

6. Verfahren höherer Ordnung

Es geht wieder um die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \text{in } (t_0, t_0 + a] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$I := [t_0, t_0 + a]$$

Betrachten Einschrittverfahren der Form

$$u_0 = y_0$$

$$u_{i+1} = u_i + h \phi(t_i, u_i, h, f), \quad i=0, \dots, n-1$$

Wdh: Lokaler Fehler des Verfahrens

$$\tau(t, z, h, f) = h \left(\frac{y(t+h) - z}{h} - \phi(t, z, h, f) \right), \quad h > 0$$

t beliebig aus I aber fest $z := y(t)$.

Def: Das obige Einschrittverfahren heißt konsistent von der Ordnung p , wenn für alle hinreichend glatten

Funktionen f und alle $t \in I$ gilt

$$|\tau(t, z, h, f)| \leq C h^{p+1},$$

wobei c unabhängig von t, z, h ist.

Bemerkung Bei Konsistenzordnung p kann man für den kumulativen Fehler (Gesamtfehler) die Ordnung p erwarten.

5.1. Konstruktion einfacher Verfahren höherer Ordnung

Ansatz $\phi(t, z, h, f) = a_1 f(t, z) + a_2 f(t + p_1 h, z + p_2 h, f(t, z))$

mit festen Konstanten a_1, a_2, p_1, p_2

Ziel der Wahl von a_i, p_i : Fehler τ von hoher Ordnung (d.h. Taylorentwicklung von τ soll mit hoher Potenz von h beginnen).

Bsp Entwicklung von Ordnung 2

$$\tau(t, z, h, f) = h \left(\frac{y(t+h) - z}{h} - \phi(t, z, h, f) \right) \quad z = y(t)$$

$$= y(t+h) - y(t) - h \left(a_1 f(t, z) + a_2 f(t + p_1 h, z + p_2 h f(t, z)) \right)$$

$$= y'(t)h + \frac{1}{2} y''(t)h^2 + O(h^3) - a_1 h f(t, z) - a_2 h f(t + p_1 h, z + p_2 h f(t, z))$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ f(t, y(t)) \\ f(t, z) \end{matrix}$$

$$y' = f(t, y)$$

$$\Rightarrow y'' = f_t + f_z \cdot \underbrace{y'}_f = f_t + f_z f$$

$$= f(t, z)h + \frac{1}{2} h^2 (f_t + f_z f) - a_1 h f(t, z) - a_2 h \left\{ f(t, z) + f_t(t, z) p_1 h + f_z(t, z) p_2 h f(t, z) + O(h^2) \right\}$$

$$= h f \underbrace{(1 - a_1 - a_2)}_{\stackrel{(!)}{=} 0} + h^2 f_t \underbrace{\left(\frac{1}{2} - a_2 p_1\right)}_{\stackrel{(!)}{=} 0} + h^2 f_z f \underbrace{\left(\frac{1}{2} - a_2 p_2\right)}_{= 0} + O(h^3)$$

\Rightarrow Wir erhalten Verfahren der Konsistenzordnung 2, wenn

$$\boxed{a_1 + a_2 = 1, \quad a_2 p_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 p_2 = \frac{1}{2}}$$

Jetzt Wahlmöglichkeiten:

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = p_2 = 1$

Verfahrensvorschrift

$$u_{i+1} = u_i + h \frac{1}{2} \left(f(t_i, u_i) + f\left(t_i + h, u_i + f(t_i, u_i)\right) \right)$$

Verfahren von Heun

• $a_1 = 0, a_2 = 1, p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$$\phi = f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2} f(t, z)\right)$$

Modifiziertes Euler-Verfahren
von Collatz

Beide Verfahren haben Ordnung h^2 und erfordern je 2 Funktionsauswertungen pro Zeitschritt.

Bsp 65 $y'(t) = -2tz^2, y(0) = 1$ | $f(t, z) = -2tz^2$
exakte Lösung $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Verfahrensvorschriften

Heun: $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} \left[-2t_i u_i^2 - 2t_{i+1} (u_i - 2ht_i u_i^2) \right]$

Collatz: $u_{i+1} = u_i + -2\left(t_i + \frac{h}{2}\right) (u_i - ht_i u_i^2)$

Etwas systematischere Herangehensweise:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Grundidee: Ersetzung des Integrals durch Quadraturformel

$[t_0, t_0 + a]$: Zerlegung $t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + a$

$$Y_j := y(t_j)$$

$$\Rightarrow Y_{j+1} = Y_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds \quad h_j := t_{j+1} - t_j$$

Näherung für das Integral: Quadraturformel,

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, y(s)) ds \approx h_j \sum_{\ell=1}^m \delta_\ell f(s_\ell, Y(s_\ell))$$

mit passenden Gewichten δ_ℓ und Zwischenstellen s_ℓ .

$$\Rightarrow Y_{j+1} \approx Y_j + h_j \sum_{\ell=1}^m \delta_\ell f(s_\ell, Y(s_\ell))$$

unbekannt \Rightarrow

Beispiele

Näherung nötig

(i) Mittelpunktsregel als Quadraturformel

$$Y_{j+1} \approx Y_j + h_j \cdot f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, y\left(t_j + \frac{h_j}{2}\right)\right)$$

$$\approx \underbrace{y(t_j)}_{Y_j} + \underbrace{y'(t_j)}_{f(t_j, Y_j)} \frac{h_j}{2}$$

$$\Rightarrow Y_{j+1} \approx Y_j + h_j \cdot f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, Y_j + \frac{h_j}{2} f(t_j, Y_j)\right)$$

d.h.

$$U_{j+1} = U_j + h_j \cdot f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, U_j + \frac{h_j}{2} f(t_j, U_j)\right)$$

Klass. Verfahren von Runge, 1895

Verfeinerung der Notation:

$$k_1(t_j, Y_j) := f(t_j, Y_j)$$

$$k_2(t_j, Y_j) := f\left(t_j + \frac{1}{2}h_j, Y_j + \frac{1}{2}h_j k_1(t_j, Y_j)\right)$$

\Rightarrow Verfahren von Runge lautet

$$u_{j+1} = u_j + h k_2(t_j, Y_j)$$

(iii) Trapezregel

$$Y_{j+1} \approx Y_j + \frac{h}{2} \left(f(t_j, Y_j) + f(t_{j+1}, Y_{j+1}) \right) \\ \approx Y_j + f(t_j, Y_j) h_j$$

⇒ Verfahren

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h_j}{2} \left(f(t_j, u_j) + f(t_j + h_j, u_j + h_j f(t_j, u_j)) \right)$$

Verfahren von Heun

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h_j}{2} k_1(t_j, u_j) + \frac{h_j}{2} k_2(t_j, u_j)$$

$$\text{mit } k_2 = f(t_j + h_j, u_j + h_j k_1)$$

Zurück zur Summe m

$$h_j \sum_{l=1}^m \delta_l \underbrace{f(s_l, Y(s_l))}_{\approx k_l(t_j, Y_j)}$$

$$\approx k_l(t_j, Y_j)$$

$$s_l = t_j + \alpha_l h_j$$

Rekursiv

$$k_1(t_j, Y_j) = f(t_j, Y_j)$$

$$k_2(t_j, Y_j) = f(t_j + d_2 h_j, Y_j + h_j \beta_{21} k_1(t_j, Y_j))$$

$$k_3(t_j, Y_j) = f(t_j + d_3 h_j, Y_j + h_j (\beta_{31} k_1(t_j, Y_j) + \beta_{32} k_2(\dots)))$$

⋮

$$k_m(t_j, Y_j) = f(t_j + d_m h_j, Y_j + h_j (\beta_{m1} k_1 + \dots + \beta_{m, m-1} k_{m-1}))$$

$$u_{j+1} = u_j + h_j \sum_{l=1}^m \gamma_l k_l(t_j, u_j)$$

m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren

Die k_i heißen Stufenwerte.