Fortsetzung Schrittweitensteuerung;

Φ_p, Kontrollverfahren Φ_{p+1}

Ziel: Schätzung des lokalen Fehlers τ_p

Wissen:
$$\tau_p \sim h_j(\Phi_{p+1} - \Phi_p)$$
$$= \hat{u}_{j+1} - u_{j+1}$$

Numerische Umsetzung Wir berechnen mit einer Anfangsschrittweite h die Iterierten

$$\hat{u}_{j+1} = u_j + h\,\Phi_{p+1}(\dots, u_j),$$
$$u_{j+1} = u_j + h\,\Phi_p(\dots u_j \dots)$$

z.B. $h = h_{j-1}$ sinnvoll

$$\Rightarrow \|\tau_p(h)\| = \|\hat{u}_{j+1} - u_{j+1}\|$$

Vorgabe einer Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$.

Ziel Bestimme $\tilde{h}$ so, dass
$$\|\tau_p(\tilde{h})\| \overset{(\leq)}{=} \varepsilon$$

Trick: Wissen
$$\tau_p(h) = c\,h^{p+1}$$

wir kennen c nicht, müssen auch nicht...

$$\tau_p(\tilde h) = c\,\tilde h^{p+1} = \left(\frac{\tilde h}{h}\right)^{p+1} \underbrace{c\,h^{p+1}}_{\tau_p(h)}$$

$$= \left(\frac{\tilde h}{h}\right)^{p+1} \tau_p(h) \overset{(!)}{=} \varepsilon$$

Daraus bestimmen wir $\tilde h$

$$\tilde h = \left(\frac{\varepsilon}{\tau_p(h)}\right)^{\frac{1}{p+1}} h = \underline{\underline{\left(\frac{\varepsilon}{\|\hat u_{j+1} - u_{j+1}\|}\right)^{\frac{1}{p+1}} h}}$$

$\Rightarrow$ <u>Verfahren</u> zur Schrittweitensteuerung:

- Gegeben p, $p+1$
- Wahl von ε (Toleranz)
- Sicherheitsparameter $\lambda \in [0.8, 0.9]$

u_j sei bereits berechnet;

$\boxed{i}$

- $\tau = \varepsilon$
- $h = h_{i-1}$ (letzte Schrittweite)

$\boxed{S}$

- $h = \lambda \left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)^{\frac{1}{p+1}} h$
- $u_{i+1} = u_i + h\,\phi_p(t_i, u_i, h, f)$
  $\hat{u}_{i+1} = u_i + h\,\phi_{p+1}(t_i, u_i, h, f)$
- $\tau = \| \hat{u}_{i+1} - u_{i+1} \|$
- $\tau > \varepsilon$: gehe zu $\boxed{S}$ und bestimme neues h

- $\tau \leq \varepsilon$: Akzeptiere h,
  $h_i = h$

- $t_{i+1} = t_i + h_i$
- $i = i+1 \rightarrow \boxed{i}$

Bemerkung Im Skript nur unwesentlich anders

- kein λ

- Sofort Verwendung von
  $\|\Phi_{p+1} - \Phi_p\|$ (ohne h)
- $\Rightarrow (\ldots)^{\frac{1}{p}}$ an Stelle von $(\ldots)^{\frac{1}{p+1}}$
- relative Toleranz
  $\rightsquigarrow n = \|u_i\| + 1$

Effektive numerische Umsetzung:
Φ_{p+1} sollte die Stufenwerte k_j verwenden, welche Φ_p bereits berechnet hat.

Verf. zu Φ_{p+1} ist <u>eingebettet</u> in das von Φ_p"

<u>Beispiel</u> Φ: $p=2$, $m=2$

Verfahren von Heun

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

<u>d.h.</u>: $k_1 = f(t_i, u_i)$

$k_2 = f(t_{i+1}, u_i + h_i k_1)$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h_i}{2}(k_1 + k_2)$$

Wie Trapezregel Abgriff der Werte am Intervallende.

Als eingebettetes Kontrollverfahren:

Ordnung 3

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
1/2 & 1/4 & 1/4 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/6 & 2/3
\end{array}$$

$k_1 = f(t_i, u_i)$ schon da

$k_2 = f(t_{i+1}, u_i + h_i k_1)$ auch da

neu

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, u_i + \frac{h_i}{4}(k_1 + k_2)\right)$$

$$u_{i+1} = u_i + h_i\left(\frac{1}{6}(k_1 + k_2) + \frac{2}{3} k_3\right)$$

Simpson

---

7. Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

7.1. Grundlagen

Sei $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty$$

max-Norm bei $p = \infty$

Ungln: Siehe Skript, insbesondere

$$\boxed{|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

<u>Def</u>: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

- $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ Frobenius-Norm

- $\|A\|_p$ ist die kleinste Zahl $c \in \mathbb{R}$, für welche gilt

$$\|Ax\|_p \leq c \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \quad \|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

<u>Man zeigt</u>: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ Spaltensummennorm

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ Zeilens.-norm

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} \leftarrow$ größter Eigenwert von A^TA

Spektralnorm

Def Eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ heißt submultiplikativ oder konsistent, wenn

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Bspe Frobenius-Norm, Zeilen- und Spaltens.

Def: Eine Matrixnorm $\|A\|$ heißt kompatibel oder verträglich mit der Vektornorm $\|x\|$, wenn

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Bspe

- $\|A\|_F$ und $\|x\|_2$
- $\|A\|_1$ und $\|x\|_\infty$
- $\|A\|_\infty$ " $\|x\|_1$

Einige wichtige Ungln: Prop. 78, Skript

Def: $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ Dann

$$|A| := (|a_{ij}|)$$

Wir schreiben $A \leq B$ für $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, wenn

$$a_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall i,j \ldots$$

<u>Lemma 79</u> Es gilt

$|A+B| \leq |A| + |B|$ trivial

$|AB| \leq |A||B|$

$A \leq B,\ C \geq 0,\ D \geq 0 \Rightarrow CAD \leq CBD$

$\|A\|_p \leq \||A|\|_p$

$\|A\| = \||A|\|$ für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_F$

trivial

$|A| \leq |B| \Rightarrow \|A\| \leq \|B\|$

für die eben genannten Normen

7.2. Lösung von Dreieckssystemen

Systeme mit unterer oder oberer Dreiecksmatrix.

Sei $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ untere Dreiecksmatrix,
(l_{ij}) $\quad l_{ij} = 0$ für $i < j$.

L sei invertierbar. Für $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$\boxed{Lx = b}$$

$$\begin{cases} l_{11} x_1 & = b_1 \\ l_{21} x_1 + l_{22} x_2 & = b_2 \\ \vdots & \\ l_{n1} x_1 + \dots + l_{nn} x_n & = b_n \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = b_1 / \ell_{11}, \quad x_2 = (b_2 - \ell_{21} x_1)/\ell_{22}$

$$\boxed{x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} x_j\right) / \ell_{ii}}$$

$i = 2, \dots, n$

Braucht n^2 flops

Vorwärts-Einsetzen

Analog: Rückwärts-Einsetzen für obere Dreiecksmatrix U

$$\left.\begin{aligned} u_{11} x_1 + \dots \quad\quad\quad + u_{1n} x_n &= b_1 \\ \dots \\ u_{n-1,n-1} x_{n-1} + u_{n-1,n} x_n &= b_{n-1} \\ u_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}\right\}$$