

Numerische Integration

Quadratur, Kubatur

Warum numerische Integration?

- ① Stammfunktion existiert nicht explizit
- ② St.-Fkt. kompliziert auszuwerten
- ③ Integrand ist nur an diskreten Stellen definiert
- ④ Approximation ist ausreichend

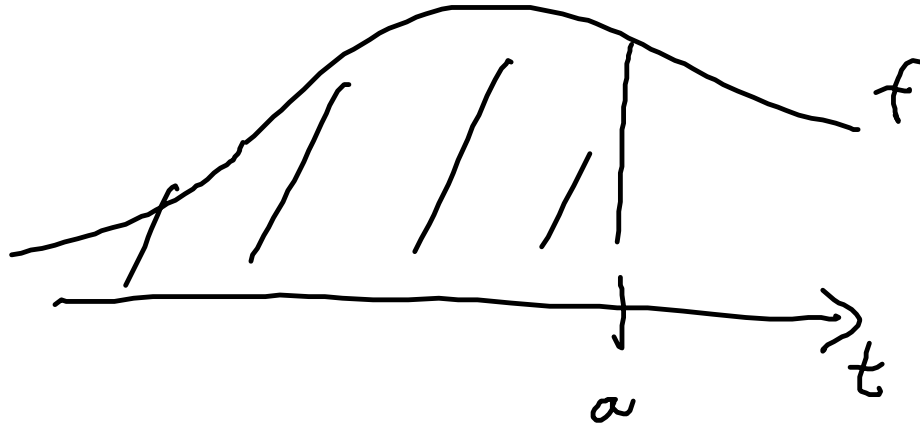
Zu ①: Wahrscheinlichkeitsrechnung

$X(t)$ Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeit P_a

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

↑
Dichte



Standard-Normalverteilung:

$$P(X \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

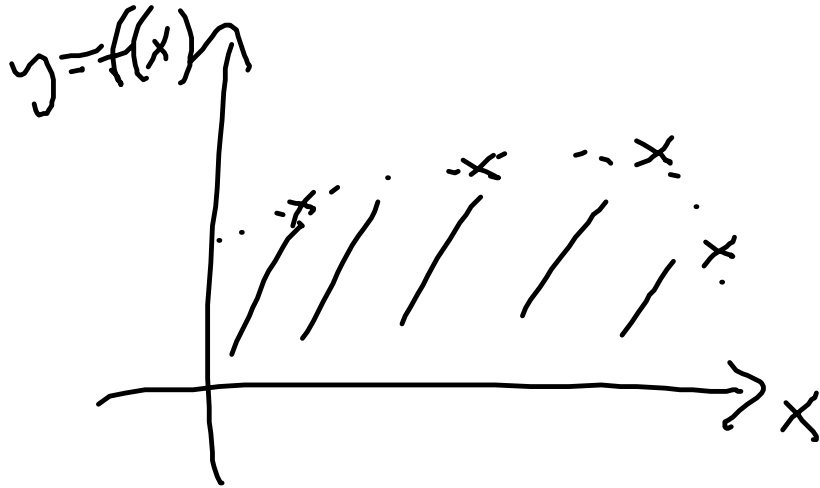
② Stammfkt. ! schwierig zu berechnen

gebrochen rationale Fkt.

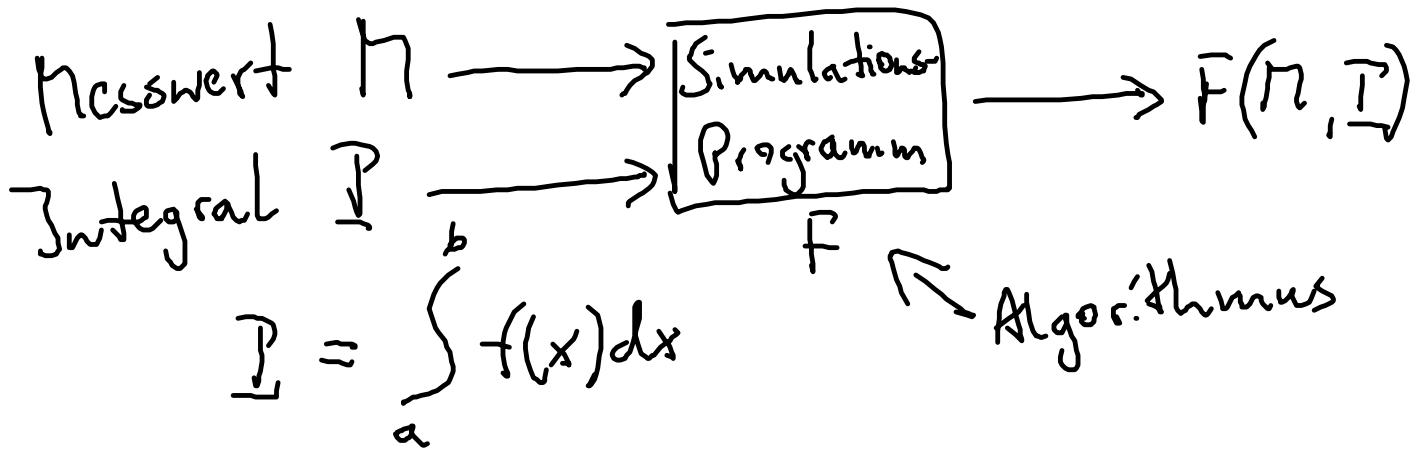
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

③ Funktion ist z.B. ein Simulationsprogramm

$$f: x \mapsto y$$



4.



Messwerte haben Fehler ϵ
 Integral muss nicht exakt berechnet
 werden, es reicht Genauigkeit ϵ

Methoden

Idee: Approx. Funktion und
 integriere diese Approximation.

(i) Polynominterpolation

auf gesamten Intervall

→ Newton-Cotes-Formeln

(ii) ... auf Teilintervallen

→ zusammengesetzte (summierte)

N.-C.-Formeln

(iii) ... mit optimal gewählten
Stützstellen (Gauß-Int.)

(iv) Romberg-Integration (Extrapolation)

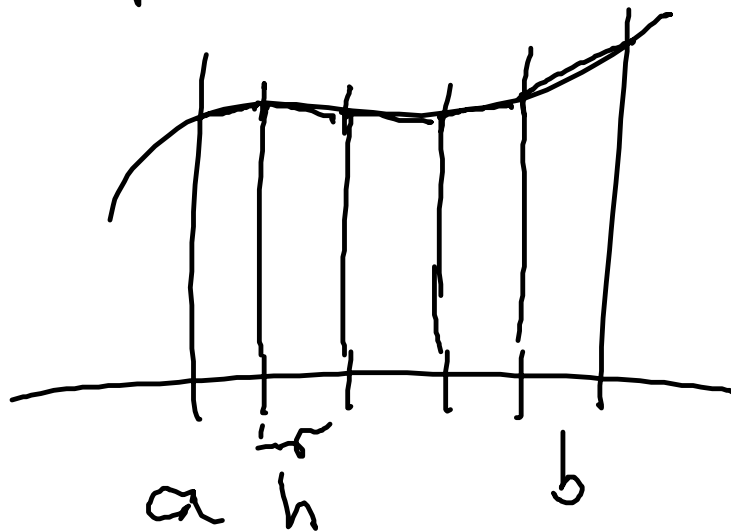
(v) adaptive Integration

Nachteil bei (i): Oszillationen

$\prod_n \Rightarrow p_n \xrightarrow{h \rightarrow \infty} f$ nicht glm.

$$\|p_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

(ii)



stückw.
Linear
(summierte
Trapezr.)

Vorteil:

$$S_h \rightarrow f \quad (h \rightarrow 0)$$

glm.

Fehler

$$\underline{I}(f) = \int_a^b f(x) dx$$

summierte Trapezregel:

$$|\underline{T}(h) - \underline{I}(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgeg. Genauigkeit

$$f(x) = \cos x, \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$$

0

$$h \leq ?$$

$$\|f''\|_b = \|\cos x\|_\infty \leq 1$$

$$\dots \leq \frac{b-a}{12} h^2 \leq 10^{-4} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{24} h^2 \leq 10^{-4}$$

$$h \approx 2.8 \cdot 10^{-2}$$

$$N = \frac{1.56}{2.8} \cdot 10^2$$

(iii) Grenzf.

geschickte Wahl von Stützstellen

(iv)

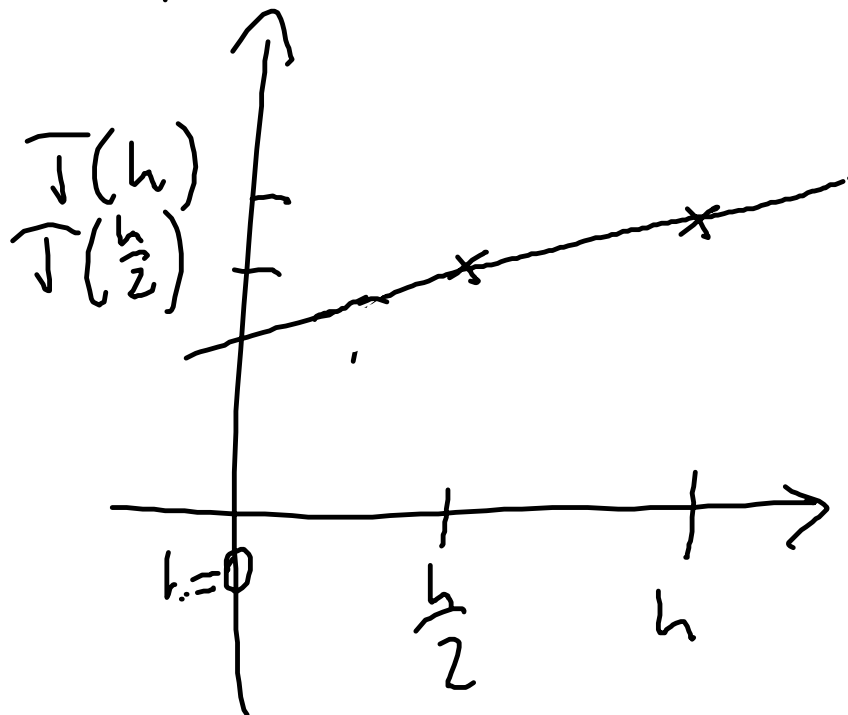
summ. Trapezregel:

Satz 6.1: $f \in C^{2m+2}$

$$T(h) = \underline{I}(f) + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \dots + \alpha_m(h) h^{2m+2}$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \underline{I}(f) + \tau_1 \frac{h^2}{4} + \tau_2 \frac{h^4}{16} + \dots$$

$$\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} = \underline{I}(f) + \tau_2 \dots h^4 + \dots$$



allg.: $\{h_i\}$ Folge von Schrittweiten

(v) adaptive Integration

Anfangsschrittweite h_0
variabel

in MATLAB quad

keine "Regel":

Entweder sum. Trapezr.

oder Bibliotheksroutine

NAG

am ZIB