

Fortsetzung Schrittweiskontrolle;

Φ_p , Kontrollverfahren Φ_{p+1}

Ziel: Schätzung des lokalen Fehlers τ_p

Wissen:
$$\tau_p \sim h_j (\Phi_{p+1} - \Phi_p)$$
$$= \hat{u}_{j+1} - u_{j+1}$$

Numerische Umsetzung Wir berechnen mit

einer Anfangsschrittweite h die Iterierten

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{j+1} &= u_j + h \Phi_{p+1}(\dots, u_j) \\ u_{j+1} &= u_j + h \Phi_p(\dots, u_j, \dots) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{z.B.} \\ h = h_{j-1} \\ \text{sinnvoll} \end{array}$$

$$\Rightarrow \|\tau_p(h)\| = \|\hat{u}_{j+1} - u_{j+1}\|$$

Vorgabe einer Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$.

Ziel, Bestimme \tilde{h} so, dass

$$\|\tau_p(\tilde{h})\| \stackrel{(\leq)}{=} \varepsilon$$

Trick: Wissen $\tau_p(h) = C h^{p+1}$

wir kennen c nicht, müssen auch nicht...

$$\begin{aligned}\tau_p(\tilde{h}) &= c \tilde{h}^{p+1} = \left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{p+1} \underbrace{c h^{p+1}}_{\tau_p(h)} \\ &= \left(\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{p+1} \tau_p(h) \stackrel{(!)}{=} \varepsilon\end{aligned}$$

Daraus bestimmen wir \tilde{h}

$$\tilde{h} = \left(\frac{\varepsilon}{\tau_p(h)}\right)^{\frac{1}{p+1}} h = \underline{\underline{\left(\frac{\varepsilon}{\|\hat{u}_{j+1} - u_{j+1}\|}\right)^{\frac{1}{p+1}} h}}$$

⇒ Verfahren zur Schrittweitensteuerung:

- Gegeben $p, p+1$
- Wahl von ε (Toleranz)
- Sicherheitsparameter $\lambda \in [0.8, 0.9]$

u_j sei bereits berechnet;

- $\tau = \varepsilon$
- $h = h_{i-1}$ (letzte Schrittweite)

- $h = \lambda \left(\frac{\varepsilon}{\tau} \right)^{\frac{1}{p+1}} h$
- $u_{i+1} = u_i + h \Phi_p(t_i, u_i, h, f)$
- $\hat{u}_{i+1} = u_i + h \Phi_{p+1}(t_i, u_i, h, f)$
- $\tau = \| \hat{u}_{i+1} - u_{i+1} \|$
- $\tau > \varepsilon$: gehe zu \boxed{S} und bestimme
neues h
- $\tau \leq \varepsilon$: Akzeptiere h ,
 $h_i = h$
- $t_{i+1} = t_i + h_i$
- $i = i+1 \rightarrow \boxed{i}$

Bemerkung Im Skript nur unwesentlich
anders

- kein λ

- Sofort Verwendung von $\|\phi_{p+1} - \phi_p\|$ (ohne h)
 $\Rightarrow (\dots)^{\frac{1}{p}}$ an Stelle von $(\dots)^{\frac{1}{p+1}}$
- relative Toleranz
 $\Rightarrow n = \|u_i\| + 1$

Effektive numerische Umsetzung:
 ϕ_{p+1} sollte die Stufenwerte k_j verwenden,
 welche ϕ_p bereits berechnet hat.

Verf. zu ϕ_{p+1} ist eingebettet in das von ϕ_p

Beispiel $\phi: p=2, m=2$

Verfahren von Heun

0	
1	1
1/2	1/2

d.h.: $k_1 = f(t_i, u_i)$
 $k_2 = f(t_{i+1}, u_i + h_i k_1)$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h_i}{2} (k_1 + k_2)$$

zwei Trapezregel Abgriff der Werte am Intervallende.

Als eingebettetes Kontrollverfahren:
 Ordnung 3

0			
1	1		
1/2	1/4	1/4	
	1/6	1/6	2/3

$k_1 = f(t_i, u_i)$ schon da

$k_2 = f(t_{i+1}, u_i + h_i k_1)$

auch da

neu

$k_3 = f(t_i + \frac{h_i}{2}, u_i + \frac{h_i}{4}(k_1 + k_2))$

$$u_{i+1} = u_i + h_i \left(\frac{1}{6}(k_1 + k_2) + \frac{2}{3}k_3 \right)$$

Simpson

7. Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

7.1. Grundlagen

Sei $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$1 \leq p < \infty$$

max-Norm bei $p = \infty$

Ungln: Siehe Skript, insbesondere

$$\boxed{|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Def: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

• $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ Frobenius-Norm

• $\|A\|_p$ ist die kleinste Zahl $c \in \mathbb{R}$, für welche gilt

$$\|Ax\|_p \leq c \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

Man zeigt: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ Spaltensummennorm

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ Zeilensummennorm

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \leftarrow \text{größter Eigenwert von } A^T A$$

Spektralnorm

Def Eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ heißt submultiplikativ oder konsistent, wenn

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Bspe Frobenius-Norm, Zeilen- und Spaltennorm.

Def: Eine Matrixnorm $\|A\|$ heißt kompatibel oder verträglich mit der Vektornorm $\|x\|$,

wenn

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Bspe

- $\|A\|_F$ und $\|x\|_2$
- $\|A\|_1$ und $\|x\|_\infty$
- $\|A\|_\infty$ und $\|x\|_1$

Einige wichtige
Ungln:
Prop. 78, Skript

Def: $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ Dann

$$|A| := (|a_{ij}|)$$

Wir schreiben $A \leq B$ für $A, B \in \mathbb{R}^{m, n}$,
wenn

$$a_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall i, j \dots$$

Lemma 79 Es gilt

$$|A+B| \leq |A| + |B| \quad \text{trivial}$$

$$|AB| \leq |A||B|$$

$$A \leq B, C \geq 0, D \geq 0 \Rightarrow CAD \leq CBD$$

$$\|A\|_p \leq \| |A| \|_p$$

$$\|A\| = \| |A| \| \quad \text{für } \|\cdot\| = \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_F$$

$$|A| \leq |B| \Rightarrow \|A\| \leq \|B\| \quad \text{trivial}$$

für die eben genannten
Normen

7.2. Lösung von Dreieckssystemen

Systeme mit unterer oder oberer Dreiecksmatrix.

Sei $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ untere Dreiecksmatrix,
(l_{ij}) $l_{ij} = 0$ für $i < j$.

L sei invertierbar. Für $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\boxed{Lx = b}$$

$$\begin{cases} l_{11}x_1 & = b_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & = b_2 \\ \vdots & \\ l_{n1}x_1 + & + l_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = b_1 / l_{11}, \quad x_2 = (b_2 - l_{21}x_1) / l_{22}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j) / l_{ii}$$

$i = 2, \dots, n$

Braucht n^2 flops

Vorwärts-Einsetzen

Analogy: Rückwärts-Einsetzen für obere
Dreiecksmatrix U

$$U_{11}x_1 + \dots + U_{1n}x_n = b_1$$

...

$$U_{n-1,n-1}x_{n-1} + U_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

$$U_{nn}x_n = b_n$$