Bsp 84 System

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ 10^{-6} x_2 &= 10^{-6} \end{aligned} \qquad \text{Lösung} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrix A ist schlecht konditioniert, denn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{6} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 1, \qquad \|A^{-1}\|_\infty = 10^6 \quad \text{Zeilens}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_\infty(A) = 1 \cdot 10^6 = 10^6$$

Störung von

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \text{durch} \quad \Delta b = \begin{bmatrix} 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\Delta b\|_\infty = 10^{-7}, \quad \text{rel. Fehler} \quad \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{10^{-7}}{1} = \delta$$

$r = \delta \, k_\infty(A) = 10^{-7} 10^{6} = 0.1 \Rightarrow$ damit in Fehlerabschätzg. (7.25)

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{|\Delta x_1|}{1} = 10^{-7} \leq \frac{2r}{1-r} = \frac{2 \cdot 0.1}{0.9} = \frac{2}{9}$$

linke Seite von (7.25)

sehr pessimistische Abschätzung!

Andere Störung:

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$\|\Delta b\|_\infty = 10^{-7} \Rightarrow r$ unverändert, $\frac{2}{9}$ als Absch.

$\Delta x: \Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_2 = 10^{6} \cdot 10^{-7} = 0.1$

Linke Seite von (7.25)

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

Passt wesentlich besser!

__Ursache:__ Die Kondition von A sagt zu wenig über die einzelnen Zeilen aus

__Deshalb:__ Verbesserung der Abschätzung durch komponentenweise Analyse.

Bis jetzt: A, $\|A\|$, Fehlermatrix F, $\|F\|$

relativer Fehler: $\|F\| \leq \delta \|A\|$ (Forderung)

__Jetzt:__ Betrachten $|A|$, $|F|$ (Matrizen!)

Fordern

$$|F| \leq \delta |A|$$

d.h. $$|f_{ij}| \leq \delta |a_{ij}| \quad \forall i,j = 1:n$$

Man beweist:

__Lemma 85__ Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nichtsingulär und $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$. Es gelte $Ax = b$ und

$$(A + \Delta A) y = b + \Delta b.$$

Gefordert sei

$$|\Delta A| \leq \delta |A| \text{ und}$$
$$|\Delta b| \leq \delta |b| .$$

Ist die Bedingung

$$\delta \| \, |A| |A^{-1}| \, \|_M = r < 1$$

erfüllt, so ist $(A + \Delta A)$ ist nichtsingulär

und

$$\frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \frac{1+r}{1-r} .$$

Dabei ist $\|\cdot\|_M$ eine der Matrixnormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_F$ und $\|\cdot\|$ die zugehörige verträgliche Vektornorm.

<u>Bemerkung</u> Die Größe

$$\boxed{\kappa_C(A) = \| \, |A| |A^{-1}| \, \|_M}$$

heißt <u>Skeelsche Kondition</u>

Satz 86 Unter den obigen Voraussetzungen gilt die Fehlerabschätzung

$$\boxed{\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq \frac{2r}{1-r}} \qquad (7.26)$$

Bsp 87 Wie Bsp 84

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} = |A|, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{6} \end{bmatrix} = |A^{-1}|$$

$$\Rightarrow \| \, |A| |A^{-1}| \, \|_\infty = \| I \|_\infty = 1$$

Die Voraussetzung des Satzes lautet jetzt

$$\delta \cdot 1 = r < 1 \qquad \Rightarrow r = \delta$$

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix} : \qquad \Delta x_1 = 10^{-7}, \; \Delta x_2 = 0$$

$$\delta = r = 10^{-7}$$

$$\underbrace{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{10^{-7}}{1}}_{\text{linke S.}} \leq \frac{2 \cdot r}{1-r} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{1-10^{-7}} \approx 2 \cdot 10^{-7}$$

relativ genau

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-7} \end{bmatrix}, \quad \Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_2 = 0.1$$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{0.1}{1} = \frac{1}{10} \leq \frac{2 \cdot 0.1}{1 - 0.1} = \frac{2}{9}$$

$$\delta = \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{0.1}{1} = \underline{\underline{0.1}} = r$$

<u>Anwendung dieser Sätze auf Rückwärtsanalyse</u>

Def. der Vor- und Rückwärtsanalyse erfolgte für "Problem" $x \longmapsto f(x)$, $x \longmapsto \tilde{f}(x)$

Fehler im Algorithmus ($\tilde{f}$ an Stelle von f) werden bei Rückwärtsanalyse zurückgespielt auf gestörte Eingabe $\tilde{x}$: $\tilde{x} \longmapsto f(x)$

Jetzt: $x \mathrel{\widehat{=}} (A, b)$

$f(x) \mathrel{\widehat{=}} y = A^{-1} b$ (d.h. Lsg von $Ay = b$)

$$(A, b) \mapsto A^{-1} b$$

Fehler der Lösung von $A^{-1} b$ werden zurückgespielt auf gestörte Daten $\tilde{A}, \tilde{b}$.

Gestörte Daten: A: $gl(A) = A + E$

$gl(b) = b + e$

Dabei gefordert $\|E\|_\infty \leq \delta \|A\|_\infty$, mit $\delta = eps$

$\|e\|_\infty \leq \delta \|b\|_\infty$

Wir berechnen damit nicht $x = A^{-1} b$, sondern

$$(A + E)\tilde{x} = b + e,$$

wobei diese Gleichung als exakt lösbar angenommen wird.

Wenden Satz 83 an mit $\delta = eps$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{2\,\text{eps}\,k_\infty(A)}{1-\text{eps}\,k_\infty(A)} \quad (\text{aus } (7.25))$$

Es <u>sei</u> erfüllt: $r = \text{eps}\,k_\infty(A) \leq \frac{1}{2}$

Dann folgt aus der obigen Absch.

$$\leq \frac{2\,\text{eps}\,k_\infty(A)}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 4\,\text{eps}\,k_\infty(A)$$

<u>Folgerung</u> Trotz angenommener exakter Lösung von $(A+E)\tilde{x} = b+e$ kann bei schlecht konditionierter Matrix A (z.B. $\text{eps} \cdot k_\infty(A) = 1$) das Ergebnis schlecht sein [die Abschätzungen sind scharf]

$\Rightarrow$ Vorsicht bei schlecht konditionierten Aufgaben.

<u>Fehleranalyse des Gauß-Algorithmus</u>

Satz 88 (Fehler bei LR-Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ Matrix von Maschinenzahlen.
Die LR-Zerlegung sei möglich, d.h., es treten keine 0-Pivots auf. Dann erfüllen die berechneten Faktoren $\tilde{L}, \tilde{R}$ die Gleichung

$$\tilde{L}\tilde{R} = A + H$$

mit
$$|H| \leq 3(n-1)\,\mathrm{eps}\left(|A| + |\tilde{L}||\tilde{R}|\right) + O(\mathrm{eps}^2)$$

o.B.
→ Skript

Satz 89 (Fehler der Lösung)

Sind $\tilde{L}, \tilde{R}$ die oben eingeführten Matrizen, so ergibt sich aus Alg 3 und Alg 4 zum Vor- und Rückwärtseinsetzen $\tilde{L}\tilde{y} = b$, $\tilde{R}x = \tilde{y}$ eine Lösung $\tilde{x}$ von

$$(A+E)\tilde{x} = b$$

mit
$$|E| \leq n\,\mathrm{eps}\left(3|A| + 5|\tilde{L}||\tilde{R}|\right) + O(\mathrm{eps}^2)$$

Beweis: Rückwärtsanalyse von Alg 3,4:

$$(\tilde{L}+F)\tilde{y} = b \qquad (\tilde{R}+G)\tilde{x} = \tilde{y}$$

mit (*) $\begin{cases} |F| \le n\,\mathrm{eps}\,|\tilde{L}| + O(\mathrm{eps}^2) \\ |G| \le n\,\mathrm{eps}\,|\tilde{R}| + \text{-"-} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad (\tilde{L}+F)(\tilde{R}+G)\tilde{x} = b \quad \text{wird wirklich gelöst}$$

$$\Updownarrow \quad \big(\underbrace{\tilde{L}\tilde{R}}_{A+H} + \underbrace{\tilde{L}G + F\tilde{R} + FG}_{E}\big)\tilde{x} = b$$

$$E = H + \tilde{L}G + F\tilde{R} + FG$$

Absch. einbauen (*)

Dann nach Absch.

$$|E| \le 3(n-1)\,\mathrm{eps}\,(|A| + |\tilde{L}||\tilde{R}|) + 2n\,\mathrm{eps}\,|\tilde{L}||\tilde{R}| + O(\mathrm{eps}^2)$$

$\leadsto$ Abschätzung des Satzes $\square$

Bemerkung $|\tilde{L}||\tilde{R}|$ kann groß sein, wenn Pivots klein sind $\Rightarrow$ Gauß-Alg. ist nicht rückwärts-stabil.

7.5. Partielle Pivotisierung

Bsp. Gleichungssystem

$$1.00 \cdot 10^{-4} x_1 + 1.00\, x_2 = 1.00$$

$$1.00\, x_1 + 1.00\, x_2 = 2.00$$

$$Ax = b$$

Rechner arbeitet mit 3 Dezimalstellen

Rechnung von Hand: $x_2 = 1 - 10^{-4} x_1$

$$\Rightarrow x_1 + 1 - 10^{-4} x_1 = 2$$

$$\Rightarrow 0.9999\, x_1 = 1$$

$$x_1 = 1.0001$$

$$\approx 1$$

$$x_2 = 1 - 10^{-4} = \underline{\underline{0.9999}}$$

Nun LR-Zerlegung

$$A = \begin{bmatrix} 1.00\ 10^{-4} & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 A = \begin{bmatrix} 1.00\ 10^{-4} & 1.00 \\ 0 & -1.00 \cdot 10^{4} \end{bmatrix}$$

$$M_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.00 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$1 - 10\,000 \approx -10^4$

(1 wird ausgelöscht)

ausgleichem Grunde.

$\Rightarrow$ gestaffeltes System

$$1 \cdot 10^{-4} x_1 + 1 \cdot x_2 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \; \text{f}$$

$$-1 \cdot 10^4 x_2 = -1 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow x_2 = 1 \; \checkmark$$

Tausch von Zeile 1 und 2 würde das Problem lösen.