Numerische Integration

Quadratur, Kubatur

Warum numerische Integration?

1. Stammfunktion existiert nicht explizit
2. St.-Fkt. kompliziert auszuwerten
3. Integrand ist nur an diskreten Stellen definiert
4. Approximation ist ausreichend

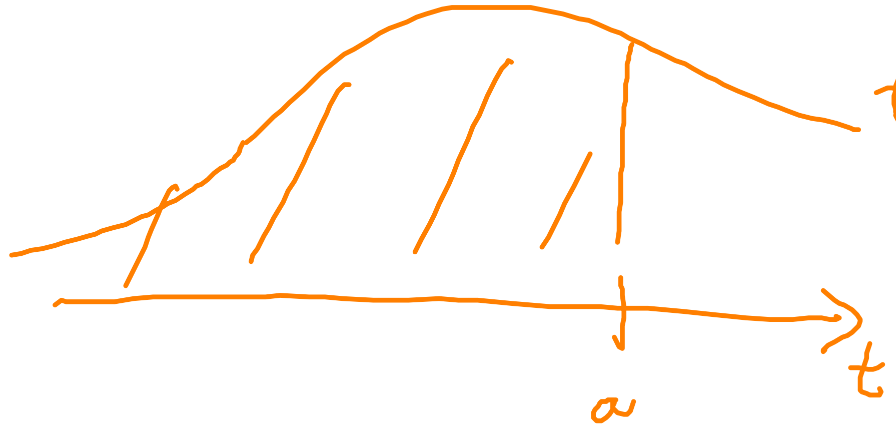
zu 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung

$X(t)$ Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeit P_a

$$P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt$$

$f(t)$: Dichte



Standard-Normalverteilung:

$$P(X \le a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

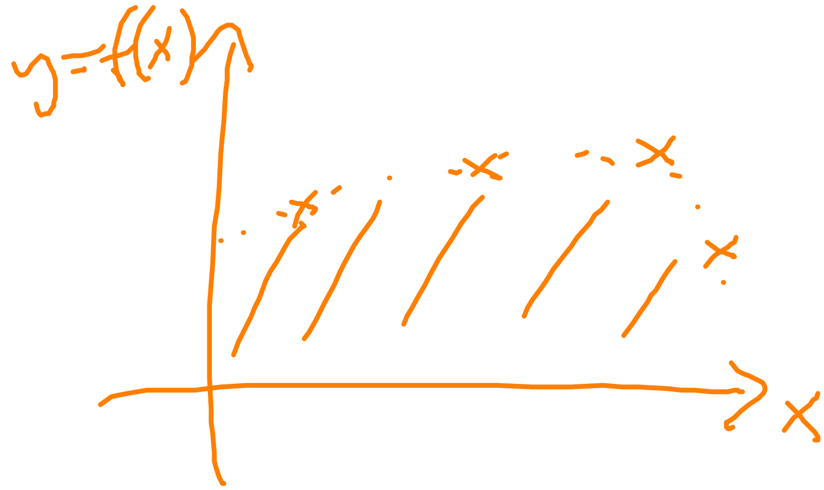
(2) Stamm Fkt. ! schwierig zu berechnen

gebrochen rationale Fkt.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

(3) Funktion ist z.B. ein Simulations-programm

$$f : x \mapsto y$$



4.

Messwert M $\longrightarrow$ Simulations-Programm F $\longrightarrow$ $F(M, I)$

Integral I $\longrightarrow$

Algorithmus

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Messwerte haben Fehler ε

Integral muss nicht exakt berechnet werden, es reicht Genauigkeit ε

Methoden

Idee: Approx. Funktion und integriere diese Approximation.

(i) Polynominterpolation auf gesamten Intervall
$\to$ Newton-Cotes-Formeln

(ii) ... auf Teilintervallen
$\to$ zusammengesetzte (summierte) N.-C.-Formeln

(iii) ... mit optimal gewählten Stützstellen (Gauß-Int.)

(iv) Romberg-Integration (Extrapolation)

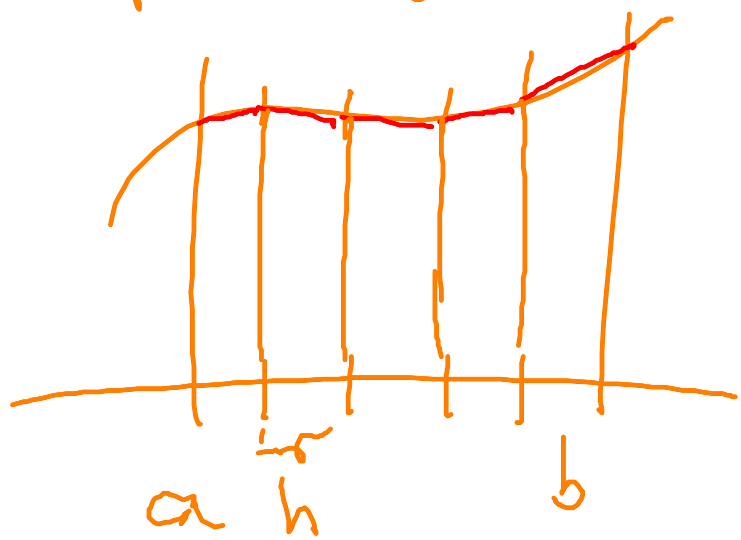
(v) adaptive Integration

Nachteil bei (i): Oszillationen

$\Pi_n \ni p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ nicht glm.

$$\|p_n - f\|_\infty \not\to 0$$

(ii)



stückw. Linear (summierte Trapezr.)

Vorteil:

$$S_h \to f \quad (h \to 0)$$

glm.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Fehler

summierte Trapezregel:

$$|T(h) - I(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgeg. Genauigkeit

$$f(x) = \cos x \quad , \varepsilon = 10^{-4}$$

$$\int^{\pi/2} \cos x\,dx$$

0

$h \leq ?$

$\|f''\|_\infty = \|\cos x\|_\infty \leq 1$

$\ldots \leq \frac{b-a}{12} h^2 \leq 10^{-4} = \varepsilon$

$\frac{\pi}{24} h^2 \leq 10^{-4}$

$h \approx 2{,}8 \cdot 10^{-2}$

$N = \frac{1{,}56}{2{,}8} \cdot 10^2$

(iii) Gauß . . .

geschickte Wahl von Stützstellen

(iv)

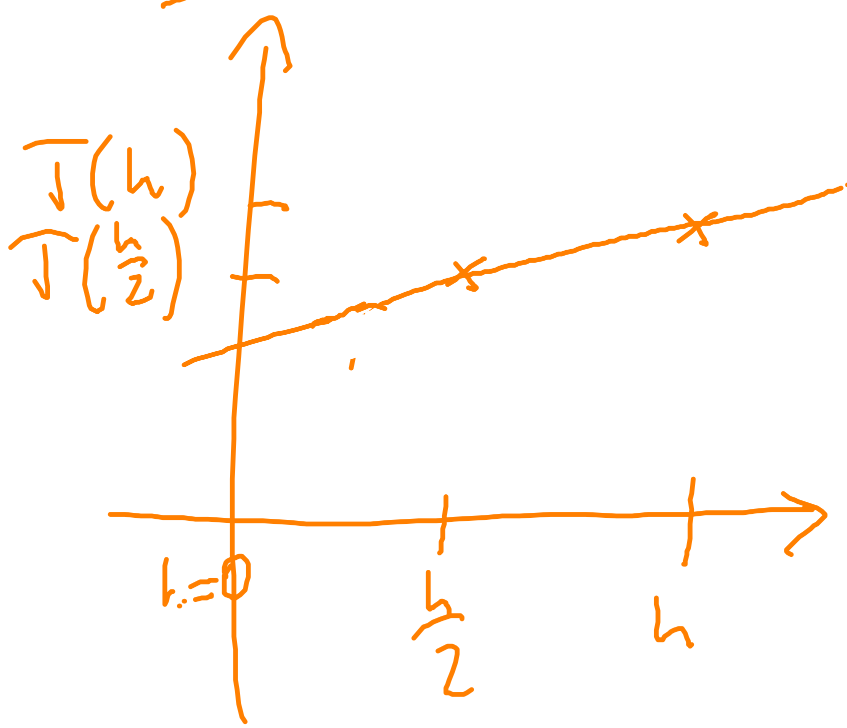
summ. Trapezregel:

Satz 61: $f \in C^{2m+2}$

$$T(h) = I(f) + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \dots + \alpha_m(h) h^{2m+2}$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + \tau_1 \frac{h^2}{4} + \tau_2 \frac{h^4}{16} + \dots$$

$$\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} = I(f) + \tau_2 \dots h^4 + \dots$$



allg.: $\{h_i\}$ Folge von Schrittweiten

(v) adaptive Integration

Anfangsschrittweite h_0

variabel

in MATLAB quad

Meine "Regel":

Entweder summ. Trapezr.

oder Bibliotheksroutine

NAG

... am ZIB