_\ell k_\ell(t_j, u_j)}$$

m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren

Die k_i heißen *Stufenwerte*.