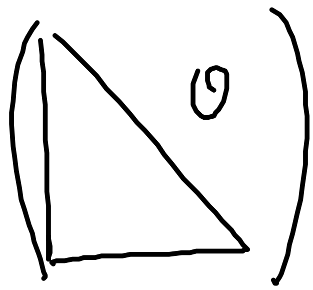
7.2. Lösung gestaffelter Gleichungssysteme

$$Lx = b$$

 $x = b$

$$Rx = b$$

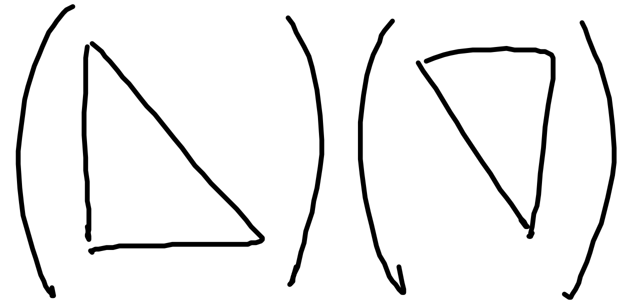
 $x = b$

Aufwand: $\mathcal{O}(n^2)$

$L, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$

7.3. LR-Zerlegung

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A = LR =$$ 

$$Ax = L\underbrace{Rx}_{=y} = b$$

1) $Ly = b$

2) $Rx = y$

Grund für Benutzung der LR-Zerleg.

- mehrere rechte Seiten b

  $$Ax^{(i)} = b^{(i)}$$

- Aufwand zur Berechnung von A^{-1} ist zu groß

  (u. Speicherbedarf ist zu groß!!)

LR-Zerlegung

LU decomposition

<u>Gauß-Transformationen:</u>

$x \in \mathbb{R}^n \qquad x_k \neq 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ | \\ x_k \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t = t^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ t_{k+1} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \Big\} k \qquad t_i = \frac{x_i}{x_k}$$

$i = k+1, \dots, n$

$$M_k := I - \underbrace{t^{(k)} e_k^T}_{\text{dyadisches Produkt}}$$

$$ab^T = (a_i b_j)$$

$$t^{(k)} e_k^T = (t_i^{(k)} \delta_{kj})$$

$(n \times 1)(1 \times n) = n \times n$

$\Gamma 1$

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & -t_{k+1} & \ddots & \\ & & \vdots & 0 & 1 \\ & & -t_n & & \end{bmatrix}$$

k-te Spalte

$$t^{(k)} e_k^T = \begin{array}{c} \quad k \quad \\ \begin{pmatrix} 0 & t^{(k)} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M_k x = \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & 0 \\ \cdots & & 1 & \\ & & -t_{k+1} & \ddots \\ 0 & & \vdots & & 1 \\ & & -t_n & & \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-t_{k+1} x_k + x_{k+1} = 0$$

Analogie zum Gauß-Alg.:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \boxed{3} & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{II.} - \underbrace{\frac{3}{2}}_{t_2} \text{I.}$$

$$t^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(x_1)

Aufwand: $(n-1)$ flops

Multiplikation mit Gauß-Tr.:

$$M_k C = (I - t^{(k)} e_k^T) C$$
$$= C - t^{(k)} (e_k^T C)$$

$(0, \; 1, 0 \ldots)$ $\Big(\quad \Big)$

Aufwand $2(n-1)r$

Fehler:

$$gl(M_k C) = M_k C + E$$
$$|E| \leq 3\,\mathrm{eps}\,(|C| + |t|\,|C(1,:)|)$$

$+\mathcal{O}(\text{eps}^2)$

$t \leq x$ komp.-weise

Wann wird $|t|$ groß?

$$t_i = \frac{x_i}{x_k}$$

$|E|$ wird groß, wenn $|t|$ groß wird!

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ t_{k+1} \\ t_n \end{pmatrix}, \quad |t| = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ |t_{k+1}| \\ \vdots \\ |t_n| \end{pmatrix}$$

Im k-ten Schritt:

$$A^{(k-1)} = M_{k-1} \cdots M_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & & & - - - - & \\ 0 & \ddots & & & \\ | & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & & \\ | & 0 & 0 & a_{kk}^{(k-1)} \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & & | & & \\ 0 & & 0 & & \end{bmatrix}$$

Zusammengefasst nach $n-1$ Schritten:

$$M_{n-1} \cdots M_1 A = R$$

$$A = \underbrace{M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}}_{=L} R$$

$$M_k^{-1} = I + t^{(k)} e_k^T$$

$$M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} = I + \sum_{k=1}^{n-1} t^{(k)} e_k^T$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ t^{(1)} & t^{(2)} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & t^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = LR$$

Kondition einer Matrix

$$\kappa = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$